

## UMA COMBINAÇÃO DE MÉTODOS: METAFÓRA CONCEITUAL, CONJUNTOS DIFUSOS, ENGENHARIA DIDÁTICA CLÁSSICA E ESTATÍSTICA BAYESIANA

Péricles César de Araújo – Sonia Barbosa Camargo Iglioni  
pericles@uefs.br– sigliori@pucsp.br  
UEFS/PUC-SP Brasil e PUC-SP Brasil

Tema: VII.2 Papel da Teoria na Pesquisa em Educação Matemática

Modalidade: CB

Nível: 7 Não específico

Palavras chave: Pesquisa em Educação Matemática, Metáfora Conceitual, Lógica Difusa, Estatística Bayesiana

### Resumo

*Este estudo insere-se nas investigações sobre metodologia de pesquisa em Educação Matemática entre aquelas que avaliam que o uso de métodos mistos (qualitativos e quantitativos) pode ampliar o conhecimento teórico e o grau de confiabilidade dos resultados. O objetivo refletir sobre a problemática de combinação de métodos de pesquisa, tendo em vista a variabilidade e a imprecisão dos dados dessa área de investigação. Tradicionalmente a variabilidade, aspecto aleatório dos dados, é analisada por meio de métodos quantitativos utilizando a Estatística Clássica, e a imprecisão é geralmente analisada por meio de métodos qualitativos. A Metáfora Conceitual será interpretada como um elemento dum Conjunto Difuso definido por meio de uma função de pertinência, assim, permitindo expressar graus de analogias. A proposta deste artigo é apresentar uma combinação de métodos utilizando a Metáfora Conceitual, Conjunto Difuso, Engenharia Didática Clássica e Estatística Bayesiana; evidenciando possíveis vantagens da mesma.*

Os métodos qualitativos e quantitativos têm como propriedades a profundidade e amplitude, respectivamente. Assim, este estudo insere-se nas investigações sobre metodologia de pesquisa em Educação Matemática entre aquelas que avaliam que o uso de métodos mistos (qualitativo e quantitativo) pode ampliar o grau de confiabilidade dos resultados.

Desse modo, propomos refletir sobre as vantagens da combinação de métodos científicos tendo por referência a incerteza, isto é, a variabilidade dos dados da Educação Matemática e imprecisão dos mesmos, decorrentes da relação de pertinência elemento/conjunto. Como afirma (Lester, 2010), a pesquisa em Educação Matemática tem um viés social, (Ragin, 2000) considera que as declarações teóricas em pesquisa social, na maioria das vezes podem ser formuladas como declarações sobre conjuntos.

O estudo está em consonância com preocupações da área no que tange à utilização de métodos mistos de pesquisa. Como referência, indicamos o trabalho de (Ross e Onwuegbuzie, 2012), que pesquisaram 87 artigos em dois jornais de Educação Matemática entre 2002 e 2006. Eles analisaram as possíveis tendências em métodos mistos, observando que a integração entre pesquisa quantitativa e qualitativa ampliou o grau de confiabilidade dos resultados, isto é, os dados quantitativos e qualitativos foram utilizados para complementar um ao outro.

Quanto à combinação de métodos vale destacar o que consideram (Strauss e Corbin, 2008, p. 40). Dizem eles: *a combinação de métodos pode ser feita por razões suplementares, complementares, informativas, de desenvolvimento e outras*. A proposta apresentada neste artigo se sustenta em duas dessas razões: a de desenvolvimento e a de complementação. O desenvolvimento está proposto segundo a perspectiva da metáfora conceitual de (Lakoff e Johnson, 2003) levando-se em consideração as críticas de (Otte, 2008). E a ideia de complementaridade está em conformidade com os argumentos da (Otte, 2003). No que se refere à pertinência do uso da metáfora, apoiamos-nos nas considerações de (Leite, 2010) sobre a notável evolução de sua concepção culminando mesmo com o reconhecimento de sua função epistemológica para ciência e para a matemática.

É fato de que a variabilidade, aspecto aleatório dos dados, é tradicionalmente analisada nas pesquisas da Educação Matemática utilizando-se a Estatística Clássica, e a imprecisão dos dados é geralmente analisada por meio de métodos qualitativos. Neste artigo propomos duas alterações fundamentais: a utilização da Estatística Bayesiana para abordar a variabilidade ou aspecto aleatório, e da Lógica dos Conjuntos Difusos para tratar a imprecisão. Isso se justifica, pois, a Estatística Bayesiana é uma teoria que tem como base a definição subjetiva de probabilidade, atualizada por meio do Teorema de Bayes. Assim, a Estatística Bayesiana, torna-se um suporte teórico para um método quantitativo na análise da variabilidade dos dados, levando em conta também os aspectos subjetivos que envolvem a pesquisa na área da Educação Matemática. A Lógica dos Conjuntos Difusos tem como base a generalização da relação de pertinência elementos / conjunto, essa lógica é adequada para tratar a imprecisão dos dados, porque os objetos observados, no âmbito da pesquisa em Educação Matemática, não satisfazem de modo preciso aos critérios de pertinência da Teoria Clássica de Conjuntos.

Com o arcabouço teórico acima acreditamos oferecer reflexões que vão ao encontro do que cada vez mais vem sendo defendido pela comunidade científica: o uso dos métodos mistos computacionais, possivelmente pelo avanço da computação, e pela exigência do rigor na pesquisa.

No âmbito da pesquisa em Educação Matemática, a importância do paradigma convencional está comprovada por meio do artigo de (Utsumi, *et al* 1999): “Questões metodológicas dos trabalhos de abordagem quantitativa apresentados no GT19-ANPED”. Esses autores apresentam um inventário de procedimentos estatísticos clássicos ou convencionais.

Reconhecemos essa importância e, numa perspectiva complementar, indicamos que a Estatística Bayesiana não se atém apenas aos dados, isso porque é baseada na interpretação subjetiva de probabilidade. Assim sendo também leva em consideração o ponto de vista do pesquisador, formalizando o argumento de Kant, o conhecimento nunca se dá de maneira neutra, isto é, como relação ao pesquisado a substituição do adjetivo “*observador*” pela palavra “*participante*” (Capra, 2011, p. 150).

As aplicações operacionais das Teorias Objetivas, (Popper, 2003; 1993) estão associadas à Estatística Clássica enquanto as Teorias Subjetivas têm aplicações operacionais nos Métodos Estatísticos Bayesianos (Paulino *et al*, 2003). A Estatística Clássica é caracterizada, no âmbito, das Ciências Sociais como um procedimento expresso por fórmulas matemáticas e dados observados; isto é, uma coleção de ferramentas misteriosas. Em outro sentido, Métodos Estatísticos Bayesianos são fundamentados no Teorema de Bayes que revisa as estimativas de probabilidade iniciais. Segundo (Lakatos; 1999, p.99), o Método Bayesiano é revolucionário.

O grau de associativismo, um propriedade dos conjuntos difusos, é uma relação de pertinência. Nos conjuntos não difusos a relação de pertinência de elementos a um conjunto é binária, isto é, o elemento pertence ou não ao conjunto, enquanto que na teoria de conjuntos difusos há uma avaliação gradual da pertinência do elemento ao conjunto. A Lógica de Conjunto Difuso, ou simplesmente Lógica Difusa, tem como objetivo representar o pensamento humano, ou seja, uma representação mais aproximada, ou melhor, ligar à linguística e à inteligência humana, porque muitos conceitos são melhores definidos por palavras ou como (Zadeh, 1965) definiu, variáveis linguísticas.

A partir da noção de conjuntos difusos (Zadeh, 1968) vai estender o conceito de probabilidade para um evento difuso (*fuzzy*). Ele diz que nas experiências do dia a dia com frequência encontram-se situações para as quais um “evento” é antes difuso do que um conjunto de pontos bem delimitados. Para Zadeh a extensão dos conceitos de evento e probabilidade para os conjuntos difusos alarga o campo de aplicações da teoria das probabilidades.

(Otte, 2003) interpreta essa definição de (Bohr, 1995) no âmbito da Educação Matemática, indicando que a complementaridade faz referência a símbolos e conceitos, em um duplo sentido, que se reajustam reciprocamente que se integram para capturar os aspectos essenciais do desenvolvimento cognitivo e epistemológico do conhecimento científico e conceitos matemáticos.

(Zadeh, 1995) propõe que a Lógica do Conjunto Difuso não é concorrente à Teoria de Probabilidades, mas complementar. Para este estudo nos interessa essa perspectiva a da complementaridade na combinação de probabilidade com a intensidade de pertinência. Na Lógica do Conjunto Difuso define-se a função associativismo, uma função que assume valores no intervalo  $[0; 1]$ , grau de pertinência. Não se trata de uma probabilidade, representa sim, uma medida matemática da proporção da intensidade de pertinência.

A teoria da Engenharia Didática, um método qualitativo de pesquisa criado no âmbito da Educação Matemática, foi elaborada numa analogia entre as ações da Didática da Matemática e do trabalho de um Engenheiro.

(Ross e Onwuegbuzie, 2012) propõem que pesquisadores em Educação Matemática poderiam usar dados qualitativos na análise estatística, de maneira complementar. Considerando a definição de (Artigue, 1988) e de forma complementar, (Araújo e Iglioni, 2009) construíram um exemplo de método misto, isto é, uma agregação do método quantitativo ao método qualitativo da Engenharia Didática. Essa construção foi uma tentativa inicial de abordagem do problema no âmbito da Educação Matemática, consideramos um método misto primário.

A definição de Engenharia Didática utilizada em (Araújo e Iglioni, 2009) é a *Engenharia Didática Clássica (amplamente conhecida) ou também denominada Engenharia Didática de 1ª Geração*. (Almouloud e Silva, 2012, p. 22). Neste sentido,

o foco de interesse dos autores é a Engenharia Didática Clássica como uma metáfora conceitual do Método Estatístico Bayesiano.

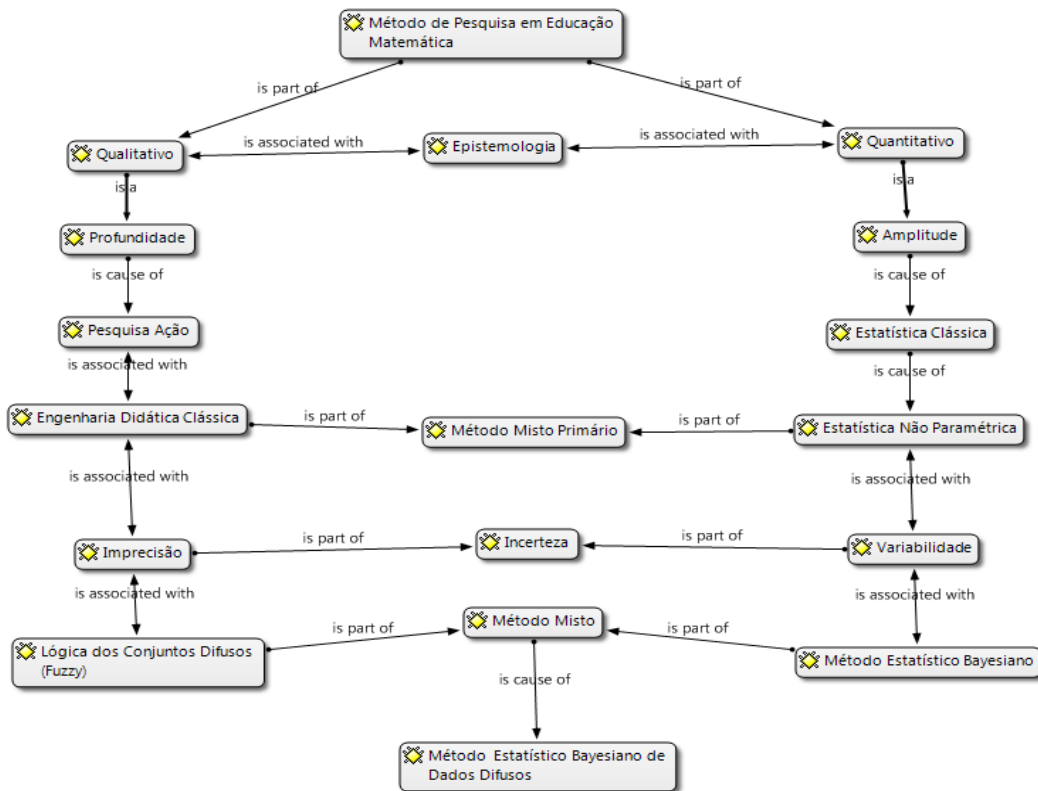
A Estatística Bayesiana é uma teoria que tem como base a definição subjetiva de probabilidade que é atualizada por meio do Teorema de Bayes. (Schoner, 2000) afirma que Kant expressa uma ideia muito semelhante a de Bayes, na medida em que postula que tem de haver alguma habilidade *a priori*, intelectual ou conhecimento, a fim de adquirir novos conhecimentos a partir da observação.

A distribuição *a priori* e a distribuição *a posteriori* são os fundamentos do Método Bayesiano. Assim como análise *a priori* e análise *a posteriori* são os fundamentos da Engenharia Didática Clássica. Também, podemos observar as considerações sobre análise *a priori* e análise *a posteriori*. O aspecto subjetivo dos dois paradigmas, Método Bayesiano e a Engenharia Didática Clássica, como os seus fundamentos distribuição *a priori* e a distribuição *a posteriori* e análise *a priori* e análise *a posteriori*, respectivamente, são elementos semelhantes nos dois métodos. Como afirma (Artigue, 1988), a validação da Engenharia Didática Clássica é essencialmente interna, fundada no confronto da análise *a priori* da análise *a posteriori*.

Observamos que há um vínculo de similaridade semântica entre os fundamentos do Método Bayesiano e a Engenharia Didática Clássica. Portanto, consideramos que a Engenharia Didática Clássica é uma metáfora conceitual segundo o que apresenta (Leite, 2010). Engenharia Didática Clássica, com relação ao Método Bayesiano, é uma metáfora conceitual porque a Engenharia Didática Clássica é potencial heurístico, pois pode agregar aspectos da inferência do Método Bayesiano.

A variabilidade foi abordada por meio do Método Estatístico Bayesiano, a imprecisão terá como referencial teórico a Lógica dos Conjuntos Difusos. Neste sentido, considerando (Viertl, 2011), por meio do argumento do Método Estatístico Bayesiano com Dados Difuso, podemos atualizar a probabilidade condicional  $P(t/e)$  de Popper, agregando a probabilidade subjetiva e grau de pertinência entre os elementos de um conjunto. Assim, corrigindo o erro de Popper, propomos uma solução alternativa ao grau de corroboração, isto é, grau de pertinência por meio do Teorema de Bayes. (Singpurwall e Booker, 2004) consideram que há benefícios no uso da Teoria da Probabilidade em Conjuntos Difusos por meio do Teorema de Bayes porque é uma habilidade que permite lidar com diferentes tipos de incertezas que podem surgir dentro do mesmo problema. A Figura 1 sumariza as ideias principais abordadas nesse artigo:

Figura1: Mapa conceitual do artigo



Fonte: O autor por meio do programa ATLAS.ti.

Na Figura 1 é apresentado um mapa conceitual construído por meio do programa ATLAS.ti (<http://www.atlasti.com/index.html>). Esse mapa conceitual responde as perguntas que surgiram antes e durante o desenvolvimento da pesquisa. Os sintagmas em Inglês são da versão *demo*, uma restrição do programa. Assim os sintagmas *is part of*, *is a*, *is associated with*, *is cause of* significam “é parte de”, “é um”, “é associado com”, “é causa de”; respectivamente. Assim, com relação a Figura 1, significa que Qualitativo e Quantitativo “é parte de” Métodos de pesquisa em Educação Matemática; significa que Qualitativo e Quantitativo “é associado com” Epistemológico; significa que Qualitativo é um método de profundidade enquanto que Quantitativo é um método de amplitude; significa que Qualitativo “é causa de” Pesquisa Ação, Engenharia Didática Clássica, Imprecisão, Lógica dos Conjuntos Difusos; significa que Quantitativo “é causa de” Estatística Clássica, Estatística Não Paramétrica, Variabilidade, Método Estatístico Bayesiano; significa que Imprecisão e Variabilidade são partes da Incerteza. Também, podemos observar que a Engenharia Didática e a

Lógica dos Conjuntos Difusos estão associados a imprecisão assim como a Estatística Não Paramétrica e Método Estatístico Bayesiano estão associados a variabilidade. Finalmente, significa que Misto “é causa de” Método Estatístico Bayesiano de Dados Difusos.

A combinação de métodos não é novidade. Mas o que torna nossa proposta inédita é o fato de tratar o problema no âmbito da pesquisa em Educação Matemática por meio da sua própria linguagem, a Matemática, utilizando novas ferramentas, a Lógica dos Conjuntos Difusos e o Método da Estatística Bayesiana. Nesta proposta se considera o aspecto dual da incerteza dos dados observados no âmbito da pesquisa em Educação Matemática, isto é, a variabilidade e a imprecisão dos dados. Com isso, a Lógica dos Conjuntos Difusos e o Método da Estatística Bayesiana podem agregar a aspectos quantitativos aos métodos qualitativos que são utilizados na pesquisa dos fenômenos ou problemas reais da Educação Matemática, problemas caracterizados por representações epistemológicas, histórico-epistemológicas e comportamentais. Por conseguinte, o Método Estatístico Bayesiano de Dados Difusos é uma boa prática estatística que tem interseção com as ideias de Popper, Kuhn e Lakatos. E por fim, reforçamos que é nossa crença que os argumentos apresentados no artigo, como pretendíamos, podem contribuir com as reflexões sobre o uso dos métodos mistos na pesquisa da Educação Matemática e a consequente melhoria da confiabilidade dos resultados da pesquisa nessa área.

### Referências.

- Artigue, M. (1988) Ingénierie didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, La Pensée Sauvage, Grenoble, v. 9, n. 3, pp. 281-307.
- Almouloud, S. & Silva, M. (2012) Engenharia didática: evolução e diversidade. R. Eletr. De Edu.Matem., v.07, n.2, pp.22-52.
- Araújo, P. & Iglioni, S. (2009) Engenharia Didática como uma Estatística Não-Paramétrica. Caderno de Física da UEFS, PP.133-142.
- Bayes, T.(1958) An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. Phil. Trans. Roy. Soc. 53, 370-418, 54, 296-325, reprinted in Biometrika, 45 , p.293-315.
- Bohr, N. (1995) Física atômica e conhecimento humano: ensaios 1932-1957. Rio de Janeiro, Contraponto Editora LTDA.
- Capra, F. (2011) O Tao da Física : uma análise dos paralelos entre a física moderna e o misticismo oriental. Ed. Cultrix, São Paulo.
- Kant, I. (2010) Crítica da Razão Pura. Tradução baseada no original alemão intitulado KRITIK DER REINEN VERNUNFT, Edição da Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- Kuhn, T.S. (1962) The Structure of Scientific Revolutions, University of Chicago Press, Chicago.
- Lakatos, I. (1999) The methodology of scientific research programmes, Philosophical Papers Volume I, Cambridge University Press, Paperback edition, Cambridge.

- Leite, K. (2010) *Metáfora e Matemática: A contingência em uma disciplina escolar considerada exata*. Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Educação da UFMG sob a orientação do Prof. Dr. Michael F. Otte, Cuiabá.
- Lester, F. (2010) *On the Theoretical, Conceptual, and Philosophical Foundations for Research in Mathematics Education*. In: *Theories of Mathematics Education*, Springer, p. 67-85.
- Lakoff, G. & Johnson, M. (1980) *Metaphors We Live By*. Chicago: University of Chicago Press.
- Otte, M. (2003) *Complementarity, Set and Nombres*. Educational Studies in Mathematics. Printed in the Netherlands: Kluwer Academic Publisher, 53: pp. 203-228 .
- Otte, M. F. (2008) *Metaphor and Contingency*. In: RADFORD, L.; SCHUBRING, G.; SEEGER, F. (Orgs.). *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture*. Rotterdam: Sense Publishers, pp. 63-82.
- Paulino, C; Turkman, M. & Murteira, B. (2003) *Estatística Bayesiana*, F. Calouste Gulbenkian.
- Popper, K. (1993) *A Lógica da Pesquisa Científica*, editora Cultrix, São Paulo-SP.
- \_\_\_\_\_ (2003) *Conjecturas e Refutações*, Tradução de Benedita Bettencourt. Coimbra: Livraria Almedina.
- Ragin, C. (2000) *Fuzzy-set social science*. Chicago: University of Chicago Press.
- Ross, A, & Onwuegbuzie, A. (2012) *Prevalence of Mixed Methods Research in Mathematics Education*. *The Mathematics Educator*, Vol. 22, No. 1, pp. 84–113.
- Schoner, B.(2000) *Probabilistic Characterization and Synthesis of Complex Driven Systems*. Doctor of Philosophy, MIT.
- Strauss , A. & Corbin, J. (2008) *Pesquisa qualitativa: Técnicas e procedimentos para o desenvolvimento de teoria fundamentada*. Tradução Luciane de Oliveira da Rocha. 2ª Ed. Artmed, Porto Alegre.
- Utsumi, M.; Cazorla, I; Vendramini, C. & Mendes, C.. (1999) *Questões metodológicas dos trabalhos de abordagem quantitativa apresentados no GT19-ANPED. Educação Matemática e Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduação em Educação Matemática/PUC-SP, São Paulo-SP*, pp.83-101.
- Viertl, R.(2011) *Statistical methods for fuzzy data*. John Wiley & Sons, New Delhi, India.
- Zadeh, L. A.(1965) *Fuzzy sets*. *Inf Control*, 8, pp.338-353.
- \_\_\_\_\_ (1968) *Probability measures and fuzzy events*. *J.Math. Anal Appl*, 23, pp.421-427.
- \_\_\_\_\_ (1995) *Discussion: Probability Theory and Fuzzy Logic Are Complementary Rather Than Competitive*. *Technometrics*, 37, pp.271–276.