

El método de Newton y estrategias de globalización para la resolución numérica de ecuaciones no lineales

Damián Fernández Ferreyra

Elvio A. Pilotta

Resumen.

En este trabajo se considera el método de Newton para la resolución numérica de ecuaciones no lineales y se estudian algunas estrategias de globalización basadas en el método de Bisección.

1 Introducción

Uno de los problemas que aparece más frecuentemente en matemática aplicada, física, ingeniería y en el trabajo científico en general es hallar las raíces (reales) de ecuaciones de la forma:

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

donde la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es conocida.

Generalmente, en problemas de la vida real los métodos analíticos no son suficientes para resolver la ecuación (1), por lo que se deben usar métodos numéricos, los cuales son iterativos. La aplicación de estos métodos numéricos para resolver problemas de este tipo debe realizarse con mucho cuidado. Es decir, no debería aplicarse un método numérico para encontrar una raíz sin tener, al menos, alguna información acerca de la existencia de la misma. Los problemas de existencia y unicidad de una raíz están mucho más allá de lo que un algoritmo computacional podría resolver.

Por ejemplo, es obvio que $x = 0$ es una raíz de $x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 60x = 0$, pero deducir las otras raíces ($x = 3, 4$, y 5) puede ser un poco más complicado. Más aún si consideramos la ecuación $x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 60x + 24 = 0$ cuyas raíces reales son $x = 1$ y $x \cong 0.888$. Por otro lado, la ecuación $x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 60x + 24.1 = 0$ no tiene raíces reales.

En la mayoría de los problemas no es posible encontrar soluciones exactas de la ecuación (1). En general, mediante algunos métodos numéricos podemos

obtener una *solución aproximada* \bar{x} . Esto quiere decir que (1) se satisface aproximadamente ($|f(\bar{x})| \cong 0$) o que \bar{x} está próximo a una raíz de (1).

En los cursos básicos de Análisis Numérico se estudian algunos métodos para resolver (1). Algunos de tales métodos son: método de Bisección (Bolzano), método de Regula Falsi (o de la falsa posición), método secante, método de Newton (o método de Newton-Raphson). Ver [1, 4, 6]. Los dos primeros métodos requieren para la convergencia de un intervalo inicial donde se sabe que la función (continua) f tiene una raíz. En cambio los dos últimos métodos requieren una aproximación inicial *suficientemente buena*, es decir suficientemente cerca de la raíz para encontrar una solución aproximada.

Como es usual usaremos la palabra *global*, como en *método global* o *algoritmo globalmente convergente* para denotar un método que está diseñado para converger a *alguna* solución de (1) a partir de *cualquier punto inicial*.

Una propiedad muy importante del método de Newton es que converge cuadráticamente si se comienza con una aproximación inicial "*suficientemente buena*", por eso se dice que tiene convergencia cuadrática local. Lamentablemente el método de Newton (al igual que el método secante) no es un método global. Por otro lado, métodos como Bisección y Regula Falsi convergen globalmente aunque más lentamente que el método de Newton.

En este trabajo veremos algunas estrategias simples para obtener métodos con buenas propiedades de convergencia (rápidos y globales) para resolver numéricamente sistemas de ecuaciones no lineales. Para mostrar la performance de uno de los algoritmos propuestos mostraremos algunos ejemplos numéricos y graficaremos las regiones de convergencia.

2 El método de Newton

La idea clave del método Newton consiste en reemplazar a la función $f(x)$ por un *modelo lineal local*, [1, 2, 4, 6] en cada iteración k . Esto es, dado x_k , consideramos

$$m_k(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k),$$

la aproximación lineal de $f(x)$ que pasa por $f(x_k)$. Así en lugar de intentar resolver $f(x) = 0$, consideramos $m_k(x) = 0$ cuya solución es

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

si $f'(x_k) \neq 0$. Ver Figura 1.

2.1 Iteración k método de Newton

Dados $x_0 \in \mathbb{R}$, $\text{TOL} > 0$, $k = 0$.

PASO 1. Criterio de Parada: si $|f(x_k)| < \text{TOL}$: PARAR!

PASO 2. calcular $z = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$.

PASO 3. definir $x_k \leftarrow z$, $k \leftarrow k + 1$. Volver al PASO 1.

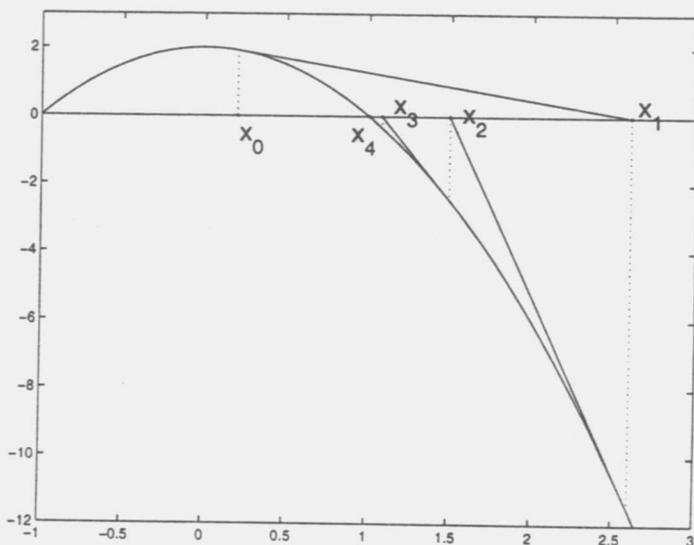


Fig. 1: Método de Newton.

Denotamos por $s_k = x_{k+1} - x_k = -f(x_k)/f'(x_k)$ al paso dado por el método de Newton en la iteración k .

Para probar la convergencia del método de Newton se requieren algunas hipótesis de regularidad sobre la función f .

Teorema 1 Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, donde D es un intervalo abierto, y f dos veces continuamente diferenciable en D . Supongamos que $|f'(x)| \geq \rho$ para todo $x \in D$, para algún $\rho > 0$. Si $x_* \in D$ es una solución de $f(x) = 0$ entonces existe $\eta > 0$ tal que si $|x_0 - x_*| < \eta$, la sucesión $\{x_k\}$ generada por

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

está bien definida y converge a x_* . Además existe $c > 0$ tal que

$$|x_{k+1} - x_*| \leq c|x_k - x_*|^2 \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Una demostración de este teorema puede verse en [2]. En el libro de Dennis y Schnabel usan una hipótesis levemente más débil sobre la función f (derivada Lipschitz continua) obteniendo el mismo resultado. La condición sobre la derivada f' simplemente quiere decir que $f'(x_*)$ debe ser no nulo, lo cual es fundamental para obtener convergencia cuadrática. En efecto, si $f'(x_*) = 0$ entonces x_* es una raíz doble y se puede ver fácilmente que el método de Newton converge linealmente. Ver [1, 2, 6].

Este teorema asegura la convergencia del método de Newton sólo a partir de una buena aproximación inicial x_0 . Veremos con algunos ejemplos sencillos que el método puede no converger si $|x_0 - x_*|$ es *grande* o, más claramente, cuando x_0 no está suficientemente próximo a x_* .

3 Método de Bisección

El método global más simple para encontrar una raíz de una función no lineal (caso unidimensional) es el método de Bisección. Se comienza con un intervalo $[a, b]$ donde $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos distintos. Por el conocido Teorema de Bolzano-Weierstrass para funciones continuas sabemos que existe algún x_* entre a y b donde $f(x_*) = 0$. La idea del método consiste en subdividir el intervalo en dos partes iguales y mantener aquel subintervalo donde f tiene signos distintos en sus extremos. Es decir, definimos el punto medio $c = (a + b)/2$ y así tenemos tres posibilidades:

1. Si $f(a)$ y $f(c)$ tienen signos opuestos, entonces hay una raíz en $[a, c]$.
2. Si $f(c)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces hay una raíz en $[c, b]$.
3. Si $f(c) = 0$, entonces c es una raíz de f .

El caso (3), en general, no ocurre en la práctica. Sin embargo, decimos que c es una raíz aproximada de $f(x) = 0$ si $|f(c)|$ es suficientemente pequeño. Los casos (1) y (2) implican que hemos encontrado un nuevo intervalo de la mitad de tamaño del anterior donde se localiza una raíz.

En cada iteración repetimos este procedimiento obteniendo intervalos cada vez de menor tamaño que contienen a la raíz.

3.1 Algoritmo del método de bisección

Dados $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tales que $a_0 < b_0$ y $f(a_0)f(b_0) < 0$, $TOL > 0, k = 0$.

PASO 1. Criterio de Parada: si $|b_k - a_k| < TOL$, PARAR!

PASO 2. calcular $c_k = (a_k + b_k)/2$.

PASO 3. Si $f(a_k)f(c_k) < 0$, definir $b_k \leftarrow c_k$.

Si $f(c_k)f(b_k) < 0$, definir $a_k \leftarrow c_k$.

PASO 4. definir $k \leftarrow k + 1$. volver al PASO 1.

Es claro que con este método, y con suficiente esfuerzo, siempre podemos localizar una solución de (1) con cualquier exactitud deseada con este método. El principal inconveniente de este método es que su convergencia puede ser demasiado lenta.

Para el caso n -dimensional con $n > 1$ existen algunas generalizaciones del Teorema de Bolzano-Weierstrass como el Teorema de Miranda [7]. Lamentablemente los métodos e implementaciones basados en estrategias intervalares no han sido muy exitosos en la práctica en problemas de dimensión mayor que 1.

4 Estrategias de globalización

Para obtener un método que sea globalmente convergente y a la vez *eficiente* sería conveniente aprovechar las buenas propiedades de convergencia local del método de Newton junto con las buenas propiedades de convergencia global del método de bisección.

Un primer algoritmo podría consistir en aplicar el método de Bisección hasta obtener un intervalo suficientemente pequeño de manera tal de *alcanzar* la región donde el método de Newton tiene convergencia local, y a partir de allí aplicar el método de Newton. La dificultad de esta estrategia es que, precisamente, la región donde el método de Newton converge localmente es desconocida, y por lo tanto no se puede predecir cuantas iteraciones del método de Bisección serán suficientes. Si se hacen pocas iteraciones del método de Bisección puede ocurrir que el método de Newton no converja. Por el contrario, si se hacen demasiadas iteraciones inicialmente la convergencia podría ser muy lenta y no se aprovecharía la convergencia cuadrática del método de Newton.

Otra estrategia, basada también en los métodos de Newton y bisección, se basa en usar el método de Newton siempre que sea posible, es decir, siempre que algún indicador de performance indique que es conveniente, y en caso contrario, usar un método más lento, como el de bisección, pero que asegure convergencia global. Esta idea produce un algoritmo híbrido globalmente convergente con la ventaja de la rápida velocidad de convergencia local del método de Newton.

Para decidir si es conveniente aceptar la aproximación dada por el método de Newton o si se debe usar un método global observemos lo siguiente. Aunque el paso de Newton $s_k = x_{k+1} - x_k$ podría, eventualmente, producir un aumento en el valor absoluto de la función: $|f(x_k + s_k)| > |f(x_k)|$, siempre es posible asegurar que $|f(x)|$ decrece inicialmente en la dirección dada por s_k . Es decir, existe $\lambda \in (0, 1]$ tal que $|f(x_k + \lambda s_k)| < |f(x_k)|$, (condición de descenso simple). Ver Figura 2. De esta manera, si la nueva aproximación de Newton x_{k+1} no produce un descenso en $|f(x)|$, una estrategia razonable es elegir una nueva aproximación x_+ en la dirección que une x_k y la aproximación *rechazada* x_{k+1}

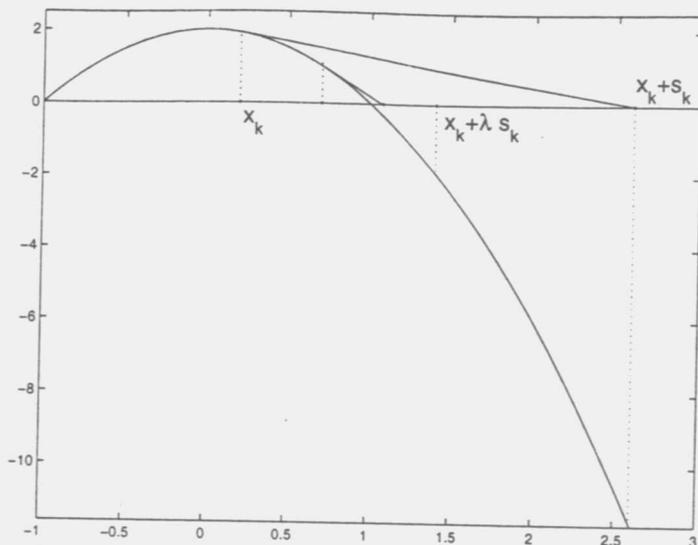


Fig. 2: Método híbrido Newton-Bisección.

de modo que $|f(x_+)| < |f(x_k)|$. Una forma sencilla y natural de definir x_+ es

$$x_+ = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}.$$

Si este x_+ no produce un descenso en $|f(x)|$ con respecto a x_k se repite este procedimiento hasta que se satisfaga la condición de descenso simple.

Basados en esta idea presentamos el siguiente algoritmo.

4.1 Algoritmo híbrido Newton-bisección

Dados $x_0 \in \mathbb{R}$, $TOL > 0$, $k = 0$.

PASO 1. Criterio de Parada: si $|f(x_k)| < TOL$: PARAR!

PASO 2. calcular $x_+ = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$.

PASO 3. Estrategia global: mientras $|f(x_+)| \geq |f(x_k)|$
definir $x_+ \leftarrow \frac{x_k + x_+}{2}$.

PASO 4. definir $x_k = x_+$, $k \leftarrow k + 1$, y volver al PASO 1.

Notemos que este algoritmo no requiere un intervalo inicial donde se localiza una solución de (1) como en el método de bisección. Otra ventaja atractiva de este algoritmo híbrido es que puede generalizarse fácilmente a dimensiones mayores que 1.

5 Regiones de convergencia

Para cada solución z_i de la ecuación o sistema no lineal (y para cada método iterativo) existe una región del dominio de la función asociada a z_i donde al comenzar con un punto inicial en esta región la sucesión generada por el método iterativo converge a z_i . Esta región es llamada *región de convergencia*. Notemos que la región de convergencia para cada solución z_i depende del método iterativo utilizado.

Para analizar la convergencia de los algoritmos, y para una mejor visualización, resulta interesante graficar las regiones de convergencia de los mismos para cada raíz para una función dada.

Suponiendo conocidas las soluciones z_1, z_2, \dots, z_r del sistema (o ecuación) no lineal, para obtener las regiones de convergencia consideramos un rectángulo ($n = 2$) o un intervalo ($n = 1$) suficientemente grande que contiene a las raíces. Realizamos una discretización de ese rectángulo o intervalo y utilizamos cada punto de esa discretización como punto inicial del algoritmo. Si ese punto converge a la solución z_j le asociamos un color C_j , en caso contrario le asociamos el color negro (diferente a C_1, C_2, \dots, C_r).

En el caso unidimensional las regiones de convergencia de cada raíz serán intervalos o unión de intervalos. En el caso bidimensional las regiones de convergencia serán regiones del plano.

La idea de analizar las regiones de convergencia fue propuesta inicialmente por Julia y Fatou a comienzos del siglo XX para estudiar algunas propiedades de métodos iterativos tales como el método de Newton. Ellos observaron que en el caso bidimensional las fronteras entre las regiones de convergencia eran extremadamente complicadas. Posteriormente, Mandelbrot, en la década del 60

continuó estos estudios de estas regiones y definió la noción de conjunto fractal. Ver [5, 9].

6 Ejemplos numéricos

Para estudiar la performance del algoritmo híbrido en comparación con el método de Newton clásico realizamos una implementación en MATLAB de ambos métodos, utilizando $TOL = 10^{-6}$ para el criterio de parada. Para ambas implementaciones consideramos ejemplos de dimensión uno y dos y graficamos las correspondientes regiones de convergencia para los dos métodos.

En las Tablas 1 y 2 comparamos los dos métodos usando diferentes puntos iniciales. En ellas se indican la solución de la ecuación, y mostramos el número de iteraciones de Newton (externas) para ambos algoritmos, en caso de convergencia a esa solución, y el número de iteraciones del método de bisección (internas) en el algoritmo híbrido.

Ejemplos unidimensionales.

Consideramos las funciones: $f_1(x) = \arctan(x)$ y $f_2(x) = \frac{x}{2} + \sin(\cos(x^2)) + 0.2$.

La función f_1 tiene una única raíz en $x_* = 0$. Además, tiene la particularidad que para $\sigma \cong 1.3917452$, el algoritmo de Newton diverge si $x_0 \notin [-\sigma, \sigma]$, oscila tomando valores σ y $-\sigma$ si $x_0 \in \{-\sigma, \sigma\}$ y converge si $x_0 \in (-\sigma, \sigma)$. Ver Figura 3. Por otro lado, la función f_2 tiene una única raíz en $x_* \cong -1.0982$

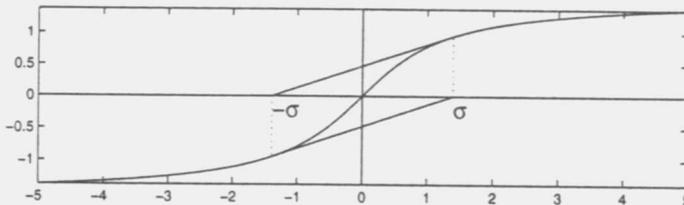


Fig. 3: Función $f_1(x) = \arctan(x)$

pero posee muchos puntos críticos, lo cual dificulta la convergencia del método de Newton pues allí $f'(x) = 0$. Ver Figura 4.

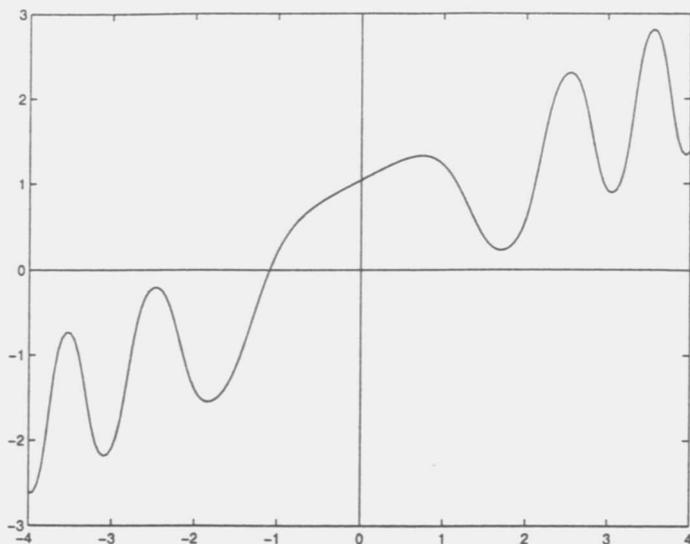


Fig. 4: Función $f_2(x) = \frac{x}{2} + \text{sen}(\cos(x^2)) + 0.2$

f	x_*	Pto. inicial	Newton	Alg. híbrido	
				Newton	Bisección
f_1	0.0	1.3917	14	14	0,0,...,0,0
		1.3918	diverge	2	1,0
		10.0	diverge	11	3,3,2,2,0, ... ,0
f_2	-1.0982	0.5354	20	8	0,0,1,8,1,0,0,0
		1.1	90	15	0,0,2,13,19,22,23,24, 27,30,32,13,0,0,0
		2.0	diverge	9	0,1,2,14,15,5,0,0,0

Tabla 1. Ejemplos unidimensionales.

Observemos la Tabla 1. Para la función f_1 y para el primer punto inicial (1.3917) ambos métodos convergen, mas aún, el método híbrido nunca reduce el paso obtenido por el método de Newton clásico. En cambio, para los otros

dos puntos iniciales vemos que la sucesión generada por el método de Newton diverge pero la del método híbrido converge. Además, para el tercer punto inicial, el método híbrido sólo debe reducir el paso en las primeras cuatro iteraciones. Para la función f_2 , vemos que el método de Newton debe realizar más iteraciones que el método híbrido y para el punto inicial 2.0 el método de Newton no converge.

En los próximos gráficos se muestran las regiones de convergencia para ambos ejemplos en el intervalo $[-4, 4]$. En color gris claro se indica la región de convergencia a la correspondiente solución de la ecuación y en color negro la región de no convergencia.

Ejemplo 1

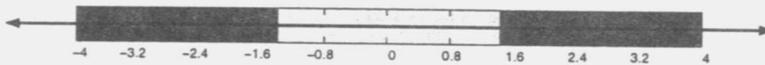


Fig. 5: Método de Newton aplicado a f_1

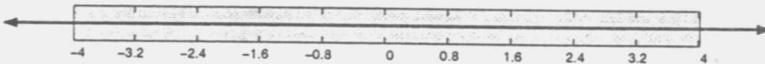


Fig. 6: Método híbrido Newton-Bisección aplicado a f_1

Ejemplo 2



Fig. 7: Método de Newton aplicado a f_2



Fig. 8: Método híbrido Newton-Bisección aplicado a f_2

Comparando las Figuras 5-6 y 7-8 se puede ver claramente que, para ambas funciones, la región de convergencia del método híbrido es mayor que la del método de Newton sin estrategias de globalización.

Ejemplos bidimensionales.

Para el caso bidimensional consideramos las funciones de variable compleja $F_1(z) = z^4 - 1$ y $F_2(z) = \text{sen}(z) - \pi$.

Tomando $z = x + iy$, se obtiene

$$(x + iy)^4 - 1 = (x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - 1) + i(4x^3y - 4xy^3),$$

y así podemos pensar $F_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$F_1(x, y) = (x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - 1, x^3y - 4xy^3).$$

Las soluciones de $F_1(x, y) = (0, 0)$ son: $(x_1, y_1) = (1.0, 0.0)$, $(x_2, y_2) = (0.0, 1.0)$, $(x_3, y_3) = (-1.0, 0.0)$ y $(x_4, y_4) = (0, -1.0)$.

Análogamente podemos pensar $F_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, escribiendo $z = x + iy$ usando las siguientes identidades:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \text{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

de las cuales se deduce que: $\cos(ix) = \cosh(x)$ y $\text{sen}(ix) = i\text{senh}(x)$.

Utilizando la regla del seno de una suma, se puede ver que

$$\begin{aligned} \text{sen}(x + iy) - \pi &= \text{sen}(x) \cos(iy) + \cos(x) \text{sen}(iy) - \pi \\ &= \text{sen}(x) \cosh(y) - \pi + i \cos(x) \text{senh}(y) \end{aligned}$$

entonces escribimos

$$F_2(x, y) = (\text{sen}(x) \cosh(y) - \pi, \cos(x) \text{senh}(y)),$$

y consideramos la ecuación $F_2(x, y) = (0, 0)$.

Como este sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones en el plano vamos a restringirnos al $[-4, 4] \times [-4, 4]$ donde tiene cuatro raíces, cuyos valores aproximados son: $(x_1, y_1) \cong (1.5708, 1.8115)$, $(x_2, y_2) \cong (1.5708, -1.8115)$, $(x_3, y_3) \cong (-4.7124, 1.8115)$ y $(x_4, y_4) \cong (-4.7124, -1.8115)$.

F	(x_*, y_*)	Pto. inicial	Newton	Alg. híbrido	
				Newton	Bisección
F_1	(1,0)	(-3.44,3.5)	29	14	0,0,0,0,0,1 9,4,2,1,0,0,0
	(0,1)	(0.3,-0.2)	11	5	2,0,0,0,0
	(-1,0)	(2.2,2.25)	23	10	0,0,0,0,0,6,1,0,0,0
	(0,-1)	(0.3,0.25)	11	7	2,1,0,0,0,0,0
F_2	(1.5708,1.8115)	(0.01,0.01)	diverge	8	1,9,1,0,0,0,0,0
		(3.899,-2.45)	15	7	0,0,2,0,0,0,0
	(1.5708,-1.8115)	(-1.26,3.85)	16	9	0,0,0,0,2,0,0,0,0
	(-4.7124,1.8115)	(-3.1,0.725)	14	10	0,1,2,3,0, . . . ,0
	(-4.7124,-1.8115)	(-1.6,0.86)	15	8	2,5,3,0,0,0,0,0

Tabla 2. Ejemplos bidimensionales.

En la Tabla 2 podemos ver que el método híbrido siempre requirió menos iteraciones externas que el método de Newton clásico. Si bien el método híbrido necesitó algunas iteraciones de bisección, éstas son menos costosas computacionalmente. Además, con el método de Newton no se obtuvo convergencia a la solución correspondiente para uno de los puntos iniciales considerados. A continuación mostramos las regiones de convergencia para ambas funciones y para ambos métodos. La región de no convergencia está indicada en negro y los otros tonos de grises y blanco corresponden a las cuatro raíces.

Al igual que en el caso unidimensional, comparando las Figuras 9–10 y 11–12 se puede ver claramente que, para ambas funciones, la región de convergencia del algoritmo híbrido es mayor que la del método de Newton sin estrategias de globalización.

Ejemplo 3

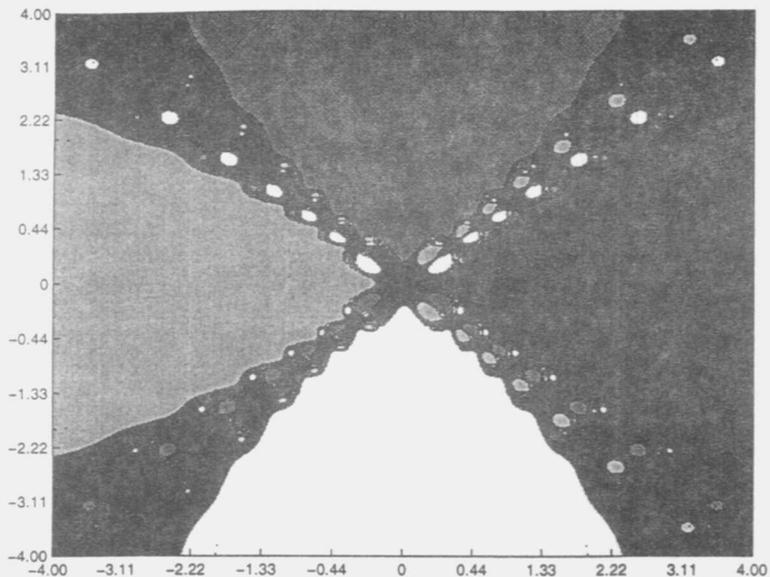


Fig. 9: Método de Newton aplicado a F_1

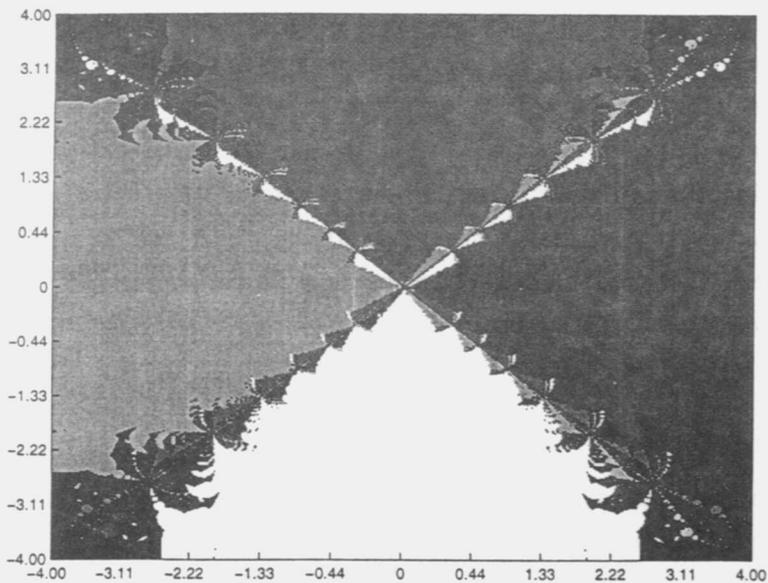


Fig. 10: Método híbrido Newton-Bisección aplicado a F_1

Ejemplo 4

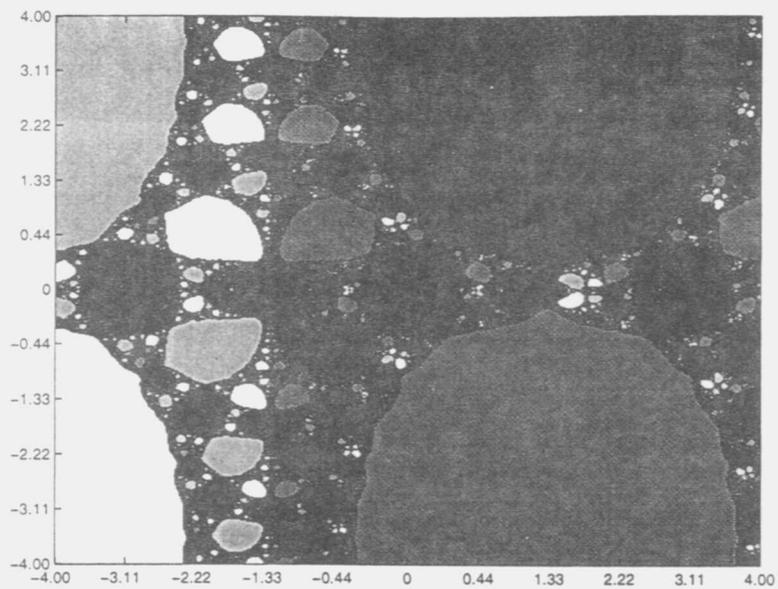


Fig. 11: Método de Newton aplicado a F_2

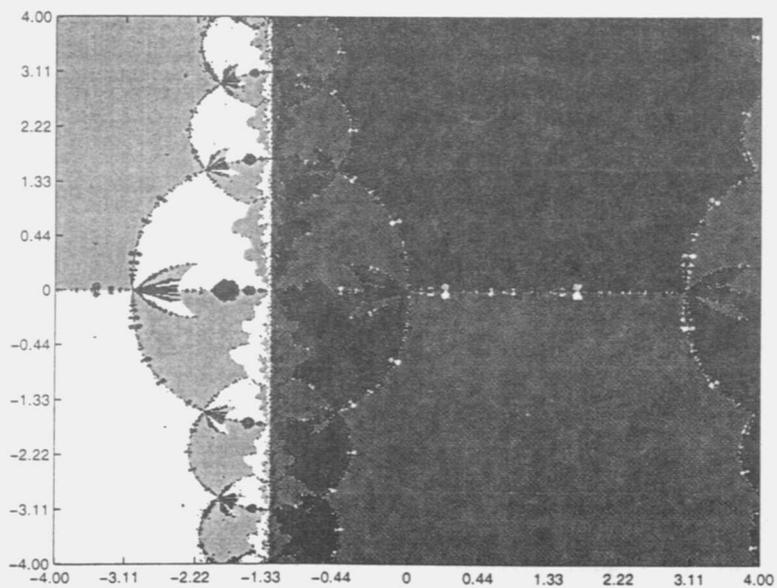


Fig. 12: Método híbrido Newton-Bisección aplicado a F_2

7 Conclusiones

Históricamente el método de Newton ha mostrado ser localmente muy eficiente en la práctica. Sin embargo, cuando no se dispone de información adicional acerca de la región de convergencia las estrategias de globalización proporcionan una técnica de fácil implementación y permiten lograr convergencia para un conjunto mucho mayor de puntos iniciales.

Los ejemplos numéricos que vimos parecen indicar que el algoritmo híbrido Newton-bisección aquí utilizado ha mostrado ser más robusto y eficiente que el método de Newton. Existen otras estrategias de globalización similares que se usan frecuentemente, en combinación con el método de Newton, en algoritmos de optimización como la condición de Armijo [4, 8] o estrategias de descenso no monótono [3].

Por otro lado, la representación gráfica de las regiones de convergencia es una herramienta de gran utilidad para el estudio de algunas propiedades de diferentes algoritmos. Tanto en el caso unidimensional como en el bidimensional ha permitido visualizar las ventajas del algoritmo híbrido Newton-bisección frente al método de Newton.

Bibliografía

- [1] Conte, S. D. y de Boor, C., (1981), *Análisis numérico elemental*, segunda edición.
- [2] Dennis, J. and Schnabel, R., (1983), *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*, Prentice-Hall.
- [3] Grippo, L., Lampariello, F. and Lucidi, S. (1986), *A nonmontone line search technique for Newton's method*, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 23, N. 4, pp. 707-716.
- [4] Kelley, C. (1995), *Iterative methods for linear and nonlinear equations*, SIAM.

- [5] Mandelbrot, B. (1982), *The fractal geometry of Nature*, Freeman and Co.
- [6] Mathews, J. and Fink. K. (1999), *Métodos numéricos con MATLAB*, Prentice-Hall.
- [7] Moore, R. and Kioustelidis, J. (1980), *A simple test for accuracy of approximate solutions to nonlinear (or linear) systems*, SIAM J. Numer. Anal. Vol. 17, N. 4, pp. 521-529.
- [8] Nocedal, J. and Wright. S. (1999), *Numerical Optimization*, Springer Verlag.
- [9] Tunes dos Santos, L. (1993), *Sistemas não lineares e fractais*, Matemática Universitaria N. 15, pp. 102-116.

Damián R. Fernández Ferreyra
FaMAF
Universidad Nacional de Córdoba
Córdoba (5000)
E-mail: fernferr@mate.uncor.edu

Elvio A. Pilotta
CIEM-FaMAF
Universidad Nacional de Córdoba
Córdoba (5000)
E-mail: pilotta@mate.uncor.edu