Una propuesta centrada en lo procedimental para el tratamiento de la geometría euclídea en la formación de profesores

Cristina Ferraris *Virginia Montoro*

Introducción

De los múltiples roles que el docente de matemática puede desempeñar en la escuela, consideramos como de fundamental importancia el de facilitar el aprendizaje de los procedimientos propios del quehacer matemático. En este sentido acordamos en el énfasis que las actuales tendencias en educación matemática ponen en la incorporación en la currícula escolar de contenidos procedimentales y actitudinales, además de los conceptuales.

La historia del propio aprendizaje de un docente influye, de alguna manera, en su desempeño en el aula. Del mismo modo el cuerpo teórico o red conceptual del profesor se verá reflejado en el enfoque que éste elija para sus clases. Por eso consideramos muy importante en la formación de profesores de matemática, profundizar en los procedimientos del *método* matemático y favorecer la construcción de un marco teórico sólido y consistente.

En particular, un conocimiento detallado de la Geometría que incluya la evolución histórica de la Matemática, la génesis de los conceptos y procedimientos geométricos, le permitirá al docente interpretar los conceptos que la fundamentan, analizar qué pudo haber motivado el enunciado de cierta axiomática, elegir el camino más adecuado para una construcción, para una demostración, etc.

La Geometría Euclídea ha acompañado por siglos la evolución del pensamiento y también la expresión artística de la humanidad. También aporta abundante material en lo que a problemas matemáticos se refiere, muchos de ellos de larga trayectoria histórica, da lugar al desarrollo de la creatividad, a la organización de estrategias de resolución, propiciando el trabajo de contenidos procedimentales propios del quehacer matemático. Estos son algunos de los motivos que sugieren la necesidad del aprendizaje de la misma en la escuela.

A pesar de ello encontramos que frecuentemente, tanto en la escuela como en la formación de profesores, esta Geometría, en la práctica, se ve relegada. Tanto es así, que un breve relevamiento acerca de los planes de estudios vigentes en nuestro país nos muestra que la Geometría Métrica o Euclídea se dicta sólo en algunos pocos Profesorados y no en las Licenciaturas de Matemática, aún cuando en ellas se forman los especialistas que establecerán luego los criterios para los Contenidos Básicos Comunes para la formación matemática de nivel medio.

Tomando en cuenta que la Geometría presentada por Euclides 24 siglos atrás, sigue vigente en nuestro entorno cotidiano y que la organización axiomática de Hilbert la liga fuertemente al Algebra, y desde allí, la integra al quehacer matemático todo, es que pensamos que en los profesorados debe trabajarse la Geometría Euclídea desde una perspectiva integradora e integrada en una coherencia teórica que capitalice los aspectos mencionados.

Una visión integradora y un marco teórico sólido de la Geometría, permitirá al docente manejarse con soltura en un amplio campo, tanto conceptual como procedimental, dándole mayores posibilidades de crear un ambiente propicio para el quehacer matemático y para desarrollar una amplia y flexible temática geométrica. De este modo la Geometría será mostrada como una expresión dinámica y creativa, nunca acabada, de la Matemática.

Es sabido, además de las óptimas posibilidades que brinda la Geometría para trabajar en contacto con otras materias escolares. Las aplicaciones en el arte, las artesanías y las diferentes profesiones que utilizan relaciones espaciales y otras temáticas geométricas, permiten mostrar un aspecto de esta disciplina no solo atractivo, sino también muy apropiado para trabajarla en el aula.

Es frecuente, sin embargo, que se la relacione principalmente con la Física, pasando rápidamente a la medida, que conlleva al trabajo aritmético de operaciones en distintos sistemas (valioso en sí mismo dentro de la Matemática en general, pero que deja de ser geométrico), o se la centre en el desarrollo de habilidades manuales con los respectivos instrumentos, las cuales consideramos muy deseable, siempre que se recuerde que no es tarea netamente geométrica.

Nuestra propuesta

Desde el Grupo EDUMAT y en base a la organización de las cátedras del Profesorado a cargo de algunas integrantes del mismo, nos hemos ocupado por más de 15 años, de la problemática que plantea la enseñanza de la geometría en la escuela.

De esta manera se armaron los programas de estudio de las asignaturas correspondientes, desarrollando los temas de Geometría Euclídea en forma axiomática a través de tres grandes núcleos: axiomas de incidencia y ordenación;

axiomas de congruencia y paralelismo; y axioma de continuidad. Las congruencias se trabajan como funciones y desde la teoría de grupos.

Debido al enfoque que proponemos, la materia Geometría Métrica fue pensada para cursar después de una introducción a un curso de Algebra que incluya nociones de la estructura de grupo y preferiblemente, en un año avanzado de la carrera, dado que se pretende hacer uso de las grandes posibilidades que brinda la Geometría para analizar cuestiones referidas al método matemático, aprovechando su riqueza en contenidos procedimentales como son el análisis de los tipos de demostración, estrategias de demostración, relaciones entre distintas temáticas propias o de la disciplina en general, discusión de definiciones, etc.

Desde este enfoque, la Geometría Métrica está relacionada horizontalmente con asignaturas tales como Estructuras Algebraicas y Geometría Analítica. En la primera se trabajan ejemplos geométricos de grupos de transformaciones y en la segunda se estudian temas en común pero con distinta presentación axiomática.

La modalidad de trabajo que consideramos en la cátedra es realizar una introducción teórica de los temas a tratar, con participación de los alumnos en algunas discusiones, sobre temas de interés: definiciones, orden de los conceptos tratados, axiomas, etc. Esto nos permite el trabajo de los contenidos conceptuales junto con los procedimentales. Luego se dedica otra parte a la resolución de problemas, que incluyen problemas históricos, demostraciones, etc.

Para la resolución de problemas se estimula el tratamiento grupal de las tareas, a fin de fomentar el intercambio de propuestas, estrategias, conocimientos previos, que permite la explicitación de los contenidos procedimentales utilizados.

Los **contenidos conceptuales** son, por supuesto, los que trabajó Euclides y, como dijimos, los agrupamos atendiendo a la axiomática de Hilbert en tres grandes núcleos:

Axiomas de incidencia y ordenación, que permiten situarse en el conjunto a trabajar (plano o espacio), sus elementos (puntos) y subconjuntos propios destacados (rectas y, si corresponde, planos), cuya definición se va completando a través de la axiomática.

Axiomas de congruencia y paralelismo, que hacen referencia a las transformaciones rígidas o isometrías que caracterizan a la Geometría Euclídea. Es conveniente aclarar que el axioma de paralelismo debe referirse solamente a *unicidad* ya que la existencia la provee la axiomática de congruencia, por ejemplo, a través de la simetría central o la traslación.

Axioma de continuidad, que trae aparejado no sólo la temática referida a la medida, sino también la discusión de temas íntimamente ligados a la continuidad como es el infinito y la completitud. Este axioma se explicita recién a fines del siglo XIX y, de acuerdo a Poincaré (1948), por expreso pedido del matemático Sophus Lie[1], quien advierte que se lo viene usando de manera implícita (sobre todo desde la época de Descartes), y de manera más velada, desde Euclides[2], por ejemplo cuando admite que dos circunferencias del mismo radio y centro en cada extremo del mismo, se intersectan.

Los **contenidos procedimentales**, además de lo ya considerado referido al método matemático, atienden a:

- **tratar el concepto ángulo**, como también el de **suma y orden** de los mismos, desde una postura geométrica. (FERRARIS, C. 1997).

- **considerar la estructura de grupo** que subyace en el conjunto de transformaciones rígidas con la composición.

- **clasificar las transformaciones rígidas** en cuanto a la orientación y la existencia de puntos fijos.

- **trabajar el axioma de continuidad** y su consecuencia inmediata que permite acceder a la **medida**, justificando teoremas referidos a longitudes, superficies y volúmenes. (FERRARIS, C. y M. Ferrero 1999)

Somos conscientes que para llevar adelante esta propuesta se presenta la necesidad de contar con bibliografía adecuada. Para la formación de Profesores, en nuestro país encontramos los libros "El Plano", de J. A. Tirao y "ESPACIO – Geometría Métrica" de C. Ferraris, aunque no existen aun, libros para nivel medio con el enfoque que proponemos.

Contenidos de las asignaturas Geometría Euclídea del Plano y del Espacio correspondientes al profesorado de matemática del CRUB – UNC.

---

[1] "Sophus Lie es quien más ha contribuido a la aplicación de la teoría de grupos continuos a la geometría, declarando la necesidad de un nuevo axioma que enuncia que el espacio es una *Zahlenmannigfaltigkeit*; es decir, que a todo punto de una línea recta corresponde un número, y *viceversa*". (POINCARE, E.,1948).

[2] "Si analizamos cuidadosamente sus demostraciones (de Euclides), hallaremos, bajo una forma más o menos velada, cierto número de hipótesis que son, en realidad, axiomas disfrazados; y pudiéramos decir lo mismo de algunas de sus definiciones." (POINCARÉ, H. 1948).

GEOMETRÍA EUCLÍDEA DEL PLANO

I - Introducción histórica sobre axiomática; breve mención de los Elementos de Euclides, de "los conceptos elementales" y de nuestros preconceptos acerca de los mismos. Axiomas de incidencia y ordenación.

II - Definición de conjuntos convexos. Semiplanos. Angulos, sector angular, interior de un ángulo, ángulos opuestos por el vértice, ángulos adyacentes. Propiedades. Angulo suma de otros dos. Polígono convexo y región poligonal. Interior de un polígono convexo. Propiedades.

III - Nociones básicas de transformaciones rígidas del plano: comparación con los movimientos de la física. Axiomas de rigidez. Grupo de transformaciones rígidas. Transformaciones rígidas que preservan o no la orientación. La simetría central: definición y propiedades. La simetría axial: definición y propiedades.

IV - La traslaciones: definición y propiedades. Las rotaciones: definición y propiedades. Las reflexiones deslizantes: definición y propiedades. Caracterización de las transformaciones rígidas por sus propiedades específicas: centro, eje, par ordenado de puntos, centro y ángulo orientado, eje y par ordenado de puntos. Composición de ciertos pares transformaciones rígidas. Clasificación de las transformaciones rígidas según tengan o no puntos fijos, preserven o no la orientación.

V - Angulos determinados por dos rectas y una secante a ambas. Propiedades. Segmento suma de otros dos. Congruencia de triángulos. Criterios de congruencia de triángulos; demostración y aplicaciones.

VI - Cuadriláteros: definición y propiedades. División de un segmento en "n" partes congruentes. Medianas de un cuadrilátero. Propiedad de las mismas. Definición inductiva de medianas de un polígono convexo. Propiedad de las mismas.

VII - Definición de circunferencia y unicidad de la circunferencia determinada por tres puntos no alineados. Axioma de continuidad. Definición de distancia entre dos puntos y de un punto a una recta. Propiedad triangular. Relación entre las longitudes de un segmento respecto a dos segmentos unitarios distintos. Teorema de Thales y corolario. Polígono inscripto y circunscripto a una circunferencia. Longitud de la circunferencia. Propiedades métricas de los polígonos regulares.

VIII - Definición de homotecia. Algunas demostraciones. Definición de semejanza. Criterios de semejanza de triángulos: demostración. Teorema de Pitágoras y recíproco del mismo.

IX - Definición de región poligonal. Región poligonal suma de otras. Triangulación de una región poligonal. Teorema de existencia de la función área. Area de un rectángulo, de un paralelogramo, de un triángulo, de un trapecio, de un polígono regular. Area del círculo.

GEOMETRÍA EUCLÍDEA DEL ESPACIO

I - Introducción. Axiomas de enlace y ordenación. Conjunto convexo. Rectas secantes y no secantes. Recta y plano secantes. Recta paralela a un plano. Planos secantes y planos paralelos. Propiedades.

II - Angulos en el espacio. Diedro: interior y sector angular. Triedro y ángulo poliédrico: interior y sector angular. Poliedros convexos: interior y cuerpo poliédrico. Teorema de Jordan. Poliedros simples. Teorema de Euler. Poliedro euleriano. Poliedros regulares.

III - Orientación en el espacio. Ordenación de un haz de semirrectas en un plano y orientación inducida en el mismo. Ordenación de un haz de semiplanos en el espacio y orientación inducida en el mismo. Las dos orientaciones posibles y reglas utilizadas para distinguirlas (en el plano y en el espacio). Orientación de un diedro y de un ángulo poliédrico. Orientación de un poliedro convexo.

IV - Transformaciones rígidas en el espacio. Axiomas de rigidez. Grupo de transformaciones rígidas. Congruencia. Rectas perpendiculares. Plano de mediatrices. Plano perpendicular a una recta. Rectas perpendiculares alabeadas. Planos perpendiculares. Punto medio de un segmento. Sección recta de un diedro: propiedad referida a las secciones rectas. Semiplano bisector. Definiciones de algunos cuerpos especiales.

V - Simetrías en el espacio. Simetría axial. Propiedades. Simetría central. Propiedades. Simetría especular. Propiedades. Estudio de las restricciones de las distintas simetrías a los planos dobles. Eje, centro y plano de simetría de subconjuntos de E.

VI - Traslaciones en el espacio. Propiedades. Conjunto de traslaciones como subgrupo abeliano (con la composición) del grupo $(\tau(E),\circ)$. Propiedades. Estudio de las restricciones de las traslaciones a los planos dobles.

VII - Rotaciones en el espacio. Propiedades. Estudio de las restricciones de una rotación a los planos dobles. Un teorema del plano referido a rotaciones. Teorema del punto fijo. Producto de rotaciones con traslaciones y simetrías.

VIII - Clasificación de las transformaciones rígidas en E. Reflexión deslizante y reflexión rotada (o rotorreflexión). Propiedades. Distintas composiciones de las transformaciones rígidas estudiadas. Clasificación y caracterización de las transformaciones rígidas.

IX - Axioma de continuidad. Longitud de un segmento. Teorema que identifica todas las aplicaciones que preservan longitudes. Areas de figuras planas. Area de la esfera. Volumen. Volumen de prismas, pirámides, cilindros y conos. Volumen de la esfera.

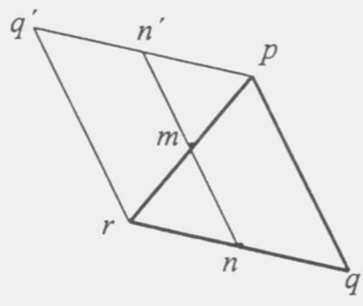
Ejemplo de algunos problemas trabajados en esta propuesta

Nota: las resoluciones de estos problemas se realizan justificando cada afirmación en demostraciones anteriores o axiomas.

Acompañamos algunos de los ejemplos de una de las posibles resoluciones. Se pueden encontrar otras resoluciones en FERRARIS, C. y colaboradores (2002).

1) Probar, utilizando transformaciones rígidas, la propiedad de la base media de un triángulo: *El segmento que une los puntos medios de 2 de los lados de un triángulo (base media) es paralelo al tercer lado y congruente a su mitad.*

Consideremos en el triángulo $\overset{\triangle}{rpq}$ los puntos medios m y n de los lados $\overline{rp}$ y $\overline{rq}$ respectivamente, o sea, el segmento $\overline{nm}$ base media del triángulo respecto del lado $\overline{pq}$, y la simetría central S_m.



Por propiedades de la simetría central, teniendo en cuenta que $r = S_m(p)$ y $q' = S_m(q)$, y llamando n' a $S_m(n)$, resulta:

$$n' \in \overleftrightarrow{mn} \text{ (o sea, } m, n \text{ y } n' \text{ están alineados)}$$

$$\overline{nm} \equiv \overline{mn'}$$

$$\overline{nr} \equiv \overline{n'p} \quad ^{(1)}$$

$$\overleftrightarrow{pq'} = \mathrm{S}_m(\overleftrightarrow{rq}) \parallel \overleftrightarrow{rq} \quad ^{(2)}$$

Además n es punto medio de $\overline{pq'}$ por lo que

$$\overline{nr} \equiv \overline{nq} \quad ^{(3)}$$

$^{(1)}$, $^{(2)}$ y $^{(3)}$ aseguran que

$$\overline{nq} \equiv \overline{n'p} \text{ y } \overline{nq} \parallel \overline{n'p}$$

Entonces $\overset{\lozenge}{nn'pq}$ es un paralelogramo y

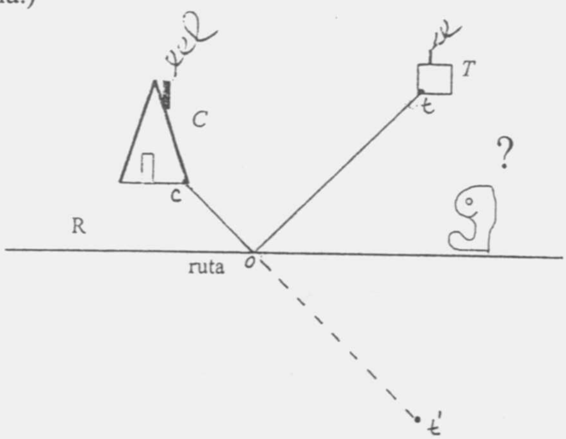
$$\overline{nn'} \equiv \overline{qp} \text{ y } \overline{nn'} \parallel \overline{qp}$$

Por último, como m es punto medio de $\overline{nn'}$, resulta la tesis, esto es,

$$\overline{nm} \parallel \overline{qp} \text{ y } \overline{nm} \equiv \tfrac{1}{2}\,\overline{nn'} \equiv \tfrac{1}{2}\,\overline{qp}$$

2) El señor Piegrande tiene un pequeño taller (T) separado de su casa (C) pero en el mismo terreno, como lo muestra la figura, y está por instalar la luz. ¿Dónde conviene que instale el pilar de entrada de energía eléctrica para abaratar el costo del tendido de cable?. Se sabe que la casa está más cerca de la ruta que el taller, aunque no se tiene el dato del metraje correspondiente.

(Sugerencia: utilizar simetría.)



Si se considera t', el simétrico de un punto $t \in T$ por la simetría axial S_R, el menor trayecto entre un punto $c \in C$ y t' se logra con el segmento $\overline{ct'}$.

Sea $o \in \overline{ct'} \cap R$. Resulta $S_R(o) = o$ y también $S_R(\overline{ot'}) = \overline{ot}$ y por tanto

$$\overline{ot'} \equiv \overline{ot}$$

resultando

$$\overline{ct'} \equiv \overline{co} + \overline{ot'} \equiv \overline{co} + \overline{ot}$$

Esto dice que el lugar óptimo para ubicar el pilar de luz es el punto o.

Aquí conviene sugerir qué hubiera ocurrido de tomar el simétrico de c y realizar algo similar, pidiendo discutir o justificar la respuesta.

3) Sea S el conjunto de todas las simetrías planas o reflexiones definidas sobre el espacio (E). Probar que S es un conjunto de generadores del grupo de transformaciones rígidas, $\tau(E)$. Es decir, toda transformación rígida definida sobre E se puede escribir como composición de elementos de S.

Clasificando las transformaciones rígidas en aquéllas que preservan o no orientación y tienen o no punto fijo, se puede ver que existen exactamente seis, según el siguiente cuadro:

	con punto fijo	sin punto fijo
preserva orientación	ROTACION	TRASLACION ---------------------------------- MOVIMIENTO HELICOIDAL
no preserva orientación	REFLEXIÓN ---------------------------- REFLEXION ROTADA	REFLEXIÓN DESLIZANTE

Teniendo en cuenta las definiciones de estas transformaciones, se puede demostrar que:

i) si G_E es una rotación de eje E,

$G_E = S_\alpha \circ S_\beta$

donde $\alpha \cap \beta = E$ y uno de los diedros que determinan es congruente a la mitad del que define la rotación.

ii) si $T_{aa'}$ es una traslación definida por el par ordenado de puntos (a,a'),

$$T_{aa'} = S_\alpha \circ S_{\alpha'}$$

donde α y α' son planos perpendiculares a la recta $\overleftrightarrow{aa'}$ por los puntos a y m respectivamente, donde m es el punto medio del segmento $\overline{aa'}$.

iii) si $H_{E,aa'}$ es un movimiento helicoidal, se puede escribir de manera única como la composición de una rotación y una traslación de dirección paralela al eje de rotación, siendo esta composición conmutativa. Entonces, considerando también los puntos anteriores,

$$H_{E,aa'} = T_{aa'} \circ G_E = (S_\alpha \circ S_{\alpha'}) \circ (S_\gamma \circ S_\delta)$$

iv) si S_α es una reflexión, ya está

v) si $G_{E,\propto}$ es una reflexión rotada, se puede escribir de manera única como la composición de una rotación de eje E y una reflexión de plano $\propto \perp E$, siendo la misma conmutativa. Entonces

$$G_{E,\propto} = G_E \circ S_\alpha = (S_\gamma \circ S_\delta) \circ S_\alpha$$

vi) si $R_{\alpha,aa'}$ es una reflexión deslizante, se puede escribir de manera única como la composición de una traslación definida por el par ordenado de puntos (a,a') con una reflexión de plano $\propto$ tal que $\propto \parallel \overleftrightarrow{aa'}$, siendo ésta conmutativa. Entonces

$$R_{\alpha,aa'} = S_\alpha \circ T_{aa'} = S_\alpha \circ (S_\gamma \circ S_\delta)$$

donde γ y δ son planos perpendiculares a la recta $\overleftrightarrow{aa'}$ (y por lo tanto al plano $\propto$) por los puntos a y m respectivamente, donde m es el punto medio del segmento $\overline{aa'}$.

4) a) Probar que la composición de tres simetrías centrales de centros no alineados es otra simetría central cuyo centro determina con los anteriores un paralelogramo.

b) Dados tres puntos a, b y c no alineados cualesquiera, realizar las seis composiciones posibles con las tres simetrías que los tienen por centros

(S_a o S_b o S_c , S_b o S_a o S_c , etc.). ¿Qué resultado se obtiene en cada caso? Enunciar la propiedad encontrada: "La composición de tres simetrías centrales de centros no alineados,..."

5) Definición: Diremos que un conjunto C es dejado fijo por una transformación T, si T(C) = C.

a) Estudiar las transformaciones rígidas que dejan fijo el triángulo equilátero. Ver que forman grupo con la composición y analizar los subgrupos. Comparar con el grupo de permutaciones de tres elementos (S_3) y probar que existe un isomorfismo entre ellos.

b) Realizar un estudio similar con las transformaciones rígidas que dejan fijo el cuadrado, $\tau(C)$. Determinar un morfismo de grupos entre $\tau(C)$ y el grupo de permutaciones de cuatro elementos (S_4). ¿Es ($\tau(C)$,o) isomorfo a (S_4,o)?.

c) Estudiar las transformaciones rígidas que dejan fijo el tetraedro regular. Ver que forman grupo con la composición. Comparar con S_4 y probar que existe un isomorfismo entre ellos.

d) Considerar el grupo de todas las rotaciones del cubo, y probar que es isomorfo a S_4 y por tanto al grupo de todas las transformaciones rígidas que dejan fijo el tetraedro regular. (Sugerencia: teniendo en cuenta que las diagonales del cubo son 4, considerar, aparte de la identidad, las transformaciones que aplican una diagonal en otra distinta).

6) Sea P(a_1, a_2, ..., a_n, a'_1, a'_2, , a'_n) un prisma regular recto.

a) Probar que el conjunto $\tau(P)$ de transformaciones rígidas que lo dejan fijo, es con la composición, un grupo. Hallar su cardinal.

b) Hallar el subgrupo de rotaciones de $\tau(P)$ y sus subgrupos.

c) ¿Existe algún prisma en el que una de las diagonales son ejes de rotación?

d) Supongamos que P no sea el cubo y llamemos $\rho(P)$ al grupo maximal de rotaciones que dejan fijo P. Describirlo y probar que $\rho(P)$ es isomorfo al grupo de transformaciones rígidas planas que dejan fijo al polígono regular de n lados (Al grupo $\rho(P)$ se lo llama grupo diédrico de orden n).

7) a) Comprobar que el siguiente método permite, dada una semirrecta A y su transformada A' (no paralela a A) por una reflexión deslizante, encontrar el eje y el vector de deslizamiento. Justificarlo.

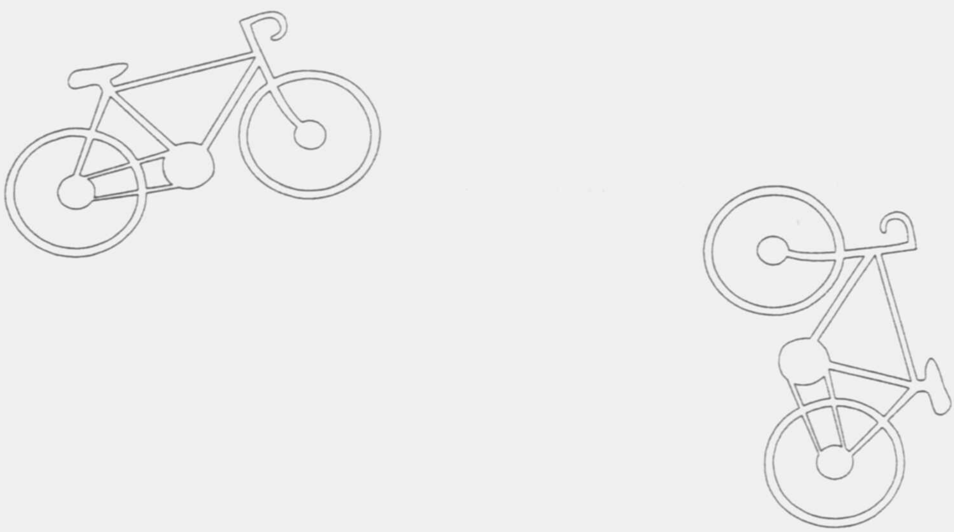
i - trazar la recta B que contiene la bisectriz de uno de los ángulos formados por A y A' cuyo sector angular es el determinado por semiplanos correspondientes por la transformación.

ii - trazar la recta R $\|$ B por el punto medio del segmento $\overline{aa'}$ determinado por los orígenes de A y A' respectivamente

iii - hallar $a'' = S_R$ (a)

iv - la reflexión deslizante $D_{a''a'} = S_R \circ T_{a''a} = T_{a''a'} \circ S_R$ es la buscada.

b) Encontrar el eje y el vector de deslizamiento de la reflexión deslizante que aplica la figura F en la figura F':



BIBLIOGRAFIA

POINCARE, E y A. Einstein. (1948). *Fundamentos de la Geometría.* Colección Infinito. Serie 3 Filosofía de la Ciencia. Vol 1. Ibero-Americana

TIRAO, J. A. (1979). *El Plano.* Ed. Docencia.

FERRARIS, C. (1991). *ESPACIO – Geometría Métrica.* Ed. Centro Regional Universitario Bariloche - Universidad Nacional del Comahue.

FERRARIS, C. (1997). *UNA DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DE ANGULO. Ordenamiento – Suma – Aplicación a rotaciones.* Cuaderno Universitario Nº 27. Centro Regional Universitario Bariloche de la Universidad Nacional del Comahue.

FERRARIS, C. y M. Ferrero. (1999). *Un concepto Matemático muy incorporado aunque no tan obvio: El axioma de continuidad y algunas aplicaciones.* Ponencia en la XXII Reunión de Educación Matemática, organizada por la UMA en la Ciudad de La Plata.

FERRARIS, C. y colaboradores (2002). "Siempre hay un espacio para un problema". Cuadernos Universitarios Nº 45 – CRUB.

PUIG ADAMS, P. (1980). *Curso de Geometría Métrica.* Decimoquinta edición. Gómez Puig Ediciones.

SARAVIA, L., Notas de geometría euclideana. Univ. Nac. de Salta, loli@ciunsa.edu.ar

Centro Regional Universitario Bariloche – Universidad Nacional del Comahue.