CB-360

INFINITO EN EL AULA DE MATEMATICAS: PONER LA BASE DESDE LOS 12 AÑOS

Xavier Vilella Miró
xvilella@xtec
Grup Vilatzara: ICE-Universitat Autònoma de Barcelona
España

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos
Modalidad: CB
Nivel educativo: Medio o Secundario
Palabras clave: infinito, potencial, actual, representación

Resumen

Cuando llega el momento de usar el concepto de infinito (asíntotas, decimales periódicos, irracionales, límite, progresiones, conjuntos numéricos, continuidad, intervalos, regiones no acotadas, rectas y planos...) ¿estamos seguros de que el alumnado tiene la base para hacerlo? Pienso que debemos empezar a introducir el concepto de infinito desde los 12 años, y continuar su enseñanza explícita durante toda la secundaria obligatoria si deseamos que la comprensión de muchos conceptos posteriores tenga éxito. Parte del profesorado que imparte matemáticas en los primeros niveles a menudo no conoce los diferentes tipos de infinito, especialmente el potencial y el actual, con lo que aún en el caso de comentarlo explícitamente en el aula no va más allá del infinito potencial. Presento algunas actividades para desarrollar el concepto de infinito para alumnos desde 12 años, a partir de contenidos de matemáticas como la probabilidad, los fractales, las fracciones, los decimales periódicos...

Encontramos el concepto de infinito en decimales periódicos, asíntotas, números irracionales, el límite, en progresiones de infinitos términos, en la precisión en la medida, en los conjuntos numéricos, rectas y semirrectas, intervalos infinitos, rectas paralelas, regiones no acotadas, infinitas soluciones, plano en el espacio…

Resulta paradójico que un concepto tan presente en las matemáticas a partir de los 16 años (incluso antes), prácticamente no aparezca antes de esa edad en las matemáticas escolares. Las razones por las que sucede este hecho, en opinión de parte del profesorado, son variadas: desde las epistemológicas hasta las didácticas, pasando por la falta de conocimiento profundo del tema por parte de algunos profesores.

ISBN 978-84-945722-3-4

Tengamos en cuenta que el pensamiento matemático en procesos que implican el infinito es distinto al de fenómenos finitos. Para procesos que involucran el infinito no podremos aplicar la lógica y la intuición habitual para procesos finitos.

Para empezar, recordemos que hay dos tipos de infinito: el infinito potencial y el infinito actual. El primero se interpreta como un proceso sin fin. El segundo, como un proceso infinito que culmina, que alcanza sus límites. Un ejemplo de este segundo tipo de infinito es la afirmación siguiente: 0,99999…. = 1 ¿Cuántos de nosotros podemos afirmar sin dudar que nuestro alumnado comprende esta igualdad cuando acaba la ESO, a los 16 años? La mayoría de profesores que he podido consultar afirman que su alumnado (al menos el más preparado) llega a comprender el infinito potencial, es decir, que 0,9 periódico tiene infinitos decimales, pero inmediatamente añaden que nunca llegará a 1. Esta concepción del infinito (potencial), sin duda intuitiva, servirá como base sólo parcialmente cuando llegue el momento de abordar conceptos como el de límite, la interpretación geométrica de la derivada, etc. De hecho, podemos centrar su atención en que, si consideramos los dos miembros de esa igualdad como números, estos difieren en valor absoluto en una cantidad menor que cualquier número positivo, es decir *esta diferencia sólo puede ser cero*.

Si preguntamos a nuestros alumnos dónde creen que hay más puntos, en un segmento corto o en uno largo, ¿cuántos afirmarán que en el largo? ¿El todo es mayor que la parte? ¿Seguro? ¿Siempre? En estos casos, la medida induce a la confusión.

De lo que estamos hablando es del paso del pensamiento matemático elemental (PME) al avanzado (PMA). Harel y Sowder (2005) afirman: “Nuestro punto de vista es que las raíces del pensamiento matemático para las matemáticas avanzadas deben favorecerse durante el estudio de las matemáticas elementales. Formas generales de pensamiento, construidas sobre formas ricas de comprensión en matemáticas elementales pueden colaborar simbióticamente con formas posteriores de comprensión y de pensamiento en matemáticas avanzadas”, podemos considerar la posibilidad de introducir el infinito en las aulas a partir de los 12 años.

Las propuestas que siguen, relacionadas con el infinito potencial y el actual, encajan perfectamente en la concepción de Gray y otros (1999) sobre el PMA: “La noción de PMA implica la creación de mundos mentales nuevos en la mente del individuo que pueden ser completamente hipotéticos”.

Por todo lo dicho, propongo que afrontemos la didáctica del infinito desde los 12 años.

ISBN 978-84-945722-3-4

Podemos empezar por el infinito potencial, para ir presentando el infinito actual. Deberemos combinar los contextos geométricos con los contextos numéricos, porque determinan en buena medida el modelo intuitivo que se aplique (Belmonte, 2009)

Hay una serie de actividades que pueden servir a este propósito, que servirán para empezar: los decimales infinitos, las infinitas fracciones equivalentes, el Ojo de Horus (y las sumas de series de fracciones a partir de dicho Ojo), el conjunto de Cantor, la curva de Kock, …

Los decimales infinitos

Cuando escribimos 0,3 nadie duda de que estamos representando un número, en concreto un número decimal, que ocupa un lugar en la recta numérica. Para representarlo en dicha recta, parte del alumnado divide el segmento unidad en tres partes y marca la posición del primer tercio con la etiqueta 0,3. Pero esto no es exacto, dado que al dividir 1 entre 3 el resultado es 0,33333… El decimal periódico es incómodo. Nos complica la vida, ¿Vale la pena introducir esta duda en el aula? Yo creo que sí, porque nos llevará a discutir diferentes aspectos:

- cómo podemos mejorar la representación de 0,3
- al marcar el punto del tercio de la unidad, qué etiqueta deberíamos poner
- si 1/3 es equivalente a 0,3333… y el decimal tiene infinitos treses, tantos que nunca podemos acabar de escribirlos, ¿cómo puede tener asignado un punto concreto y único en la recta numérica?

Ahora pasemos a 0,9. Sigamos el mismo proceso. Y ahora planteémonos dónde colocaremos 0,98 y seguimos con 0,99 y con 0,999

Llegamos al punto conflictivo: dónde representar 0,99999…. Bien, deberemos aceptar que su representación debe caer en el 1. No podemos escribir todos los infinitos nueves del decimal periódico, pero podemos imaginar a dónde nos llevan esos nueves, cuál será el punto que lo represente. Con ciertas licencias formales, pasamos del infinito potencial al infinito actual.

Otro ejercicio interesante consiste en proponer la suma de 0,1 + 0,01 + 0,001 + … y pedir cuál puede ser su resultado. Sabemos que 1/10 = 0,1, y que 1/9 = 0,111111…. Por lo tanto, la respuesta es 1/9. La mayoría de alumnos, si el ambiente en clase es reflexivo, responde que no podemos decir cuál es el resultado de la suma. No intuyen el infinito actual, sólo el potencial. Debemos intentar que den el salto. Si sumamos (por ejemplo, poniendo los

ISBN 978-84-945722-3-4

sucesivos decimales en columna) todos los términos, obtendremos exactamente el resultado de 1/9. No importa que haya infinitos números en la columna, la suma tendrá infinitos unos tras la coma. El resultado es exacto. Infinito actual.

Una pregunta que puede ayudar a establecer la respuesta al ejercicio anterior es: ¿existe algún número entre 0,9999… y 1?

La raíz de 2

Mostrar al alumnado que la raíz de 2, un número distinto de los racionales, también tiene un punto concreto y único en la recta numérica, puede provocar un debate en el aula muy interesante, en relación con el hecho de que si vamos representando los decimales anteriores como números con decimales finitos, nos encontramos nuevamente con la paradoja de que el número con infinitos decimales debe representarse en una posición determinada, que no será ninguna de las de sus parecidos decimales finitos.

El Ojo de Horus

El mito egipcio del Ojo de Horus nos servirá para plantear la suma de las fracciones que en él se representan. Ampliaremos con más términos la serie y seguiremos buscando la suma total, asumiendo que siempre nos faltará una fracción, cada vez más pequeña, hasta el punto que puede ser tan pequeña como queramos, acercándonos a 1 tanto como deseemos. Ahí tenemos el infinito potencial. Ahora bien, para pasar al infinito actual, debemos plantear lo que representan los puntos que escribimos detrás del signo de sumar y de la última fracción que sumamos: estos puntos representan todas las infinitas fracciones que obtendremos de elevar a las siguientes potencias la fracción ½ inicial. Por tanto, si imaginamos *la suma de todas las fracciones que están ahí*, en los puntos, obtenemos la suma total, que es 1. Este ejemplo permite mostrar un posible acercamiento a la transformación de un problema geométrico en el equivalente problema aritmético, convirtiéndolo en la suma de una progresión geométrica.

Otras series de fracciones nos permiten darnos cuenta de que la suma no siempre es 1 y puede dirigirse a otros totales, incluso no ir a ningún número. Usaremos Geogebra, por ejemplo, para representar las sumas parciales y el gráfico nos indicará, intuitivamente, hacia qué valor se dirige dicha suma. Está claro que en algunas series divergentes podría inducirnos a error, por lo que podemos actuar de dos maneras: o bien seleccionamos las series que proponemos

ISBN 978-84-945722-3-4

para no entrar en este jardín, o bien planteamos alguna de ellas y lo dejamos abierto para cursos siguientes. Yo soy partidario de la segunda opción.

La curva de Kock

Este sencillo fractal, que parte de un segmento que llamaremos segmento unidad, nos permite plantear a los alumnos la suma de las fracciones que vamos obteniendo en cada iteración. Esta suma va creciendo y cada suma parcial es mayor que la anterior, por lo que va hacia infinito. Lo realmente curioso del caso es que tenemos una representación visual del fractal, y queda claro que nunca podrá superar los límites del segmento inicial, ni la altura de la primera iteración, con lo que se plantea la aparente paradoja: ¿un infinito acotado? De hecho, cuando presentamos el conjunto de los números racionales, ya usamos esta idea, a menudo sin explicitarla.

El alumnado de 12 años puede comprender esta situación justamente porque construye cada iteración y realiza la sucesiva suma de fracciones.

Para cursos posteriores quedarán hechos como el por qué de la equipolencia de los conjuntos N, Z, Q (pero no R), las series más complejas (la suma de una serie como proceso analítico y no algebraico), etc.

No debemos dejar de programar el abordaje del infinito actual porque facilitará la comprensión de temas de matemáticas y de otras materias a nuestro alumnado, y porque, además, es un tema apasionante y bello.

Referencias bibliográficas

Belmonte, J.L. (2009): *Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito en estudiantes de educación primaria, secundaria obligatoria, bachillerato y universidad*. Tesis doctoral. Salamanca: Universidad de Salamanca.

Garbin, S. (2005a): ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), **8**, 2, pp. 169-193.

ISBN 978-84-945722-3-4

Gray, E., Pitta, D., Pinto, M. y Tall, D.O. (1999): Knowledge Construction and Diverging Thinking in Elementary & Advanced Mathematics. Educational Studies in Mathematics, 38 (1/3), pp. 111- 133.

Harel, G. y Sowder, L. (2005): Advanced mathematical-thinking at any age: Its nature and its development. Mathematics Thinking and Learning, 7, 27-50.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite, Recherches en Didactique des Mathématiques*,* 6 (1), pp. 5-67.

Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking, en Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education (eds. L. Meira y D. Carraher), Vol. **1**, pp. 61-75.

Tall, D. y Tirosh, D. (2001). Infinity – the never-ending struggle. Educational Studies in Mathematics, 48 (2/3), pp. 199-238.

ISBN 978-84-945722-3-4