UNA INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIOFÁNTICAS EN SECUNDARIA

Jorge Luis Chinchilla Valverde – Reiman Yitsak Acuña Chacón
jochinchilla@itcr.ac.cr – reiacuna@itcr.ac.cr
Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica

Tema: Pensamiento Algebraico
Modalidad: MC
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: Ecuaciones Diofánticas, Resolución de Problemas, Pensamiento Algebraico, Pensamiento Aritmético.

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo reflejar la importancia de las ecuaciones diofánticas dentro de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas a nivel de secundaria. Se pretende motivar a los y las participantes del minicurso mostrando algunas aplicaciones de las ecuaciones diofánticas en la resolución de problemas algebraicos y aritméticos, mediante el uso de técnicas y métodos de resolución de índole histórica y práctica.

1. Introducción

La resolución de ecuaciones es un tema que se desarrolla en secundaria desde los primeros niveles y, que a su vez, permite el estudio de los diversos conjuntos numéricos (naturales, enteros, racionales, irracionales y reales). Empero, una clase especial de ecuaciones, por lo general relegada de los programas de estudio de matemáticas a nivel de secundaria (en Costa Rica) son las llamadas ecuaciones diofánticas, que por su naturaleza, son catalogadas como difíciles y laboriosas.

Gracián (2013) señala que el interés que encierra la resolución de una ecuación diofántica está en relación directa con la naturaleza de las incógnitas. Por ejemplo, si lo que se plantea en una ecuación hace referencia al volumen de un líquido no importará, en principio, que la solución incluya cantidades fraccionarias; pero si se trata, por ejemplo, del número de personas que pueden asistir a una reunión, está claro que únicamente tendrán sentido las soluciones enteras, ya que carecería de sentido dividir a una persona en trozos.

No obstante, *"no todas las ecuaciones diofánticas tienen un método (algoritmo) que permita resolverlas de manera sistemática"* (Gracián, 2013, p. 1). De hecho, la mayoría no lo tienen. La búsqueda de un método de resolución para ecuaciones concretas ha sido, durante mucho tiempo, objeto de estudio por matemáticos de la talla como Euler o Lagrange, y más recientemente de Minkowski o Chevalley.

A pesar de ello, consideramos que estas ecuaciones encierran procesos de resolución que rescatan valiosos recursos tanto pedagógicos como conceptuales, además de ofrecer una rica información histórica de la misma. Al echar un vistazo en la historia, encontramos escenarios en que los algoritmos de resolución de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones han ocupado a muchos matemáticos a lo largo del tiempo. Por ejemplo, se conoce la existencia de problemas resueltos por procedimientos algebraicos que datan del año 3000 a.C.

De acuerdo con Barrantes et al. (2007), el estudio de las ecuaciones diofánticas permite reforzar conocimientos adquiridos en cursos y niveles anteriores, además de brindarle al docente ideas para motivar a sus estudiantes en el estudio de la resolución de ecuaciones y, por qué no, incrementar el interés por la matemática.

Al respecto, Pérez (2011) expone la siguiente situación:

Supongamos que se te pide que des las soluciones de la ecuación $3x + 14y = 20$*; seguramente dirás que es un problema muy sencillo, que la solución es* $y = \frac{20-3x}{14}$*, donde* x *puede tomar cualquier valor. Otra cuestión mucho menos obvia es que halles las soluciones con* x *e* y *enteros.* (p.22)

Este tipo de ecuaciones lleva su nombre en honor a Diofanto, matemático griego del año 275 a.C. que las estudió extensivamente y dio soluciones a algunas de ellas. Su vida se desconoce por completo; sin embargo ha llegado hasta nosotros un texto escrito por él llamado "La Aritmética" en el que se plantean y resuelven 189 problemas de álgebra que hoy resolveríamos utilizando ecuaciones de primero y segundo grado como sistemas de ecuaciones. Por este hecho se le conoce como el padre del Álgebra y a las ecuaciones de primer grado se les llama, también, "ecuaciones diofantinas". (Albedea, 2011)

Con el tiempo, han aparecido un número mayor de ecuaciones diofánticas, entre las que se encuentran la ecuación pitágorica, la ecuación de Pell, entre otras.

Como se expuso anteriormente, para obtener la solución a dichas ecuaciones no existen métodos únicos, y dependen en gran manera de la intuición. En nuestro caso, daremos algunos procesos teóricos para llegar a ellos.

2. Marco Teórico

En esta sección expondremos parte de la teoría necesaria para introducir las ecuaciones diofánticas. Como punto importante, aclaramos que las definiciones y estrategias utilizadas corresponden a un compendio de las obras de Guelfond (1984), Barrantes et al. (2007), Burton (1969), Sarmiento (2004), entre otros.

2.1. Ecuación Diofánticas

Se llama ecuación diofántica o ecuación diofantina a cualquier ecuación polinomial con coeficientes enteros cuya solución se restringe únicamente a aquellos valores enteros que satisfacen la ecuación.

2.2. Tipos de ecuación diofánticas

Para efectos del minicurso se tratarán dos tipos de ecuaciones diofánticas: las lineales o de primer orden (en dos y tres variables) y las cuadráticas o de segundo orden con dos variables.

2.3. Técnicas para resolver ecuaciones diofánticas

Las técnicas para resolver cada una de las ecuaciones diofánticas anteriormente citadas involucra una serie de teoremas de suma importancia. Es por ello que, a continuación, se formulan los teoremas respectivos y un ejemplo particular. Las demostraciones y otros cálculos se tratarán en el minicurso.

2.3.1. La ecuación $\boldsymbol{ax + by = c}$

Teorema: Sean a, b y $n \in \mathbb{Z}$. La ecuación lineal $ax + by = c$ tiene solución entera x_0; y_0 si y sólo si $d = mcd(a, b)$ divide a c.

Ejemplo: Supongamos que nos encontramos el siguiente problema:

Un hombre va a una tienda de ropa y compra 12 trajes, unos negros y otros grises, por 1200 €. Si los trajes negros valen 30 € más que los grises y ha comprado el mínimo posible de estos últimos, ¿cuántos trajes ha comprado de cada color?

Solución: Sea $x =$ cantidad de trajes negros, $12 - x =$ cantidad de trajes grises, $y =$ precio de un traje negro, $y + 30 =$ precio de un traje gris. La ecuación asociada al problema es $x(y + 30) + (12 - x)y = 1200$. Al simplificar esta ecuación obtenemos $30x + 12y = 1200$. Luego, se quiere encontrar la solución entera a esta ecuación. Como $mcd(30{,}12) = 6$ es un divisor de 1200 esta ecuación tiene soluciones. Mediante una serie de procedimientos, los cuales serán descritos en el minicurso, se obtiene la solución particular:

$$x_0 = 200 \text{ y } y_0 = -400$$

A partir de esto fácilmente se tienen todas las soluciones[1]:

$$x = 200 + k \cdot \frac{12}{6} = 200 + 2k$$

$$y = -400 - k \cdot \frac{30}{6} = -400 - 5k$$

En principio estas expresiones nos dan todas las soluciones del problema, pero todavía no hemos terminado. Hay que tener en cuenta más cosas. Analizando los datos obtenidos sabemos que el número de trajes negros que ha comprado es $T_N = 200 + 2k$, por lo que el número de trajes grises comprados es $T_G = 12 - T_N = 12 - 200 - 2k = -188 - 2k$. Teniendo en cuenta que el número de trajes de cada tipo comprados por esta persona debe ser positivo y menor que 12 tenemos lo siguiente:

$$0 < T_G < 12 \Leftrightarrow 0 < -188 - 2k < 12 \Leftrightarrow 188 < -2k < 200 \Leftrightarrow -100 < k < -94$$

Por tanto, los únicos valores posibles para k son $k = \{-99, -98, -97, -96, -95\}$.

Pero el enunciado también decía que ha comprado el mínimo número de trajes grises posibles. Probando con los valores anteriores esta condición se cumple para $t = -95$.

[1]La solución general de la ecuación $ax + by = c$ es: $x = x_0 + k \cdot \frac{b}{d}$ y $y = y_0 + k \cdot \frac{a}{d}$ donde x_0 e y_0 es una solución particular de la misma y k es cualquier número entero

En consecuencia el protagonista de nuestro problema compró $-188 - 2(-95) = 2$ trajes grises y $12 - 2 = 10$ trajes negros.

2.3.2. La ecuación $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$

Teorema: La ecuación $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$ tiene solución si y solo si $mcd(a_1, a_2, \dots, a_n)$ divide a c.

Ejemplo: Encontrar una solución de la ecuación diofántica $100x_1 + 72x_2 + 90x_3 = 2$

Solución: Como $a_1 = 100$, $a_2 = 72$ y $a_3 = 90$ y $mcd(100,72,90) = 2 = d$, debemos encontrar x_1, x_2, x_3 enteros tal que $100x_1 + 72x_2 + 90x_3 = 2$. El $mcd(100,72) = 4 = d'$. Por lo tanto debemos resolver la ecuación $100y_1 + 72y_2 = 4 \Leftrightarrow 25y_1 + 18y_2 = 1$. Por el método usual (ya visto en el caso $ax + by = c$) se encuentra que $y_1 = 5$ y $y_2 = 7$ es una solución. Nuestro próximo paso para la solución es encontrar t, x_3 tal que $4t + 90x_3 = 2 \Leftrightarrow 2t + 45x_3 = 1$. En forma clara, una solución sería $x_3 = 1$, $t = -22$. Multiplicando y_1 y y_2 por -22 obtenemos una solución de la ecuación.

2.3.3. La ecuación $x^2 - y^2 = n$

Teorema: La ecuación $x^2 - y^2 = n$, donde $n \in \mathbb{N}$, tiene soluciones enteras si y solo sí n puede descomponerse en producto de números de la misma paridad (ambos pares o ambos impares). En el caso que a y b sean dos de tales números, la pareja de valores $x = \frac{a+b}{2}$ y $y = \frac{a-b}{2}$ son una solución de la ecuación. Luego, todas las soluciones son de dicha forma.

Ejemplo: Se desea construir una sala con un área exacta. Para ello, un ingeniero determino que los costos serán menores si la diferencia entre el cuadrado del largo y el cuadrado del ancho es de 36 metros cuadrados. A partir de esto, determine el largo y el ancho de la sala.

Solución: Sea $x = largo\ de\ la\ sala$ y $y = ancho\ de\ la\ sala$. El problema dado se traduce en resolver la ecuación $x^2 - y^2 = 36$, y en encontrar los valores enteros positivos asociados. Como $36 = 2^2 \cdot 3^2$ entonces $m \cdot n = 2^2 \cdot 3^2$. De esta forma tendremos 5 posibilidades, que corresponden a todas las combinaciones dos a dos de los factores de 36. Esto es:

a) $\boxed{m=2}$ y $\boxed{n=18}$ con lo cual se debe resolver el sistema $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=18 \end{cases}$, de donde $x=10$ y $y=-8$. Es decir $S_1=\{(10,-8)\}$ y $S_2=\{(-10,8)\}$ (se acepta inversión de signos pues la ecuación no se altera por los términos cuadráticos).

b) $\boxed{m=4}$ y $\boxed{n=9}$ con lo cual se debe resolver el sistema $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=9 \end{cases}$. Pero este caso se desecha pues ambos resultados no son enteros.

c) $\boxed{m=6}$ y $\boxed{n=6}$ con lo cual se debe resolver el sistema $\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=6 \end{cases}$, de donde $x=6$ y $y=0$. Es decir $S_3=\{(6,0)\}$ y $S_4=\{(-6,0)\}$ (se acepta inversión de signos pues la ecuación no se altera por los términos cuadráticos).

d) $\boxed{m=9}$ y $\boxed{n=4}$ con lo cual se debe resolver el sistema $\begin{cases} x+y=9 \\ x-y=4 \end{cases}$. Pero este caso se desecha pues ambos resultados no son enteros.

e) $\boxed{m=18}$ y $\boxed{n=2}$ con lo cual se debe resolver el sistema $\begin{cases} x+y=18 \\ x-y=2 \end{cases}$, de donde $x=10$ y $y=8$. Es decir $S_5=\{(10,8)\}$ y $S_6=\{(-10,-8)\}$ (se acepta inversión de signos pues la ecuación no se altera por los términos cuadráticos).

De este modo, las soluciones a la ecuación $x^2-y^2=36$ corresponden a la unión de todas las soluciones en cada caso, esto es:

$$S=\{(10,-8),(-10,8),(6,0),(-6,0),(10,8),(-10,-8)\}$$

En nuestro caso, los únicos valores de este conjunto que satisfacen nuestro problema son $x=10$ y $y=8$, es decir, el largo de la sala deberá ser de 10 metros, mientras que el ancho de 8 metros.

2.4. La resolución de problemas con ecuaciones diofánticas

De acuerdo con Schoenfeld (1985), la resolución de problemas hace referencia al uso de situaciones difíciles que permitan a los y las estudiantes aprender a pensar matemáticamente. En tal caso, la dificultad de las situaciones hace referencia a soluciones no inmediatas, donde el éxito depende de las habilidades y conocimientos previos del educando. En el caso de las ecuaciones diofánticas, es necesario que los educadores tengan claro el concepto de solución particular y general en la resolución de ecuaciones, en la búsqueda del pensamiento algebraico e aritmético.

Por otro lado, los docentes pueden considerar las siguientes pautas propuestas por Polya (1957): a) Comprensión del problema, b) concepción de un plan, c) ejecución del plan y d) visión retrospectiva. De esta manera la presentación de los problemas puede enfocarse con estos lineamientos, recurriendo al contexto del problema y el aprendizaje previo.

3. Estructura y metodología del minicurso

El presente minicurso estará basado en la resolución de algunos tipos de ecuaciones diofánticas que consideramos interesantes y apropiados para ser desarrollados en educación secundaria. Para ello, en las cuatro horas que dura el minicurso, se plantean tres sesiones:

a) Presentación y discusión de algunos problemas que involucran ecuaciones diofánticas. Es decir, se aborda el minicurso con una breve introducción al tema y se motiva a los y las participantes a discutir sobre las posibles soluciones de algunos problemas presentados por partes de los ponentes.

b) Presentación y desarrollo teórico de las ecuaciones diofánticas. Es decir, se creará un ambiente de discusión que conlleve al planteamiento de estrategias en la resolución de los problemas de la sección anterior, planteando, previamente, la teoría asociada.

c) Resolución y discusión de diferentes problemas. Es decir, se abordan diferentes problemas con las técnicas expuestas en el marco teórico, rescatando la importancia y la viabilidad en cada problema.

En todas las sesiones se hará referencia al pensamiento algebraico y geométrico como estándares ideales en la resolución de problemas con ecuaciones diofánticas.

Referencias Bibliográficas

Albendea, P. (2011). *La historia del álgebra en las aulas de secundaria*. http://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/1883/Albendea%20Herrera,%20Paula.pdf?sequence=1 Consultado 28/07/2013

Baldor, A. (2011). *Aritmética.* México D.F.: Compañía Editorial Ultra S.A. de C.V.

Barrantes, H.; Díaz P.; Murillo, M.; y Soto, A. (2007). *Introducción a la Teoría de Números*. San José: Editorial de la Universidad Estatal a Distancia.

Burton, W. (1969) *Teoría de los números.* México D.F.: Editorial Trillas

González, F. (2004). *Ecuaciones Diofánticas*. http://www2.uca.es/matematicas/Docencia/ESI/1710003/Apuntes/Leccion12.pdf Consultado 28/07/2013

Gracián, E. (2013). *Ecuaciones diofánticas y el teorema de Fermat*. http://www.enriquegracian.com/articulos/ecuaciones-diofanticas-y-el-teorema-de-fermat Consultado 28/07/2013

Guelfond, A. (1984) *Resolución de Ecuaciones en Números Enteros*. Moscú: Editorial MIR.

Pérez, S. (2011). *Ecuaciones Diofánticas*. http://www.slideshare.net/albertruben15/ecuaciones-diofnticas Consultado 28/07/2013

Polya, G. (1957) *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method.* New Jersey: Princeton University Press.

Sarmiento, W. B. (2004) *Sobre las ecuaciones Diofánticas.* (Tesis inédita de Licenciatura). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematics Problem Solving.* Orlando: The National Council of Teachers of Mathematics.

Tahan, M. y Murillo, A. (tr.) (1999) *El hombre que calculaba.* Santa Fe de Bogotá: Panamericana Editorial.