FRANQUEAMIENTO DE OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS EN EL PENSAMIENTO ANALÍTICO A TRAVÉS DE RECURSOS DE LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA Y DE LA GEOMETRÍA DINÁMICA

María del Carmen Bonilla
mc_bonilla@hotmail.com
APINEMA: Asociación Peruana de Investigación en Educación Matemática, Perú

Tema VII.1 - Relaciones entre Historia de la Matemática e Investigación en Educación Matemática.
Modalidad Comunicación breve
Nivel Formación y actualización docente
Palabras clave: Arquímedes, Análisis, Obstáculos epistemológicos, Geometría Dinámica

Resumen

La incorporación de la historia de la matemática en la enseñanza de las matemáticas es cada vez más creciente (Jankvist, 2009). Existen fundamentos epistemológicos y didácticos que sustentan la introducción de la dimensión histórica en la enseñanza de las matemáticas (D'Enfert, Djebbar y Radford, 2012). (Barbin, 2012a) resalta un aumento en la tendencia de enseñar la historia de la matemática en la formación docente. En este nivel es importante transferir a la didáctica conceptos epistemológicos como obstáculo, ruptura, entendidos desde una perspectiva histórica (Barbin, 2012c). En el presente trabajo se sostiene que el estudio de textos antiguos, con la intención de comprender la evolución histórica de las nociones, permite franquear obstáculos epistemológicos producidos por el paso de un tipo de pensamiento a otro superior; en concreto, el estudio de la demostración mecánica desarrollada por Arquímedes para encontrar el volumen de la esfera permitiría a los docentes salvar obstáculos epistemológicos relacionados con la visión del continuo numérico, cuya comprensión es un requisito indispensable para acceder al pensamiento analítico (Artigue, 1995). Para hacer más accesible el estudio de la demostración mecánica, ésta ha sido construida utilizando el entorno informático de la Geometría Dinámica del Cabri 3D.

Problemática

Desde hace tres a cuatro décadas, como una reacción a las Matemáticas Modernas se inició un proceso de incorporación de la historia de la matemática en la enseñanza de las matemáticas (Jankvist, 2009). Existen fundamentos epistemológicos y didácticos que sustentan la introducción de la dimensión histórica en la enseñanza de las matemáticas (D'Enfert, Djebbar y Radford, 2012). De igual manera (Barbin, 2012a) resalta la tendencia cada vez más creciente de enseñar la historia de la matemática en la formación docente A ese nivel una cuestión clave es la de transferir a la didáctica conceptos epistemológicos como obstáculo, ruptura, a través de la historia (Barbin, 2012b). Para ello es necesaria la lectura de textos antiguos en el contexto en que fueron escritos, con la intención de comprender la evolución histórica de las nociones, y de esa manera franquear obstáculos epistemológicos producidos por el paso de un tipo de pensamiento matemático a otro superior (Barbin,2012c). En concreto, lo que se pretende hacer es el estudio de la demostración mecánica desarrollada por Arquímedes para encontrar el volumen de la esfera (VE), de manera tal que aplicado en un contexto de geometría dinámica, permitiría a los docentes en formación salvar obstáculos epistemológicos relacionados con la visión del continuo numérico, cuya comprensión es un requisito indispensable para acceder al pensamiento analítico (Artigue, 1995, 1998).

Leer un texto antiguo es una dificultad inherente a su escritura, pues corresponde a su época y utiliza un lenguaje propio del momento histórico. Una forma de disminuir esa dificultad estaría dada por la construcción de estos saberes antiguos en un entorno informático, medio que optimiza la visualización de las nociones matemáticas y el movimiento y dinamismo propio del pensamiento analítico y de la Geometría Dinámica. Es importante tener cuidado de que se mantenga las fidelidades histórica y epistemológica del texto antiguo.

Antecedentes

Una diversidad de investigadores ha estudiado el trabajo de Arquímedes, entre ellos Bettinelli (1988, 1991) quien elaboró dos estudios sobre el Método Mecánico de Arquímedes utilizando medios gráficos. De igual manera (Merker, 2004) estudió a Arquímedes como un antecesor del Método de los Indivisibles de Cavalieri. (Montesinos, 2006) desarrolló un estudio sobre la demostración mecánica de Arquímedes expuesto como medio digital en Polimedia, repositorio digital de la Universidad Politécnica de Valencia. (Lee y Tang, 2012) en el Congreso del Grupo de Historia y Pedagogía de las Matemáticas (HPM) de 2012 sustentaron un estudio comparativo sobre como Liu Hui en China y Arquímedes en Grecia encontraron en forma independiente el VE.

La Visión del continuo

(Artigue, 1995 y 1998) realiza un estudio sobre las dificultades en la enseñanza y aprendizaje del cálculo, una de las cuales está relacionada a la visión del continuo numérico, requisito básico para poder acceder al pensamiento analítico. La visión del continuo numérico se aprecia en la demostración mecánica realizada por Arquímedes para encontrar el volumen de la esfera, y está relacionada con el hecho de seccionar en regiones circulares infinitesimales el cilindro, cono y esfera, necesarias para "pesar" los sólidos y hallar el volumen. Esta prueba puede ser construida utilizando la geometría dinámica del Cabri 3D, desarrollando de esa manera una matemática experimental, acorde con los últimos avances de las múltiples herramientas computacionales y simbólicas que han rejuvenecido las matemáticas y la educación matemática (Arzarello, Bartolini, Lun, Mariotti y Stevenson, 2012). Además, en la comunidad académica del Grupo HPM, se señala que se necesitan más investigaciones empíricas sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas relacionadas con la historia (Arcavi, citado por Jankvist, 2009).

Alcances del problema de investigación

El trabajo busca elaborar el diseño didáctico de la demostración mecánica sobre el volumen de la esfera en un entorno dinámico, y se queda en su formulación. La idea es que posteriormente, en una futura investigación, el diseño didáctico sea aplicado experimentalmente en profesores de formación continua.

Pregunta de investigación

La interrogante que motiva el estudio es: ¿Cuál sería el diseño didáctico, en un entorno de geometría dinámica, de la demostración mecánica que elaboró Arquímedes para hallar el VE, que permita a los docentes de formación continua obtener una mejor comprensión de la prueba (Hanna, 1989), y de esa manera ellos puedan salvar los obstáculos epistemológicos relacionados con la visión del continuo numérico, requisito indispensable para acceder al pensamiento analítico?

Objetivo general

Elaborar una prueba matemática heterogénea (Hanna y Sidoli, 2007) en base a la demostración mecánica que desarrolló Arquímedes para hallar el volumen de la esfera, utilizando el software de geometría dinámica Cabri 3D.

Con una prueba matemática heterogénea lo que se propone es extraer la información implícita en una representación visual de tal manera que se obtenga una prueba válida. Algunos investigadores no creen que el razonamiento visual y el proposicional sean mutuamente excluyentes, y han elaborado el concepto de "prueba heterogénea", (Barwise y Etchemendy 1991), citados por (Hanna 2007) en donde se facilita el razonamiento con objetos visuales. Se dirige la atención al contenido de la prueba, enseña el razonamiento lógico y la construcción de la prueba mediante la manipulación visual y la información proposicional de una manera integrada.

Objetivos específicos

1. Estudio de las nociones matemáticas previas sobre las cuáles se elaboró la demostración mecánica para hallar el VE.

2. Relación de la demostración mecánica para hallar el volumen de la esfera con los primeros métodos de la heurística: análisis y síntesis.
3. Estudio de la demostración mecánica que desarrolló Arquímedes para hallar el VE.
4. Construcción en Cabri 3D de la demostración mecánica.
5. Establecer la relación entre la demostración mecánica de Arquímedes y la Teoría de los Indivisibles de Cavalieri, primera forma de integración del siglo XVII (Bettinelli, 1988).

Estudio matemático

A partir del artículo de (Thiele, 2003) se identifican las características de las matemáticas griegas de la antigüedad. De igual manera basándose en el texto del Método de Arquímedes (1986), se ha realizado la representación en geometría dinámica del Cabri 3D de la demostración mecánica para hallar el VE (ver Anexo 1). Los artículos de (Bettinelli, 1988 y 1991), (Merker, 2004), (González, 2006), (Beauzamy, 2010) y otros han contribuido a enriquecer el estudio.

Marco teórico

En relación a la integración de la historia de la matemática en la educación matemática se toma en cuenta las contribuciones del foro académico del Grupo de Historia y Pedagogía de las Matemáticas. Al analizar las dificultades en la enseñanza del análisis se estudia lo planteado por (Artigue , 1995,1998). La lectura del texto de Arquímedes se realiza bajo las premisas señaladas por el lingüista Mikhail Bakthine (Barbin, 2002). (Brousseau, 1983) y (Barbin, 2012b) orientan el trabajo en lo que se refiere a los obstáculos epistemológicos. En relación a la enseñanza de la prueba se tomará en cuenta los planteamientos del Estudio N° 19 del ICMI (Arzarello et al., 2012).

Metodología

En base a la lectura del Método de Arquímedes se ha construido con Cabri 3D la demostración mecánica para hallar el VE. Para ello se toma en cuenta los requisitos de fidelidad epistémica (Balacheff, 1994; Díaz Barriga, 2001) para validar la construcción de tal manera que sea fiel reflejo de la demostración.

Avance de la investigación

En estos momentos se ha avanzado el cumplimiento de los objetivos específicos 3 y 4, los objetivos 1 y 2 están en proceso de ejecución.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática,* pp. 97-140. México: Una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental. ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 1(1), 40 – 55.

Arzarello, F., Bartolini, M., Lun, A., Mariotti, M. y Stevenson, I. (2012). Experimental Approaches to Theoretical Thinking: Artefacts and Proofs. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education, The 19th ICMI Study,* pp. 97 – 143. New York, USA: Springer.

Balacheff, N. (1994). Didactique et Intelligence Artificielle. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 14(1-2), 9-42.

Barbin, E. (2002). L'écriture de l'histoire : la place du sujet et le temps de son acte. In Université de Rennes (Ed.), *4000 ans d'histoire des mathématiques : l'histoire sur le long terme* (141-154). Rennes: IREM.

Barbin, E. (2012a). L'histoire des mathematiques dans la formation : une perspective historique (1975–2010). In J.-L.Dorier, S. Coutat (Eds) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone 2012,* GT4, 546-554. Recuperado de://www.emf2012.unige.ch/images/stories/pdf/Actes-EMF2012/Actes-EMF2012-GT4/GT4-pdf/EMF2012GT4BARBIN.pdf

Barbin, E. (2012b). *What is epistemology (for)?* Powerpoint presentation. Colloque en hommage à Michèle Artigue. Paris.

Barbin, E. (2012c). L'épistémologie historique et l'histoire épistémologique des sciences et des techniques. En : *Notes de cours 1 Recherches en histoire des sciences et des techniques : tendances et tensions.* Master histoire des Sciences et des techniques. UEF1.

Beauzamy, B. (2010). *Séminaire exceptionnel. Un théorème d'Archimède et sa démonstration d'origine.* A l'occasion du 2222ème anniversaire de la mort d'Archimède. Recuperado de http://www.scmsa.eu/archives/CLQ_SCM_2010_05_Archimede.pdf

Bettinelli, B. (1988). *Le tresor d'Archimede*. Besançon: IREM de Franche-Comté

Bettinelli, B. (1991). Intuition et Demonstration chez Archimede. *Repères IREM*, (2), 12-29.

Brousseau, G. (1983). *Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas en Matemáticas.* Recuperado de http://fractus.uson.mx/Papers/Brousseau/ObstaculosBrousseau.htm

D'Enfert, R., Djebbar, A. & Radford, L. (2012) Dimensions historique et culturelle dans l'enseignement des mathématiques – Compte-rendu du Groupe de Travail n° 4. In J.-L. Dorier, S. Coutat (Eds) *Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT4, pp. 523-528). Recuperado el de http://www.emf2012.unige.ch/images/stories/pdf/Actes-EMF2012/Actes-EMF2012-GT4/EMF2012GT4CR.pdf

Díaz Barriga, E. (2001). *Transparencia y opacidad de una noción matemática: Objeto geométrico mediado por el entorno computacional Cabri-Géomètre, el caso del Principio de Cavalieri.* (Tesis inédita de doctorado). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

González, P. (2006). A un siglo del descubrimiento de “EL MÉTODO” de Arquímedes por Heiberg. [Electronic version]. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9 (3), 715–744. Recuperado dehttp://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=590

Hanna, G., (1989). Proofs That Prove and Proofs That Explain. In: G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the thirteenth conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, II, 45–51. Paris: PME.

Hanna, G., y Sidoli, N. (2007) Visualization and proof: a brief survey of philosophical perspectives. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*. 39(1–2), 73–78.

Jankvist, U. (2009). *Using History as a ‘Goal’ in Mathematics Education*. [Ph.D. dissertation]. Department of Science, Systems and Models, Roskilde University, Roskilde, Denmark. Recuperado de http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/pdf/464.pdf

Lee, Ch. y Tang, Ch. (2012). A comparative study on finding volume of spheres by Liu Hui and Archimedes. An educational perspective to secondary school students. In : *Proceedings of History and Pedagogy of Mathematics 2012*, 2, 449-505. Daejeon: HPM.

Merker, C. (2004). La Methode des indivisibles racontee lors d’un stage. *Repères IREM*, (54), 57-76.

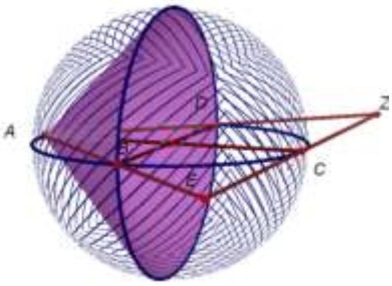
Montesinos, V. (2006). Cómo Arquímedes calculó el volumen de la esfera. *Polimedia de la Universidad Politécnica de Valencia.* Recuperado de https://polimedia.upv.es/visor/?id=98cf78f3-aa20-7142-bf3e-e8f19d6b1efb#

Thiele, R. (2003). Antiquity. In H. N. Jahnke (Ed.), *A History of Analysis*. History of Mathematics, 24, (1 –40). Providence: American Mathematical Society.

Anexo 1

La Demostración Mecánica

Arquímedes parte de la construcción de una esfera en la que se grafica el círculo máximo ABCD y sus dos diámetros perpendiculares AC y BD (González, 2006). A partir del diámetro BD se construye un círculo perpendicular al círculo ABCD, y teniendo como base el círculo BD se construye un cono que tenga como vértice al punto A (Fig. 1). La superficie del cono ABD se prolonga hasta llegar a cortar un plano paralelo a la base del cono que pasa por el punto C. La intersección del cono con el plano es una circunferencia perpendicular a AC con diámetro EZ (Fig. 2)



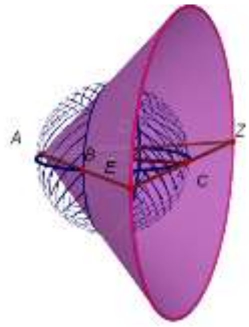
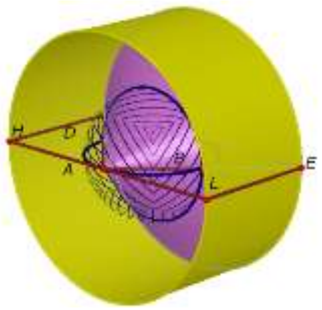


Fig.1 Fig. 2

A partir del diámetro EZ se construye un cilindro que tiene como eje AC y como generatrices a los segmentos EL y ZH (Figs. 3 y 4).



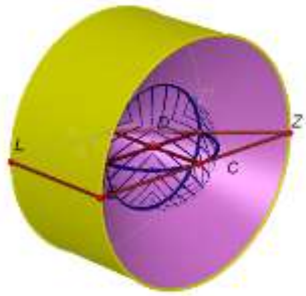


Fig. 3 Fig. 4

El diámetro CA se prolonga hasta construir AT de tal manera que AT = AC, considerándose a CT como una palanca, con A como punto medio. Se traza una recta paralela MN al diámetro BD, de tal forma que corta a la circunferencia ABCD en Q y O, que corta al diámetro AC en S, al segmento AE en P y a AZ en R (Fig. 5). Por MN se traza un plano perpendicular a AC que interseca al cilindro en la circunferencia de diámetro MN, que interseca a la esfera ABCD en la circunferencia de diámetro QO y que interseca al cono AEZ en la circunferencia de diámetro PR (Fig. 6).

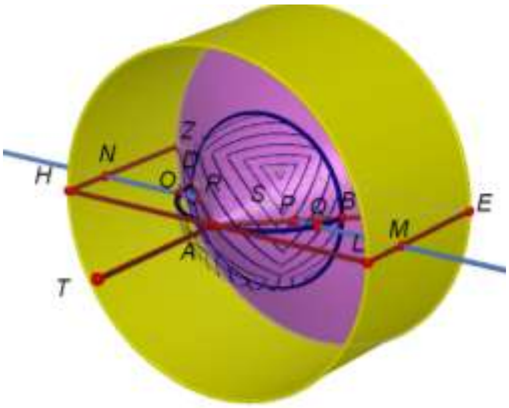


Fig. 5

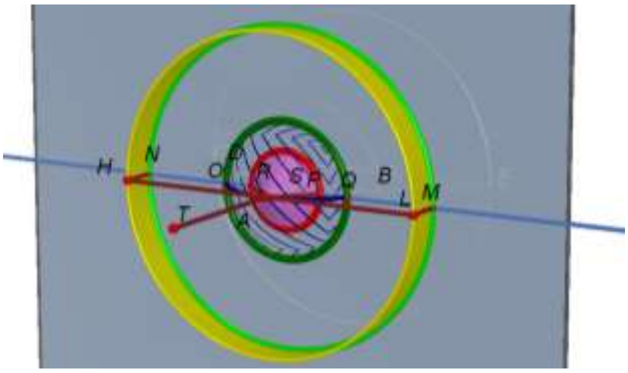


Fig. 6

La intersección del plano y el cilindro viene a ser una circunferencia que delimita una región circular. Lo mismo sucede con las intersecciones del plano con el cono y con la esfera. Considerando al punto A como punto medio de la palanca, trasladamos las regiones circulares formadas por la intersección del plano con el cono y con la esfera al punto T. Si multiplicamos el segmento AT por la suma de las áreas de las regiones circulares que están en T, el resultado será el mismo que la multiplicación del segmento AS por el área de la región circular formada por la intersección del plano con el cilindro. (Fig. 7).

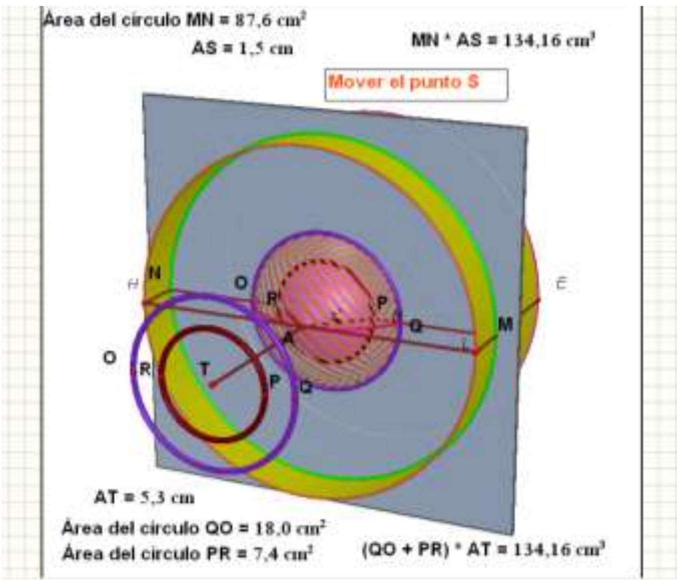


Fig. 7

Trasladándose los círculos se van llenando la esfera y el cono, los cuáles, manteniéndose el cilindro en el mismo lugar, se equilibran respecto al punto A, estando el centro de gravedad del cono y la esfera en el punto T, y el centro de gravedad del cilindro en el punto K (Fig. 8). De este proceso se puede afirmar que,

$$\boxed{\text{(Volumen de la esfera + Volumen del cono)} \times AT = \text{Volumen del cilindro} \times AK}$$

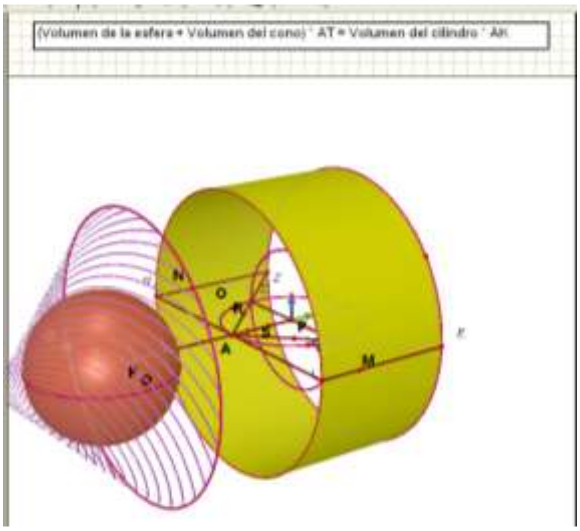


Fig. 8

De lo que resulta que el volumen del cilindro es al volumen de la esfera y el volumen del cono juntos, como TA es a AK. Pero TA es dos veces AK, por lo tanto el volumen del cilindro es el doble del volumen del cono y la esfera, y a su vez el volumen del cilindro es tres veces el volumen del cono (Euc., XII, 10). Entonces el volumen del cono AEZ es igual a dos veces el volumen de la esfera. Pero el volumen del cono AEZ equivale a 8 veces el volumen del cono ABD pues EZ es el doble de BD (Euc., XII, 12). Entonces 8 veces el volumen del cono ABD equivale a dos veces el volumen de la esfera; luego, el volumen de la esfera ABCD es igual al volumen de 4 conos ABD (Fig.9)

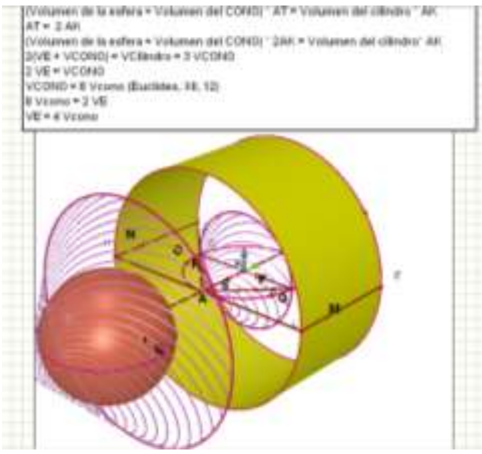


Fig. 9

Por B y D se trazan segmentos paralelos a AC que generan un cilindro que circunscribe a la esfera. El volumen de este cilindro es el doble del volumen del cilindro que circunscribe al cono ABD. A su vez, el volumen de este último cilindro es el triple del volumen del cono ABD. Por lo tanto el volumen del cilindro que circunscribe a la esfera es seis veces el volumen del cono ABD. Pero como se había demostrado antes, el volumen de la esfera es igual a cuatro veces el volumen del cono ABD. Por lo tanto, el volumen del cilindro es una vez y media el volumen de la esfera, o, el volumen de la esfera es las dos terceras partes del volumen del cilindro (Fig. 10).

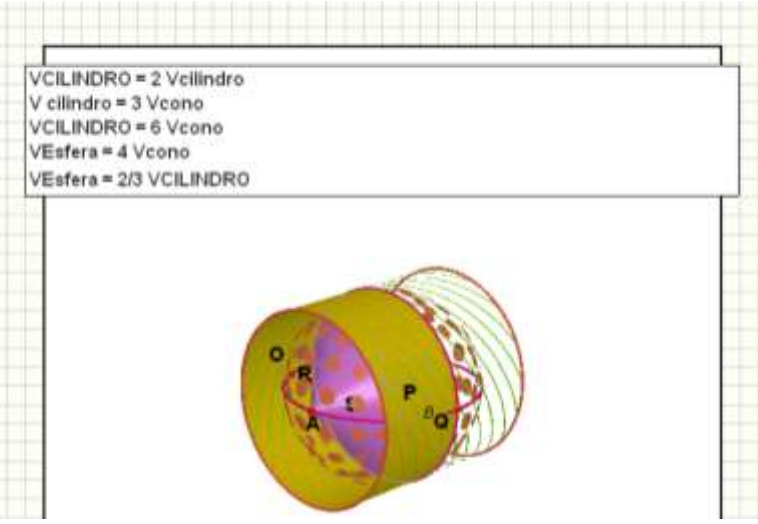


Fig. 10