EQUAÇÕES: ENTRE O MOVIMENTO HISTÓRICO-LÓGICO E O OBJETO DE ENSINO DA ÁLGEBRA

Maria Lucia Panossian – Manoel Oriosvaldo de Moura
malupanossian@hotmail.com – modmoura@usp.br
Faculdade de Educação _ Universidade de São Paulo _ Brasil

Tema: VII.1 – Relaciones entre Historia de la Matemática e Investigación en Educación Matemática.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Medio (11 a 17 anos)
Palabras clave: equação; ensino de álgebra; movimento histórico e lógico.

Resumen
No ensino escolar é impossível contemplar todo o conhecimento matemático historicamente acumulado. Neste sentido, são necessárias investigações que contribuam para o estabelecimento de critérios de definição do objeto de ensino da matemática. Recorrendo ao caso particular do ensino de álgebra, o objetivo deste texto é o de explicitar as relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e a constituição do objeto de ensino da álgebra. Entende-se que o objeto de ensino da álgebra deve contemplar os conceitos algébricos essenciais a serem apropriados e internalizados pelos estudantes por meio da formação do pensamento teórico (Davydov, 1982). O texto será organizado de forma a esclarecer como se compreende o movimento histórico e lógico dos conceitos (Kopnin, 1978), a partir da lógica dialética, que conduzirá o estudo particular do movimento histórico e lógico das equações (Radford, 2011) em suas variadas formas de pensamento e linguagem. Este fundamento teórico permitirá analisar os dados empíricos obtidos durante as discussões com um grupo de professores da rede pública de São Paulo no sentido de estabelecer relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o atual ensino de equações.

Introdução

Estabelecer os critérios que determinam o objeto de ensino de determinada área de conhecimento envolve estudos e pesquisas de dimensões psicológicas, epistemológicas, filosóficas, sociais, políticas, econômicas entre outras que influenciam e determinam as finalidades do ensino.

Neste texto serão destacadas questões relacionadas ao movimento histórico e lógico do conhecimento algébrico em busca de estabelecer relações com o que hoje está determinado como objeto de ensino da álgebra. Pretende-se expor isso através de um objeto particular da álgebra: as equações.

No Brasil, e de forma mais específica em São Paulo, como se pode identificar nos programas curriculares (São Paulo, 2008), a recomendação é que os estudantes tenham acesso ao conhecimento algébrico por volta da 6ª série, quando são introduzidas as sequências e equações, e os símbolos literais substituem os números. O aspecto técnico que este ensino adquire prolonga-se ao longo dos demais anos de escolaridade até o ensino médio e é fonte de dificuldades dos estudantes, que não compreendem o significado atribuído ao símbolo e mesmo ao conhecimento algébrico.

Este texto tem por objetivo apresentar relações entre o movimento histórico e lógico das equações e a organização de seu ensino e é parte da pesquisa de doutorado em andamento que investiga as relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o objeto de ensino da álgebra.

O movimento histórico e lógico dos conceitos

Parte-se do pressuposto de que a unidade do histórico e do lógico é premissa para compreender a essência de um objeto, de um conceito em sua estrutura, sua história, seu desenvolvimento. Kopnin (1978) indica que para revelar a essência do objeto é necessário reproduzir o processo histórico real de seu desenvolvimento. Por meio das abstrações autênticas, características do pensamento teórico (Davydov, 1982) é que se capta a essência do objeto ou fenômeno, suas definições primárias e abstratas.

Captar a essência de um objeto ou fenômeno e compreender o seu movimento que é histórico e lógico, é possível por meio dos princípios da lógica dialética que torna possível, além de identificar, caracterizar e classificar objetos e fenômenos, dar conta de seus movimentos, da relação entre eles. É a dialética, enquanto ciência que nos apresenta em que condições os contrários se tornam idênticos, enquanto coisas vivas que em diferentes condições se movem, se transformam uns nos outros (Lenin, 2011).

O materialismo dialético, enquanto método de conhecimento indica que o lógico enquanto movimento do pensamento, precisa estar relacionado ao movimento dos fenômenos do mundo objetivo, o histórico. Desta forma a essência poderá ser revelada. Os fenômenos do mundo objetivo se manifestam de diferentes formas, nem todas essenciais, mas carregam latente a essência, sempre histórica e concreta.

Reconhecer o movimento que é lógico e histórico dos fenômenos, permite que superemos as aparências, pois o conhecimento não avança somente através das sensações e percepções de nossos sentidos sobre a realidade objetiva e o estabelecimento de leis empíricas (Prado Jr., 1963), os conceitos não se formam como representações individualizadas e separadas umas das outras, mas sim nos processos de comunicação de uma coletividade e em função de experiências de muitos indivíduos.

Somente os sentidos não dão conta de reconhecer as interdependências que existem no trânsito dos fenômenos da realidade objetiva, pois esta se revela nas mediações do sistema interligado de conceitos. É o pensamento teórico que permite que se revele a conexão objetiva do geral e do singular, e estuda a interconexão dos objetos soltos dentro de um todo, e do sistema (Davydov, 1982).

Os conceitos formados através de processos de generalização e abstração teóricas contemplam em si os dados da percepção, do sensorial, mas não se reduzem a ele. Refletem a essência do objeto revelada no estudo do movimento lógico e histórico dos conceitos, por princípios da lógica dialética.

Sobre o movimento lógico e histórico de conceitos algébricos: o caso particular das equações.

A formação dos conceitos matemáticos não difere da formação de conceitos em geral. Inicialmente originados das necessidades humanas e das percepções das experiências sensíveis, passam por fases de elaborações conceituais e sistematizações, e alcançam alto grau de abstração, generalização e formalização gerando um sistema de conceitos (Prado Jr., 1963).

Como reconhecer a essência do conhecimento algébrico para posteriormente organizá-lo como objeto de ensino? Com base no movimento lógico e histórico dos conceitos recorremos ao estudo de registros históricos matemáticos (Boyer, 1996; Eves, 1995; Viète, 2006; Baumgart, 1992) que isoladamente podem ser considerados como singularidades, mas que mediados pelo processo de formação de conceitos, forma de pensamento teórica e compreendidos por meio da lógica dialética nos conduzem ao universal, a essência do conhecimento algébrico.

Destaca-se aqui uma síntese do estudo realizado para compreender o movimento histórico e lógico relacionado ao tópico equações.

Métodos para resolver equações podem ser encontrados desde os registros babilônicos. Em escrita cuneiforme, e recorrendo apenas a algarismos e palavras, os babilônios utilizavam um método paramétrico (Baumgart, 1992), que estabelece dois termos desconhecidos a partir da relação com um terceiro termo (o parâmetro), em geral relacionados a problemas do cotidiano. Os egípcios, por sua vez, recorriam a um método atualmente chamado de ‘ regra da falsa posição’. Neste método toma-se um número como solução falsa para resolver o problema. As diferenças encontradas entre o resultado atingido pela solução falsa e o resultado que deveria ser atingido, são tratados de forma proporcional para que se alcance a solução exata. Segundo Radford (2011), este método numérico de resolução de problemas possibilitou o desenvolvimento conceitual do raciocínio proporcional. A álgebra grega (entre 500 a.C e 300 a. C) também possuía métodos de resolução de equações, entretanto usava recursos geométricos.

Estes métodos revelam modos de ação particulares da humanidade para resolver os problemas do cotidiano, para solucionar determinadas situações. Reconhecido um modelo de situação identificada pelas grandezas envolvidas era necessário estabelecer relações entre elas e identificar um método de resolução. Desta forma os valores desconhecidos eram determinados. Por exemplo, segundo Baumgart (1992), a resolução de problemas envolvendo as noções de área e soma dos lados era muito comum. As relações eram estabelecidas por meio de símbolos numéricos ou geométricos e não alcançavam uma expressão geral.

A necessidade de resolver situações de forma cada vez mais generalizada começa a surgir. Diofanto recorre também a 'métodos' paramétricos e de ' falsa posição' como modos de ação para resolver os problemas, mas gera avanços por usar a abreviatura das palavras como representações ou indicações de objetos. Usa por exemplo, o termo 'arithmos' para se referir às quantidades indeterminadas e desta forma possibilita que sejam efetuados os cálculos. Este termo contempla a noção de incógnita, e substitui termos particulares como 'comprimento' e ' largura', usados pelos antigos escribas, portanto, trata-se de um conceito mais geral. Segundo Radford (2011) em função desta generalidade, o termo 'arithmos' se tornou um símbolo algébrico e carrega um conceito que pode ser aplicado a uma grande variedade de situações. Entretanto, sua generalidade está relacionada aos objetos matemáticos e não aos métodos de resolução. Conforme Eves (1995), ainda que possa ser atribuído a Diofanto o mérito de dar os primeiros passos rumo à notação algébrica, seus procedimentos careciam de métodos gerais. Para Radford (2011), os métodos de resolução de problemas encontrados em Diofanto visam produzir tantas soluções quantas se queira, mas não descrever todas elas.

Por muito tempo a preocupação na resolução de problemas seria a de encontrar o valor desconhecido e não métodos gerais de resolução. O livro Al-jabr Wa'l muqabalah, do matemático Mohammed ibu-Musa al-Khowarizmi (do ano 830 aproximadamente), foi escrito com palavras e números características da álgebra retórica, está mais próximo da álgebra elementar de hoje por conter uma exposição direta da resolução de equações, principalmente as de segundo grau (Boyer,1996), e com uma exposição sistemática apresenta seis casos de equações lineares e quadráticas com raízes positivas.

A *'Algebra'* de Omar Khayyan (1050-1122), incluía também a resolução de equações de terceiro grau. Apesar de considerar que estas equações só poderiam ser resolvidas por métodos geométricos e não aritméticos, Khayyan deu o passo importante de generalizar o método para cobrir todas as equações de terceiro grau.

Mas o salto de qualidade, em relação à manifestação da linguagem e forma de pensamento algébrico é dado com Viète (1540-1603). O fato de atribuir letras para os valores desconhecidos, mas também para os valores conhecidos da equação, o que hoje entendemos por parâmetros, ajudou muito no desenvolvimento da álgebra. A intenção de Viète com sua Introdução à Arte Analítica (Viète, 2006) era resolver todos os problemas. Para Viète, a álgebra era um método de cálculo simbólico envolvendo grandezas abstratas, que ele manipulava independentemente da sua natureza. Por esta razão, foi necessário criar procedimentos simbólicos de cálculo que pudessem ser aplicados tanto a grandezas geométricas, quanto a numéricas. Um único símbolo devia poder representar diferentes tipos de grandezas.

Se a álgebra de Diofanto tratava ainda de casos particulares e gerava uma metodologia para resolver cada tipo de equação que encontrava, uma forma de generalização empírica em que a preocupação principal era encontrar o elemento desconhecido (a incógnita), em equações com coeficientes numéricos específicos, a introdução de Viète de consoantes para representar quantidades conhecidas e vogais para identificar quantidades desconhecidas gerou avanços no sentido de possibilitar o tratamento das equações de forma geral.

Estes registros já nos são suficientes para revelar parte do movimento que envolve o surgimento e o desenvolvimento das equações. É necessário reconhecer que o estágio atual do desenvolvimento da álgebra não se resume ao estudo de equações. As equações se constituem como o instrumento próprio para determinar os valores desconhecidos nas situações problemas relacionando-os aos valores conhecidos. O aperfeiçoamento dos métodos de resolução das equações bem como de seu registro simbólico permite que este instrumento seja usado não só para resolver problemas cotidianos mas também de natureza interna da própria matemática.

Consideramos assim que as equações revelam um momento particular da essência do conhecimento algébrico: a possibilidade de estabelecer relações entre grandezas de forma geral, recorrendo aos símbolos em busca de encontrar valores desconhecidos.

A organização do ensino de equações

O movimento histórico e lógico das equações se dissolve quando estas são tratadas como conteúdo de ensino. Reforçam-se as diferentes técnicas para resolver equações, encontrar a solução de um problema específico, investindo em recursos e metodologias diferenciadas. Não se proporciona aos estudantes o que seria então sua essência, a possibilidade de a partir de um problema particular identificar grandezas (numéricas, geométricas ou de outra espécie), estabelecer relação entre elas e então generalizar métodos de resolução de problemas que tratem das grandezas abstratamente.

A organização do ensino de equações enfatiza este conhecimento a partir de sua forma simbólica no estágio mais formalizado e reforça os métodos de resolução de modelos particulares de equações.

As equações também são tratadas como traduções em linguagem matemática de situações-problemas, em que os estudantes substituem as palavras da linguagem comum por letras, na tentativa de criar uma equação adequada. Neste sentido não identificam claramente as grandezas e nem estabelecem a relação entre elas, orientando-se apenas pelo modo de escrita do problema.

Este fato foi discutido, durante o primeiro semestre de 2011, em um curso para professores intitulado 'Atividades de Ensino de álgebra a partir dos fundamentos da teoria histórico-cultural', de onde foram coletados os dados empíricos da pesquisa. O objetivo do curso era discutir com os professores a organização do ensino de álgebra, apresentando elementos históricos sobre os conceitos algébricos; filosóficos, psicológicos em relação às formas de pensamento empírica e teórica. Os professores participantes do curso pertenciam à rede pública de ensino do Estado de São Paulo, e as situações de aprendizagem discutidas pertenciam aos cadernos de aluno e professor da proposta curricular do Estado de São Paulo (São Paulo, 2008).

A análise inicial dos dados obtidos indica a carência de discussões históricas e filosóficas acerca do processo de elaboração do conhecimento. O desconhecimento acerca do processo de formação de conceitos algébricos em diferentes momentos históricos, e de possibilidades para o trabalho em sala de aula, faz com que a álgebra simbólica no seu estágio atual mais sistematizado e formalizado tenha presença marcante nas situações de ensino apresentadas, desconsiderando-se todo o movimento histórico que originou este estágio simbólico.

Durante as discussões, os professores realizaram uma análise crítica sobre uma afirmação contida no Caderno do Professor da 6ª série (7º. ano).

> Uma equação nada mais é do que uma pergunta feita em linguagem matemática, usando números, letras e o sinal de igualdade. A existência de uma letra cujo valor se quer descobrir (incógnita) é o que faz da equação o equivalente a uma pergunta na língua materna. Mesmo dentro de um contexto exclusivamente matemático, uma equação como 2x +3 = 13 pode ser entendida como uma pergunta do tipo: qual é o número cujo dobro somado com 3 resulta em 13? (São Paulo, 2010a, p.29)

Em sua análise a professora escreve a respeito que:

> Seria mais adequado dizer que ela pode ser interpretada como uma pergunta, conforme aparece no final do parágrafo, entretanto o ideal é propor situações de aprendizagem que proporcionem a construção do conceitual de equação. Apresentar imediatamente a definição e representação da mesma é pular uma fase do processo de desenvolvimento que a história da matemática ensina que compreender os conceitos de variável e incógnita foi difícil para a humanidade e que a utilização das letras para representa-las surgiu muito após sua compreensão. (Professora A., 2011)

Se o que se pretende é que o aluno resolva a equação, determine o valor da incógnita como era a necessidade dos babilônios, dos egípcios e dos gregos antigos, o recurso metodológico de compreender a equação como um problema é viável, entretanto para associar que uma equação é uma tradução em linguagem matemática de um problema, deve considerar que esta ‘tradução’ requer o reconhecimento das grandezas envolvidas bem como das relações entre elas, registrando-as através de símbolos ou letras, ou representações geométricas.

Outra professora analisando situações de ensino de equações do segundo grau apresentadas no caderno do aluno da 8ª série/9º ano (São Paulo, 2010b), e suas experiências ressalta que os estudantes compreendem aritmeticamente as situações, mas tem dificuldades em trata-la simbolicamente. Isso por que não se trata de trocar a linguagem comum pelos símbolos, mas atribuir aos símbolos o significado de uma grandeza ou de um valor que se pretende determinar no problema, e estabelecer as relações.

Relata ainda que após a apresentação de algumas situações-problema os exercícios do caderno passam a ser de resolução técnica de equações e ressalta:

> […] ele traz a ideia de trabalhar a técnica, e estávamos na discussão de quanto a técnica faria que o aluno entendesse realmente a situação, […]dá um exemplo de cada para o aluno aplicar técnica uma vez e se apropriar daquela forma de resolução[…]e eu não queria ficar presa só nisso, uma equação deste tipo não é suficiente para que o aluno se aproprie daquele conceito[…]mesmo da técnica, e eu estava tendo que ficar presa nisso[…]tem situações muito interessantes, bem contextualizadas, mas insuficientes para o aprendizado do aluno…e aí a compreensão do conteúdo, da equação em si, fica um pouco perdida. (Professora T, 2011)

O privilégio da técnica causa desconforto a esta professora que percebe que seus estudantes não atribuem sentido ao que estão realizando. Dessa forma, pode-se questionar qual a relação do aperfeiçoamento técnico dos métodos de resolução com a aprendizagem conceitual da relação entre as grandezas que a álgebra possibilita por meio das equações. Quanto mais diversificadas as técnicas mais o aluno compreende o que é uma equação, considerando-as como instrumento para solucionar problemas, atribuindo-lhe sentido e significado?

O equilíbrio a ser atingido no ensino entre a técnica e o conceito de equação depende da compreensão do desenvolvimento histórico deste objeto do conhecimento. Puig e Rojano (2004) indicam que a ideia é olhar para o futuro do ensino e aprendizagem da álgebra em termos de que lições podem ser extraídas de uma perspectiva histórica Ignorar momentos em que as equações foram usadas como instrumentos para resolver situações-problema específicas, ou momentos em que foram estudadas como objeto para representar e resolver qualquer tipo de problema é ignorar o movimento do processo de conhecimento. Pois antes de se tornarem objetos de estudo da ciência matemática, as equações foram instrumentos para resolver problemas, onde as grandezas eram identificadas e relacionadas.

Referencias Bibliográficas

Baumgart, J. K. (1992). *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula*. Álgebra. São Paulo: Atual.

Boyer, C. B. (1996). *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blucher Ltda.

Davýdov, V. V. (1982). *Tipos de generalización en la ensenanza*. Havana: Pueblo y Educacion.

Eves, H. (1995). *Introdução à História da matemática*. Campinas: Ed.Unicamp.

Kopnin, P. V. (1978). *A dialética como lógica e teoria do conhecimento*. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira.

Lenin, W. I. *Cadernos sobre a dialética de Hegel.* Rio de Janeiro. Editora UFRJ.

Prado Jr., C. (1963) *Dialética do conhecimento*. 4ed. São Paulo: Brasiliense.

Puig, L.; Rojano, T. (2004). The History of algebra in mathematics education. In: Stacey, K; Chick, H.; Kendal, M. (org.). *The future of the teaching and learning of algebra*: the 12th ICMI Study. Kluwer Academic, pp.189-226.

Radford, L. (2011). *Cognição Matemática: História, Antropologia e Epistemologia.* São Paulo: Editora Livraria da Física.

São Paulo, Secretaria da Educação. (2008). *Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática*. São Paulo: SEE.

São Paulo (2010a). *Caderno do professor: matemática, ensino fundamental, 6ª. Série/7º ano*, v.4. São Paulo: SEE.

São Paulo (2010b). *Caderno do professor: matemática, ensino fundamental, 8ª. Série/9º ano*, v.2. São Paulo.

Viète, F. (2006). *The Analytic Art*. New York: Dover Publications.