ENTRAMADO DE LENGUAJES EN ALGEBRA LINEAL

Ana E. Rosso, Julio C. Barros

arosso@exa.unrc.edu.ar, jbarros@exa.unrc.edu.ar

Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Físico-Químicas y Naturales

Universidad Nacional de Rio Cuarto. Rio Cuarto- Córdoba -Argentina

Modalidad: Comunicación breve

Nivel: Universitario

Temas: Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática .I.1 .- Pensamiento Algebraico.

Palabras claves: lenguajes y representaciones, Algebra lineal, trasposición didáctica.

Resumen

El estudio del Algebra Lineal emplea diferentes lenguajes y representaciones para desarrollar su teoría. Es posible distinguir tres lenguajes básicos: *geométrico, aritmético y algebraico*, además de una variedad de representaciones. Esta diversidad de representaciones semióticas es necesaria en la actividad matemática, pues los objetos no pueden percibirse directamente y deben simbolizarse para expresar el pensamiento. Estos diferentes lenguajes y representaciones inducen distintas maneras de abordar un concepto, proponiendo formas de pensar y marcos de trabajo diferenciados, que requieren de habilidades y destrezas para cambiar constantemente de un lenguaje a otro. De acuerdo a nuestra investigación, para la enseñanza del Algebra Lineal se deberían considerar los siguientes objetivos a la hora de plantear la transposición didáctica: a) propiciar el trabajo con las diferentes formas de representación como manera de favorecer la independencia del concepto respecto al lenguaje usado y a sus representaciones. b) Explicitar la convención usada que liga el lenguaje coloquial con el lenguaje formal, atenuando la polisemia subyacente en los símbolos utilizados. El poder expresar en lenguaje coloquial lo que los símbolos expresan y por otro lado ser capaz de expresar e interpretar los resultados de manera simbólica es una práctica necesaria para avanzar en el aprendizaje del Algebra.

Introducción

"…Preguntémonos si nuestro lenguaje es completo; si lo era antes de que el simbolismo de la química y la notación del cálculo infinitesimal se incorporaran a él; puesto que éstos son, por así decirlo, suburbios de nuestro lenguaje. Nuestro lenguaje puede ser

considerado como una ciudad antigua: un laberinto de pequeñas calles y plazas, de casas nuevas y viejas, y de casas con agregados de distintos períodos; y todo esto rodeado por una multitud de barrios nuevos con calles rectas y regulares y con casas uniformes.”

El epígrafe corresponde a Ludwig Wittgenstein, y nos invita a la reflexión, como docentes, preguntarnos cómo enseñar Algebra Lineal y replantearnos la forma de abordar la enseñanza de conceptos tales como los espacios vectoriales y del Álgebra Lineal como objeto más amplio. Por lo general pretendemos conducir a nuestros alumnos por las *calles rectas y regulares* de la formalización, mostrando una teoría unificada y generalizada sin mencionar siquiera que estamos mostrando los *suburbios de un lenguaje* recientemente anexado al lenguaje de las matemáticas. En esta línea de reflexión se puede puntualizar que, en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Algebra Lineal se presentan dificultades asociadas al carácter abstracto de los conceptos tratados en esta rama de la matemática, lo que dificulta la contextualización a la realidad del estudiante. Tradicionalmente, los conceptos se presentan a través de definiciones formales de objetos que, en la mayoría de los casos, tienen poca o ninguna conexión con los conocimientos previos del sujeto. No es natural derivar las definiciones de situaciones provenientes de la realidad o utilizando argumentos geométricos, si bien estos conceptos son de gran aplicación.

Lenguajes, sistemas de representación y dificultades asociadas

En el aprendizaje de esta asignatura, (Dorier 2002), es posible clasificar las dificultades de los estudiantes en ***conceptuales***, que provienen de la naturaleza misma de la asignatura y en ***cognoscitivas***, que emergen del tipo de pensamiento necesario para la comprensión de estos conceptos. Las dificultades conceptuales provienen de la naturaleza misma del Algebra Lineal, ya que los conceptos son abstractos y se utiliza una variedad de lenguajes y representaciones semióticas dificultando aún más su aprendizaje. En este uso de diferentes lenguajes y representaciones subyacen distintas formas de abordar un concepto, proponiendo formas de pensar y marcos de trabajo diferenciados que requieren cambiar constantemente de un lenguaje a otro, lo que trae aparejado dificultades cognoscitivas.

El Algebra Lineal es, según Dorier, un ‘'compuesto explosivo” de lenguajes y sistemas de representación. Es posible distinguir el uso de tres lenguajes básicos: **el *geométrico, el aritmético y el algebraico***. Además de esos lenguajes, se utiliza también una **variedad de representaciones:** registros gráficos, tabulares y simbólicos de los lenguajes, sin dejar de lado las representaciones cartesianas y paramétricas. Esta variedad de representaciones semióticas son necesarias en la actividad matemática, pues los objetos no pueden percibirse directamente y deben representarse para poder expresar el pensamiento.

Creemos que, la desarticulación entre los distintos lenguaje proviene, en parte, de la falta de un trabajo sistemático con ejercitación donde se entremezclen los espacios vectoriales más “tradicionales” con los otros más “extraños”, como una manera de evidenciar y entender la coexistencia de los lenguajes mencionados. A la vez, ese trabajo permitiría analizar e interpretar situaciones donde diferentes lenguajes estén presentes, como una forma de caracterizar la estructura algebraica en estudio, independiente del lenguaje subyacente lo que proporciona una visión más global y completa del objeto algebraico, permitiendo construir la invarianza del concepto respecto al lenguaje utilizado.

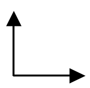
Análisis de la situación:

En una clase de AL es común tener situaciones que registren los siguientes planteos:

a) **Uso de diferentes formas de representación**

Las diferentes formas de representación de los subespacios y en general de los conceptos algebraicos, tienen por objetivo independizar el concepto del lenguaje usado para su representación. Pero esta variedad de representaciones inducen a su vez dificultades en el proceso de enseñanza aprendizaje, pues no siempre resulta claro que ellas representen a un mismo objeto. A lo que se agrega la forma de trabajo propia del Algebra, que pasa de una representación a otra para ayudar a dar significado al concepto en estudio.

A modo de ejemplo veamos el siguiente cuadro.

Objeto	Representaciones		
	Registro Gráfico	Registro Aritmético	Registro Algebraico
Base		$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$	$\{e_1, e_2\}$

Este único concepto es usado de manera indistinta en al menos las tres representaciones dadas.

b) Interferencia entre Lenguaje Coloquial y Lenguaje Formal

El siguiente ejemplo muestra una dificultad subyacente al informar en lenguaje coloquial una definición dada en lenguaje algebraico. Esta “traducción” suele adolecer de ambigüedades, lo que luego se traduce en errores de operatividad del concepto. En general no se explicita y/o trabaja con ambas representaciones a fin de establecer la correspondencia que existe entre ambas,

Ejemplo

Lenguaje algebraico: *Dados* S_1, S_2 *subespacios de un K-espacio vectorial entonces,* $S_1 + S_2 = \{v \in V : v = v_1 + v_2, v_1 \in S_1, v_2 \in S_2\}$

Lenguaje Natural: *"La suma de dos subespacios de un espacio vectorial está constituida por los elementos del espacio vectorial que resulta de la suma de **un** elemento del primer subespacio y **un** elemento del segundo subespacio."*

La palabra *un* expresada en lenguaje natural suele ser interpretada literalmente como un sólo elemento de cada subespacio y al momento de caracterizar la suma de dos subespacio se toma sólo un elemento en cada conjunto para determinar la suma de los subespacios.

c) Coexistencia de lenguajes

En una situación como la siguiente se ensamblan los lenguajes algebraico, geométrico y aritmético y se espera, del estudiante, que pueda pasar de uno a otro de manera natural para dar solución al problema planteado.

Dados los subespacios $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in IR^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ *y* $S = gen\{(1,0,-1),(0,1,1)\}$ *Determinar una base para* $W \cap S$ *e interpretar geométricamente.*

Analicemos cuáles son los lenguajes y representaciones en este problema.

Para determinar una base de $W \cap S$ se tiene $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in IR^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $S = gen\{(1,0,-1),(0,1,1)\}$. Observamos que W está representado en forma implícita y S está dado través de sus generadores. Desde el punto de vista geométrico cada uno representa un plano. El lenguaje aritmético está presente al representar de manera paramétrica ambos subespacios. Es de hacer notar que entre los conceptos puestos en juego en esta situación tenemos: conjunto de generadores, independencia lineal, base, subespacio generado, planos y rectas en el espacio. En conclusión, al tratar de hallar una base de $W \cap S$ hay tres lenguajes y al menos dos representaciones que entran en sinergia!

Con los ejemplos anteriores simplemente hemos querido ilustrar algunas de las dificultades con que nos enfrentamos en nuestra práctica docente y que de ninguna manera es exhaustiva. Teniendo en cuenta estas dificultades y otras, hemos formulado la siguiente propuesta.

Nuestra Propuesta

Formular una *secuencia didáctica* que conjugue el uso de los distintos lenguajes y representaciones, propiciando diferentes marcos de trabajo matemático. De acuerdo a nuestra investigación, (Rosso-Barros 2010, 2011), para la enseñanza del Algebra Lineal se deberían considerar los siguientes objetivos a la hora de plantear la transposición didáctica: a) propiciar el trabajo con las diferentes formas de representación como manera de favorecer la independencia del concepto respecto al lenguaje usado y a sus representaciones. b) Explicitar la convención usada que liga el lenguaje coloquial con el lenguaje formal, atenuando la polisemia subyacente en los símbolos utilizados.

Para construir nuestra secuencia adherimos con Brousseau en cuanto que hay tres **tipos de situaciones didácticas:** son las situaciones de **acción,** de **formulación y** de **validación**:

- situaciones de **acción**: el alumno debe actuar sobre un medio (material o simbólico); la situación requiere solamente la puesta en acto de conocimientos implícitos.
- situaciones de **formulación:** un alumno (o grupo de alumnos) emisor debe formular explícitamente un mensaje destinado a otro alumno (o grupo de alumnos) receptor que debe comprender el mensaje y actuar (sobre un medio, material o simbólico) en base al conocimiento contenido en el mensaje.
- situaciones de **validación**: dos alumnos (o grupos de alumnos) deben enunciar aserciones y ponerse de acuerdo sobre la verdad o falsedad de las mismas. Las afirmaciones propuestas por cada grupo son sometidas a la consideración del otro grupo, que debe tener la capacidad de “sancionarlas”, es decir ser capaz de aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas, oponer otras aserciones.

Teniendo en cuenta esto, en una primera instancia es conveniente trabajar ejemplos factibles de representación geométrica, donde la intuición y los modelos intuitivos permiten fácilmente confrontarlos con el modelo teórico (abstracto); a la vez que se ponga en evidencia el modelo implícito que el sujeto tiene de esta noción. El trabajo con los espacios vectoriales IR^2 y IR^3, permiten, mediante el uso del lenguaje geométrico, no solo una visualización concreta de los objetos del espacio vectorial (EV), donde la intuición puede ayudar a validar algunos aspectos teóricos y formales de EV, sino que sirve para ayudar a construir un modelo paradigmático de EV que permita luego extrapolar las propiedades invariantes de EV.

La construcción de un modelo intuitivo se basa en la necesidad de reducir el nivel de abstracción que posee el concepto. Por las razones antes mencionadas se incorporó el uso de las TIC como herramienta facilitadora para la visualización de los aspectos geométricos en los EV y en las transformaciones lineales, visualización que aporta una cierta heurística ayudando a la articulación del uso de diferentes lenguajes. Esto a su vez permitió relacionar el lenguaje algebraico con el geométrico. Se utilizaron los software Octave y Geogebra; ambos software libres. Geogebra se usó para analizar las modificaciones producidas por las diferentes transformaciones lineales.

Con las actividades planteadas se trató de mejorar la intuición geométrica respecto de los sistemas de ecuaciones lineales y de los subespacios en IR^2 y IR^3, pudiendo anticipar y/o corroborar. Con el trabajo de las transformaciones lineales se ayudó a la visualización de los distintos efectos que estas aplicaciones realizan.

Además, es necesario trabajar con EV representables por modelos explícitos, ya que este trabajo facilita la representación con el lenguaje aritmético donde las operaciones sobre los elementos es manipulable con un buen uso de las propiedades aritméticas y conforma una modalidad de trabajo que acerca al sujeto a las operaciones de formalismo en caso concretos de operatividad.

En relación al punto b) si se realiza un trabajo sostenido en cada tema donde se explicite la convención presente en el lenguaje coloquial y se lo refiera con el lenguaje formal, ello permite atenuar la polisemia subyacente en los símbolos utilizados. Un trabajo de ida y vuelta con ambos lenguajes facilitará la interpretación del lenguaje formal.

Esta forma de trabajo ayuda a que los alumnos adquieran ***una visión de los objetos matemáticos como invariantes de sus múltiples representaciones***.

Las actividades se diseñan teniendo como objetivo que al finalizar el Curso los alumnos manejen los aspectos operatorios y conceptuales básicos del Algebra Lineal para establecer las propiedades que caracterizan a los espacios vectoriales en sus diferentes formas de definición, otorgando importancia a los diferentes lenguajes subyacentes a fin de establecer cuando sea posible un isomorfismo operativo entre los lenguajes.

A modo de ejemplo planteamos una secuencia didáctica que atiende a los puntos antes mencionados.

Objetivos de la actividad

* Poner en juego la relación entre el lenguaje algebraico y geométrico.

* Propiciar la relación entre lenguaje algebraico y aritmético.

* Propiciar la manipulación aritmética y la interpretación de resultados

* Establecer distintas representaciones para subespacios.

* Distinguir entre variables y parámetros.

a**) Acción**: los alumnos deben resolver grupalmente (no más de tres personas) las siguientes situaciones.

1) Dados los siguientes subespacios:

$S_1 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ 3x_1 + 2x_2 = 0\}$, $\quad S_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ 3x_1 + 2x_2 = 0\}$,

$S_2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ 3x_1 + 2x_2 = 0 \ , \ x_3 - x_1 = 0\}$

a) Represente gráficamente cada uno de estos subespacios. Compare las representaciones. ¿Hay alguna relación entre S_1 y S_2? ¿y entre S_2 y S_3? Explique.
b) Diga cuál es el espacio ambiente donde están incluidos cada uno de estos subespacios.
c) Desde el punto de vista geométrico, cual es el nombre de a cada uno estos subespacios.
d) De acuerdo a lo contestado en c)
   ¿Por cuántas ecuaciones queda determinada una recta en $\mathbb{R}^3$?
   ¿Por cuántas ecuaciones queda determinada una recta en $\mathbb{R}^2$?
   ¿Por cuántas ecuaciones queda determinado un plano en $\mathbb{R}^3$?
   ¿Las respuestas dadas son válidas para cualquier recta en$\mathbb{R}^2$, para cualquier recta en $\mathbb{R}^3$, para cualquier plano en $\mathbb{R}^3$?
e) Proponga sistemas de generadores para S_1 ,S_2 y S_3 . Escriba ecuaciones paramétricas que representen cada uno de los subespacios.
f) ¿Los sistemas de generadores propuestos para S_1 ,S_2 y S_3, son bases de ellos?
g) ¿Cómo mínimo cuántos vectores son necesarios para generar una recta en $\mathbb{R}^3$?
   ¿Cómo mínimo cuántos vectores son necesarios para generar una recta en $\mathbb{R}^2$?
   ¿Cómo mínimo cuántos vectores son necesarios para generar un plano en $\mathbb{R}^3$?
   ¿Las respuestas dadas son válidas para cualquier recta en $\mathbb{R}^2$, para cualquier recta en $\mathbb{R}^3$, para cualquier plano en $\mathbb{R}^3$?
h) Usando Octave, represente nuevamente los subespacios S_1 ,S_2 y S_3 . Compare con los gráficos que obtuvo en a).
i) Dar un subespacio W_1 de $\mathbb{R}^3$ definido por ecuaciones y diga desde el punto de vista geométrico que ente es (plano, recta). Halle un sistema de generadores para W_1 .
j) Dar un subespacio W_2 de $\mathbb{R}^3$ definido por generadores y diga desde el punto de vista geométrico que ente es (plano, recta). Halle ecuaciones que definan a W_2 .

b) **Formulación:** Después de la resolución de las cuestiones planteadas (con el docente atendiendo las consultas de los alumnos). La solución de cada ítem es explicada por cada grupo, escribiendo la solución en el pizarrón.

 ISSN 2301-0797

c) **Validación:** En esta instancia se discute entre todos los grupos y el docente como moderador. Se tratará de inducir las generalizaciones factibles.

A modo de reflexión

El manejo de los diferentes lenguajes y representaciones y el cambio constante de uno a otro que realiza el docente de manera natural es una dificultad adicional con la que se encuentra el estudiante a la hora de abordar el aprendizaje de estos conceptos abstractos. Al estudiante no le resulta fácil operar con los diferentes lenguajes, ni le resulta demasiado comprensible los alcances de cada representación y la necesidad de formalización que se requiere para poder establecer generalizaciones y construir los invariantes de la teoría. Esta forma de trabajo, propia del Algebra Lineal y de otras asignaturas de la Matemática, es un ejercicio que hay que realizar en todas las instancias del proceso de enseñanza y de aprendizaje como una forma de introducir al estudiante en la dinámica propia de esta ciencia. El poder expresar en lenguaje coloquial lo que los símbolos expresan y por otro lado ser capaz de expresar e interpretar los resultados escribiéndolos de manera simbólica es una práctica necesaria para avanzar en el estudio del Algebra y de Matemática toda.

Bibliografía:

Alves Días, M. & Artigue, M (1995). *Articulation problems between different systems of symbolic representations in linear algebra*. In L. Meira (ed), Proceeding of the 19th International Conference on de Psychology of Mathematics Education, Vol II, pp. 34-41. Recife, Brazil.

Dorier J. L. (1997) *The role of formalism in the teaching of the theory of vector space. Linear Algebra and its applications.*

Dorier J. L. (2002)

Hillel J. (2000), *Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra*. in J-L. Dorier (Ed.), On the Teaching of Linear Algebra, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp 191–207.

Ouicab R., Oktaç A (2006) *Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámico*. RELIME, Año 9, vol. 003, pag 459-490

Molina, J l, Oktaç A. (2007) *Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática. Educativa

Rosso A. Barros J. (2011) *Permanencia de algunos conceptos de espacios vectoriales y su operatividad.* Actas de Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (II ENEM).

Rosso A. Barros J. (2010) *Caracterización de algunos errores presentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de espacios vectoriales* **.** III REPEM. EdUNLPam. La Pampa. Argentina. Agosto 2010. Pág. 75-76.

Sierpinska A. (2000). *On some aspects of student's thinking in linear algebra.* In J. L. Dorier (Ed.), On the Teaching of Linear Algebra (pp. 209–246). Holland: Kluwer.

Sierpinska A. (1996). *Problems related to the design of the teaching and learning process in linear algebra*. Research Conference in Collegiate Mathematics Education. USA: Central Michigan University.