A RESOLUÇÃO DE TAREFAS COM PADRÕES FIGURATIVOS E A GENERALIZAÇÃO

Ana Barbosa – Isabel Vale
anabarbosa@ese.ipvc.pt – isabel.vale@ese.ipvc.pt
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Portugal

Tema: La Resolución de Problemas como Vehículo del Aprendizaje Matemático
Modalidade: CB
Nível educativo: Formação Inicial de Professores
Palavras chave: Padrões, visualização, generalização, resolução de problemas

Resumo
Os padrões são uma poderosa estratégia de resolução de problemas e o seu estudo torna possível o desenvolvimento de ideias matemáticas fundamentais, como a generalização, onde visualização tem um papel importante. O trabalho num projeto sobre padrões, desenvolvido recentemente, mostra como este tema permite ampliar conceitos, ideias e procedimentos matemáticos, dando-lhes significado através de contextos figurativos. A nossa principal preocupação é destacar a importância dessa componente visual na generalização, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Nesta comunicação, apoiada em dados empíricos desenvolvidos com alunos da formação inicial de professores, apresentam-se alguns resultados onde se analisa de que modo é que uma proposta didática baseada na resolução de tarefas desafiantes que envolvem padrões em contextos figurativos contribui para o desenvolvimento da generalização.

Introdução

O trabalho realizado no âmbito do Projeto *Matemática e Padrões no ensino básico: perspetivas e experiências curriculares de alunos e professores*, cuja equipa integramos, evidenciou que o recurso à resolução de tarefas centradas na exploração de padrões, nas quais se privilegiam contextos figurativos, permite construir e aprofundar capacidades e conceitos matemáticos, salientando-se uma aprendizagem com significado. A generalização, que é uma das componentes mais importantes do conhecimento matemático e a base do pensamento algébrico, emerge naturalmente neste tipo de tarefas, já que existe uma relação estreita com o estudo de padrões. A exploração de padrões promove a formulação e justificação de generalizações, facilitando, em particular, a transição da aritmética para a álgebra e o desenvolvimento de capacidades de ordem superior. Destacam-se também vantagens na mobilização de capacidades visuais, através de contextos figurativos, no desenvolvimento do pensamento algébrico, considerando que, desta forma, no processo de generalização, os alunos contactam com a componente dinâmica da construção conceptual dos objetos e conceitos matemáticos, atribuindo mais facilmente significado às expressões e aos símbolos (e.g. Barbosa, 2011; Rivera, 2007; Vale, 2012). Algumas reflexões que temos efetuado sugerem que os padrões podem ser um importante contributo para um ensino da Matemática com qualidade, apelando à curiosidade, à investigação autónoma e ao pensamento crítico dos alunos.

Dos padrões à generalização

A generalização desempenha um papel crucial na atividade de qualquer matemático, sendo considerada uma capacidade inerente ao pensamento matemático em geral. A procura de padrões tem vindo a ser associada à generalização, considerando-se que poderá conduzir naturalmente à expressão da generalidade (Mason, 1996). Este tipo de tarefas poderá ser um veículo poderoso para a compreensão de relações entre quantidades e, também, constituir uma forma concreta e transparente de os alunos começarem a debater-se com as noções de generalização e abstração. Espera-se ainda que, através desta abordagem, sejam capazes de mais facilmente atribuir significado à linguagem e ao simbolismo usados na álgebra.

Salientando a relevância da procura de padrões, para Kaput (1999), generalizar significa continuar a linha de raciocínio para além do caso(s) considerado(s), identificando de forma explícita a regularidade entre casos, ou elevando o raciocínio a um nível onde o foco deixa de estar nos casos ou na situação inicial, passando a centrar-se nos padrões, procedimentos, estruturas e relação entre eles. É também importante refletir sobre a relação entre a estrutura dos padrões e a formulação de generalizações. Segundo Threlfall (1999) os padrões de repetição contribuem de forma significativa para o desenvolvimento de determinadas capacidades: servem de contexto para ensinar outros conteúdos; podem conduzir às ideias de ordem e comparação; constituem um veículo para introduzir e interpretar símbolos, essenciais na álgebra, constituindo um contexto para desenvolver a capacidade de generalizar. Warren (2008) reforça também as potencialidades dos padrões de repetição para promover a generalização. É possível, através desta abordagem, solicitar ao aluno a descoberta de um termo numa determinada posição na sequência sem ter necessidade de a continuar recursivamente. A identificação da unidade de repetição e a compreensão da estrutura global do padrão permitem ao aluno ir além do mero processo de continuação do padrão, possibilitando a generalização distante, abrindo assim o caminho para a abstração. Mas, tradicionalmente, a ponte entre a aritmética e a álgebra é feita a partir dos padrões de crescimento. Ambos os tipos de padrões são necessários ao desenvolvimento do pensamento matemático, e em particular do pensamento algébrico, mas são os de crescimento que mais naturalmente conduzem à relação entre duas quantidades variáveis (e.g. Rivera, 2007; Vale, Barbosa, Borralho, Barbosa, Cabrita, Fonseca & Pimentel, 2009). Na exploração deste tipo de padrões, solicita-se que os alunos encontrem uma relação entre os elementos do padrão e a sua posição e que usem esta generalização para gerar elementos noutras posições.

O papel dos contextos figurativos na generalização de padrões

A relevância atribuída à visualização na aprendizagem da matemática fundamenta-se pelo facto de não se limitar à mera ilustração mas também ao ser reconhecida como uma componente do raciocínio (Vale, 2012). Apesar de não ser uma tarefa fácil, é sugerida a integração de abordagens visuais nas experiências matemáticas proporcionadas aos alunos (NCTM, 2000). Há dois grandes desafios: a maioria dos alunos associam a matemática à manipulação de números, expressões numéricas e algoritmos, o que pode contribuir para a desvalorização da visualização; por outro lado, o professor deve ter em consideração que há muitas formas de *ver* (Duval, 1998).

As tarefas que envolvem o estudo de padrões podem ser propostas em diversos contextos, visuais e não visuais, e dar lugar a diferentes abordagens. No entanto, a utilização de um suporte visual na apresentação de problemas que envolvem a procura de padrões pode conduzir à aplicação de diferentes abordagens para chegar à generalização, quer de natureza visual quer não visual (e.g. Barbosa, 2011; Vale, 2012). Acrescenta-se que os padrões figurativos podem gerar diferentes regras que potenciam: conexões entre relações aritméticas e geométricas; a atribuição de significado às regras formuladas; a necessidade de formular e validar conjeturas. Desta forma, o trabalho com relações funcionais através de padrões de crescimento figurativos podem suscitar a atribuição de significado às operações que transformam a variável independente na variável dependente. Usualmente há diferentes modos de expressar a relação entre duas variáveis em tarefas deste tipo, constituindo assim um contexto privilegiado para discutir múltiplas estratégias de generalização e regras, bem como a exploração de expressões equivalentes, o que contribui para um raciocínio mais flexível (Barbosa, 2011). Como já se referiu, há vantagens claras na utilização de capacidades visuais na generalização de padrões, no entanto é necessário ter em conta a complexidade das figuras apresentadas, que poderá condicionar o estabelecimento da generalização. Neste âmbito, Sasman, Olivier e Linchevski (1999) distinguem entre *figuras transparentes* e *figuras não transparentes*, referindo que, no primeiro caso, a regra associada ao padrão está subjacente, de forma evidente, na estrutura das figuras da sequência, o que não acontece no segundo caso. É assim pertinente pensar em estratégias que possam auxiliar os alunos a identificar o padrão visualmente e consequentemente a generalizar. Rivera (2007) sugere que os alunos sejam encorajados a manipular e transformar as figuras em formas mais simples, logo mais fáceis de reconhecer, ou, em alternativa, aplicar processos de contagem que mobilizem a simetria.

Uma proposta didática

Decorrente do Projeto já identificado, emergiu uma proposta didática construída com a finalidade de desenvolver o pensamento algébrico. Trata-se de uma abordagem que integra tarefas desafiantes com padrões, em contextos figurativos, que promove a exploração de diferentes modos de generalização, relacionados com as diferentes formas de *ver* os padrões apresentados. Esta proposta consiste numa sequência didática de natureza exploratória, através da qual se procura que a generalização surja, primeiramente, da análise dos aspetos visuais das tarefas, de modo a facilitar a generalização próxima e distante. Neste sentido, começa-se por tarefas de *Contagens* em contextos visuais, como pré-requisito para o trabalho posterior com sequências que implicam uma intuição visual sobre os números, as formas e as suas relações. Estas tarefas prévias implicam a capacidade de *ver instantaneamente* (*subitizing*) que, numa primeira instância, é desenvolvida através do reconhecimento de padrões simples (e.g. dominós, dados, moldura do 10), para posteriormente avançar para contextos figurativos mais diversificados. As *Contagens* vão estimular a flexibilidade do raciocínio, já que suscitam o aparecimento de diferentes estratégias de contagem, conduzindo à formulação de expressões equivalentes, à identificação de diferentes modos de *ver*. A fase seguinte envolve o estudo de *Sequências*, quer de repetição, quer de crescimento, com a finalidade de descobrir, continuar, completar, criar e generalizar padrões. Finalmente, passa-se aos *Problemas*, nos quais não está explícita uma sequência, mas que implicam a sua descoberta/construção por parte do resolvedor, por forma a chegar à solução (Vale *et al.*, 2009). A proposta didática incide assim no estudo de padrões, destacando-se os contextos figurativos. Atualmente, a tendência generalizada em educação matemática sugere que uma aprendizagem eficaz requer que os alunos se envolvam ativamente em tarefas significativas e diversificadas (Stein & Smith, 1998).

Essas propostas devem ser matematicamente desafiantes, promovendo o pensamento flexível, dando aos alunos oportunidades para partilhar ideias, desenvolver argumentos convincentes, desenvolver uma linguagem para exprimir ideias matemáticas e aprender a partir de outras perspetivas (NCTM, 2000). Estes aspetos estão implicados na proposta didática desenvolvida, já que as tarefas que a integram permitem múltiplas representações e resoluções, motivando o pensamento crítico e o desenvolvimento do raciocínio. Por outro lado, sendo os professores os principais agentes de mudança na sala de aula, é importante que desenvolvam nos alunos determinado tipo de capacidades, baseadas em conhecimentos matemáticos e didáticos sólidos, que lhes permitam construir/adaptar e explorar boas tarefas matemáticas. É fundamental que os professores possam explorar todo o potencial instrucional de uma tarefa e, para isso, é necessário que tenham oportunidades de as resolverem do mesmo modo que se pretende que as venham a explorar com os seus próprios alunos. Assim, assume-se que esta proposta didática é direcionada não só aos estudantes para aprender matemática, mas, também, aos professores para ensinar matemática.

Resultados de algumas tarefas

Neste estudo procura-se compreender de que modo uma proposta didática, tendo por base padrões figurativos, é um contexto adequado para formular generalizações e como pode contribuir para promover a aprendizagem matemática, em particular, o pensamento algébrico. Assim sendo, optou-se por uma abordagem qualitativa, seguindo um design exploratório. Os dados recolhidos e apresentados neste trabalho são de natureza descritiva e interpretativa, tendo por base registos das resoluções das tarefas e observações em sala de aula. As tarefas foram implementadas com 30 alunos do 3º ano de um curso de licenciatura de futuros professores do ensino básico, numa unidade curricular de Didática da Matemática. As tarefas foram resolvidas individualmente havendo um período de discussão após a resolução de cada proposta. A proposta didática foi desenvolvida ao longo de 4 sessões, num total de 12 horas, sendo exploradas, sequencialmente, Contagens, Sequências (de repetição e de crescimento) e Problemas, em contextos figurativos. Neste trabalho serão apresentados alguns resultados de três tarefas, uma de contagens e duas com sequências de crescimento. Desta forma, é possível ter uma visão global da proposta didática, realçando a ligação das tarefas prévias de contagem com as sequências em contexto figurativo.

Nas *Contagens* em contextos figurativos a finalidade é que os alunos descubram o número de elementos numa determinada figura sem recorrer à contagem um a um. Neste sentido, é suposto que reconheçam distribuições padronizadas o que pressupõe um trabalho prévio que promova o desenvolvimento do *ver instantaneamente* (*subitizing*). Na resolução da Tarefa 1 – *Os Berlindes* (Anexo 1) os alunos identificaram diferentes modos de ver a figura apresentada, gerando várias expressões numéricas.

Figura 1. Soluções apresentadas pelos alunos

As soluções identificadas na figura 1 deram lugar às expressões 2x(4x4)+2x(2x2), 2x(2x4)+2x(2x6), 3x(4x4)-2x4, 10x4 e 2x3+2x6+2x7+8, respetivamente. A fase de discussão permitiu realçar várias ideias e conceitos, como a equivalência das expressões numéricas, a exploração das propriedades das operações aritméticas, a análise de modos mais ou menos eficazes de cálculo, no entanto, destaca-se o impacto da visualização na promoção do pensamento divergente.

Nas *Sequências de Crescimento* cada termo muda de forma previsível em relação ao anterior e, tratando-se de um contexto figurativo, os alunos têm possibilidade de *ver* o padrão de diferentes modos, dando lugar a diferentes expressões numéricas e algébricas. Através da Tarefa 2 (Anexo 2) e da Tarefa 3 (Anexo 3) procurou-se mobilizar a generalização próxima e a generalização distante, solicitando ainda a generalização simbólica formal. Na resolução destas tarefas apareceram diferentes representações, entre desenhos, tabelas, linguagem natural, linguagem matemática e expressões algébricas.

Na Tarefa 2 – *Quadrados em cruz*, a maioria dos alunos conseguiram identificar a estrutura do padrão com base nas figuras observadas no enunciado, identificando três modos diferentes de *ver* o padrão: 4n+1, 1+2n+2n e 5+4(n-1) (Figura 2). Foi perceptível que o trabalho prévio com as contagens visuais foi crucial na opção por esta abordagem, tendo ajudado os alunos a usar a visualização na descoberta de relações funcionais, tornando assim possível, de uma forma intuitiva, a generalização, quer próxima, quer distante. Além disso, verificou-se que estes alunos foram capazes de atribuir mais facilmente significado aos números e símbolos manipulados. Um número reduzido de alunos optou por transformar as figuras em números dispondo esses valores numa tabela onde relacionaram o número da figura com o número de quadrados (Figura 3). Uma das grandes potencialidades deste tipo de tarefas reside precisamente no facto de possibilitar a aplicação de abordagens de natureza diferente, visuais e não visuais.

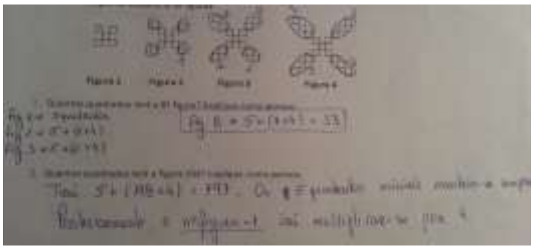


Figura 2. Abordagem figurativa

Figura 3. Organização dos dados numa tabela

A Tarefa 3 - *Pirâmides* tem uma estrutura similar à anterior. No entanto, comparando as figuras envolvidas na sequência, verifica-se que na Tarefa 2 são apresentadas *figuras transparentes* e na Tarefa 3 *figuras não transparentes*, já que, neste caso, a regra associada ao padrão não é evidente. Verificou-se que a maioria dos alunos optou por transformar as figuras em números dispondo-os numa tabela de modo a relacionar as variáveis independente e dependente (Figura 4). Alguns alunos manipularam as figuras, com a finalidade de encontrar formas mais simples e, por isso, mais fáceis de reconhecer e de utilizar na descoberta de uma regra, usando assim uma abordagem figurativa (Figura 5).

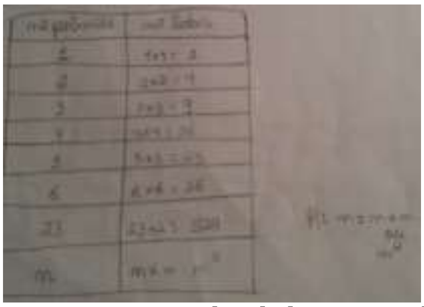


Figura 4. Organização dos dados numa tabela

Figura 5. Abordagem figurativa

Uma vez mais se constatou a emergência de múltiplas representações e diferentes abordagens à generalização, situação que se associa ao contexto da tarefa que facilita o trabalho com números ou com as figuras.

Reflexão

Aquilo que os alunos sabem e o que resulta da sua perceção contribui significativamente para a forma como constroem e desenvolvem o seu conhecimento acerca dos objetos matemáticos. É por isso fundamental que o professor crie oportunidades para alargar as experiências dos alunos, através de tarefas motivadoras e desafiantes que permitam desenvolver o pensamento crítico e mobilizar vários conceitos e ideias de diferentes áreas da matemática, suscitando conexões entre eles. O tema dos padrões, devido à sua transversalidade, pode contribuir para que se atinjam estes objetivos. A proposta didática apresentada neste estudo revela que o reconhecimento de padrões, existentes nos números, nas formas e no mundo à nossa volta, é o início de uma exploração que ajuda os alunos a continuar, completar e generalizar padrões e sobretudo a resolver problemas. O desenvolvimento destas capacidades conduz a uma melhor compreensão da matemática, à aquisição e reforço de diferentes conceitos, mobilizando-os através das diferentes capacidades transversais, e faz com que os alunos fiquem mais bem preparados, em particular no que refere ao pensamento algébrico. O contexto figurativo proporciona oportunidades para realçar a estrutura do padrão, revelando grande potencial na aula de matemática, uma vez que facilita a atribuição de significado às ideias exploradas, e consequentemente a compreensão, potenciando o pensamento flexível e um reconhecimento intuitivo da estrutura dos padrões.

Referências bibliográficas

Barbosa, A. (2011). Patterning problems: sixth graders' ability to generalize. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda, *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, pp. 420-428. Rzeszow: ERME.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp.37-52). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133–155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 65 – 86). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* USA: NCTM.

Rivera, F. (2007). Visualizing as a Mathematical Way of Knowing: Understanding Figural Generalization. *Mathematics Teacher*, 101(1), 69-75.

Sasman, M., Olivier, A., Linchevski, L. (1999). Factors influencing students’ generalization thinking processes. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23th International Conference for Psychology of Mathematics Education*, 4, pp 161-168, Haifa, Israel: PME.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3(4)*, 268-275.

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the primary years. In A. Orton (Ed.), *Patterns in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18-30). London: Cassell.

Vale, I. (2012). As tarefas de padrões na aula de matemática: um desafio para professores e alunos. *Interacções*, 20, 181-207.

Vale, I., Barbosa, A., Borralho, A., Barbosa, E., Cabrita, I., Fonseca, L. & Pimentel, T. (2009). *Padrões no ensino e aprendizagem da matemática – Propostas curriculares para o ensino básico.* Viana do Castelo: Escola Superior de Educação.

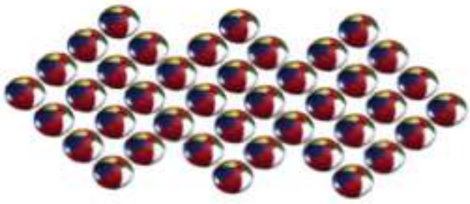
Warren, E. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds’ thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 171-185.

Anexos

Anexo 1

Tarefa 1 – Os berlindes

Quantos berlindes observa na figura?
Tente contá-los de uma forma rápida e escreva a expressão que traduz esse modo de contagem.



Anexo 2

Tarefa 2 – Quadrados em cruz
Considere a seguinte sequência de figuras:

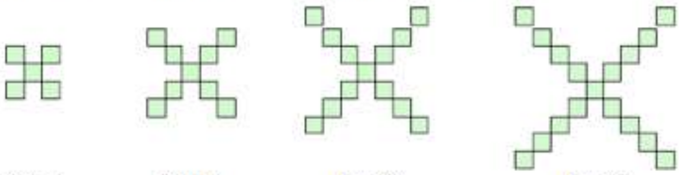


Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4

1. Quantos quadrados terá a 8ª figura? Explique como pensou.
2. Quantos quadrados terá a figura 199? Explique como pensou.
3. Formule uma expressão que permita calcular o número de quadrados da figura n.

Anexo 3

Tarefa 3 – Pirâmides
No *Supermercado Compra Aqui* arrumam as latas em pirâmide. A figura mostra as primeiras quatro pirâmides de uma sequência que se pode observar no supermercado:

Pirâmide 1 Pirâmide 2 Pirâmide 3 Pirâmide 4

1. Quantas latas estarão na 6ª pirâmide? Explique como pensou.
2. Quantas latas estarão na 23ª pirâmide? Explique como pensou.
3. Formule uma expressão que permita calcular o número de latas na pirâmide de ordem n.