EXPERIMENTACIÓN, SIMULACIÓN Y MODELIZACIÓN

M. Di Blasi Regner, S. Segura
mario.diblasi@gmail.com; ssegura@frm.utn.edu.ar
Grupo UTN de Investigación Educativa en Ciencias Básicas - Universidad Tecnológica Nacional, Argentina

Tema: Enseñanza Experimental de la Matemática
Modalidad: Taller
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: matemática; experimental; informática, modelos.

Resumen

Saber matemática no es sólo aprender las definiciones y los teoremas, para reconocer después la ocasión de utilizarlos y aplicarlos; sabemos bien que hacer matemática implica ocuparse de los problemas.
Sólo hacemos matemática cuando nos ocupamos de problemas, pero a veces se olvida que resolver un problema no es más que una parte del trabajo; encontrar las buenas preguntas es tan importante como encontrar las respuestas.
Una buena reproducción por parte del alumno de una actividad científica exigiría que actúe, que formule, que pruebe, que construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que las intercambie con otros, que reconozca aquellas que son conformes a la cultura, que tome aquellas que le son útiles, entre otros.
El presente taller se centra en la mejora y promoción de nuevas prácticas de enseñanza. Se pretende focalizar las acciones hacia la implementación y desarrollo de propuestas pedagógicas sustancialmente relevantes, que permitan poner en valor los procesos de enseñanza, a partir de un trabajo sólido y concreto, direccionado hacia la resolución de problemas, la experimentación y la modelización. Teniendo en cuenta la necesaria inclusión de las TIC dentro de las propuestas didácticas.

1. Marco teórico

Haciendo referencia a las investigaciones realizadas en el marco del proyecto "Utilización de las TIC para la solución de problemas de la vida real", se reafirma el tema del corrimiento de paradigma de la enseñanza de matemática, en donde se proponen problemas de la vida real y soluciones basadas en modelización, experimentación y simulación.

Un modelo es una representación selectiva y simplificada de la realidad. El modelo es una representación porque sustituye a la realidad. Se construye primero en la mente de la persona, a partir de la percepción del sistema real. Luego puede volcarlo a un esquema, una maqueta, fórmulas matemáticas, enunciados verbales, entre otros.

La representación es selectiva y simplificada, porque no toma todos los elementos de la realidad, sino sólo los que nos parecen importantes.
El valor de un modelo surge cuando éste mejora nuestra comprensión de las características del comportamiento, en forma más efectiva que si se observara el sistema real. Un modelo, comparado con el sistema verdadero que representa, puede proporcionar información a un costo más bajo y permitir el logro de un conocimiento más rápido de las condiciones que no pueden observarse en la vida real.

Una vez que el modelo cuantitativo ha sido construido, se somete a un análisis para generar resultados o conclusiones que emanen exclusivamente de él, considerando sólo los elementos abstraídos de la situación. A continuación, se realiza la interpretación de los resultados basados en el modelo, para relacionarlo de nuevo con la situación del mundo real, tomando en cuenta los factores que se habían suprimido durante la fase previa de abstracción.

El número de formas en que los modelos se utilizan es tan grande como el de las personas que los construyen. Se concluye que un modelo puede servir como una herramienta consistente para la evaluación y comunicación de diferentes políticas. Es decir, cada política o conjunto de decisiones es evaluada con el mismo objetivo, aplicando las mismas fórmulas para describir interacciones y restricciones.

Para asegurar ciertas relaciones del alumno con el conocimiento y llevar a cabo un trabajo como el que se propone, es necesario seleccionar las situaciones problemáticas con ciertas condiciones, Regine Douady enuncia algunas de ellas.
a) El enunciado tiene sentido en el campo de conocimientos del alumno.
b) El alumno debe poder considerar lo que puede ser una respuesta al problema. Esto es independiente de su capacidad para concebir una estrategia de respuesta o la validación de una propuesta.
c) Teniendo en cuenta sus conocimientos, el alumno puede iniciar un procedimiento de resolución. Pero la respuesta no es evidente, esto quiere decir que no puede proveer una respuesta completa sin desarrollar una argumentación que lo conduce a preguntas que no sabe responder inmediatamente.

d) El problema es rico, esto quiere decir que la red de conceptos involucrados es bastante importante, pero no demasiado para que el alumno pueda abarcar su complejidad, si no solo, por lo menos en equipo o en el seno del equipo o de la clase.
e) El problema es abierto por la diversidad de preguntas que el alumno puede plantearse o por la diversidad de estrategias que puede poner en acción.
f) El conocimiento que se desea lograr con el aprendizaje es el recurso científico para responder eficazmente al problema. Dicho de otro modo, es un recurso adaptado a la situación.

2. Ejemplo de problema

El Grupo UTN de investigación educativa en Ciencias Básicas ha trabajado conjuntamente con un grupo de investigadores del Instituto Nacional Superior del Profesorado Técnico, de la Facultad Regional Mendoza y de la Facultad Regional General Pacheco. Como ejemplo de aportes realizados en el tema se inserta un desarrollo de un problema de la vida real, donde la tarea alrededor de la resolución de este problema colocará al alumno frente a problemas intermedios que deberá ir enfrentando paso a paso. En donde si comienza modelizando matemáticamente, los problemas son en relación a variables, funciones, cálculo de volúmenes, entre otros. Si comienza haciendo una experimentación, con un modelo a escala, luego de tomar los datos experimentales, deberá transferir esos resultados al modelo real. Y por último, si utiliza las simulaciones realizadas con un software matemático, deberá interpretar esas simulaciones para poder realizar la modelización y confrontar los datos obtenidos entre ambas. Los conocimientos que se ponen en juego en la resolución de cada uno de estos problemas intermedios son muy variados. Las distintas estrategias que propongan los alumnos dependerán de las herramientas matemáticas de las que disponga cada uno.
El problema (Perrin Glorian, 1998) que analizaremos aquí es el siguiente:
En el campo algunos bebederos para animales tienen una forma como la que se esquematiza en el dibujo:

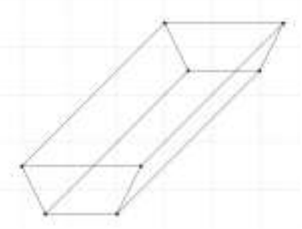

Figura 1- Bebedero- Fuente producción propia

Se trata de un prisma recto de 4 m de largo, y dos de sus caras son trapecios isósceles congruentes de base menor 6 dm, base mayor 8 dm y altura 4 dm.

Se necesita graduar una varilla colocada en forma vertical sobre uno de los trapecios para precisar el nivel del agua correspondiente a 100, 200, 300, …. litros

Para graduar la varilla habrá que decidir dónde deben ir las marcas.

Modelización:

Se determinan datos, incógnitas y variables:

Largo del prisma (l): 4m

Base menor del trapecio (b): 6 dm

Base mayor del trapecio (B): 8 dm

Altura del trapecio (h): 4 dm

B_i : base mayor del trapecio para un volumen i

h_i : altura del trapecio para un volumen i

V_T : volumen total del prisma

V_i : volumen para una altura i

Se calcula el volumen total del prisma con base un trapecio isósceles:

$V_T = \frac{(b+B)h\,l}{2} = 1.120\ dm^3$ o lo que es lo mismo 1.120 litros

Como las marcas se tienen que hacer a 100, 200, 300, … litros, se va a calcular por ejemplo donde iría la marca a los 100 litros (100 dm^3)

$$\frac{(b+B_{100})h_{100}\,l}{2} = 100\ dm^3$$

Haciendo cálculos $(6+B_{100})\,h_{100} = 5$. Por otro lado,

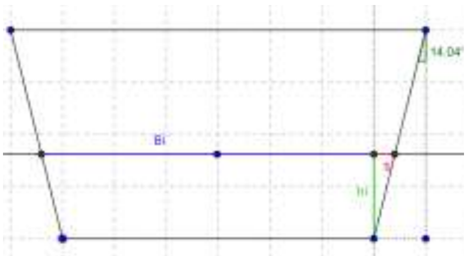

Figura 2- Modelización bebedero- Fuente producción propia

$B_{100} = 6 + 2\,t_{100}$ y $h_{100} = \frac{t_{100}}{tan(14{,}04^o)}$

Luego, reemplazando

$$2tan(14{,}04^o)\,h^2{}_{100} + 12\,h_{100} - 5 = 0 \text{ donde } 0 \le h_{100} \le 4\ \text{dm}$$

$\frac{1}{2}h^2{}_{100}+12\,h_{100}-5=0$, resolviendo para los valores posibles, resulta que la altura de la varilla para que el tanque contenga 100 litros es de 0,41 dm (aproximado a dos decimales, ya que el valor exacto es $-12+\sqrt{154}$)

Haciendo un razonamiento similar se puede calcular la altura de la varilla para 200, 300, … 1100, 1200 litros. Haciendo un cuadro

V_i (en litros)	100	200	300	400	500	600	…
h_i (en dm)	0,41	0,81	1,19	1,56	1,93	2,28	…

Por otro lado también se podría encontrar una expresión para calcular el volumen del recipiente en función de la altura de la varilla.

$V_i=\frac{(6+2\,t_i+6)}{2}h_i\;40$ reemplazando y desarrollando la expresión $V_i=240\,h_i+10\,h_i^2$ donde $0\le h_i\le 4\,\text{dm}$. O la altura de la varilla en función del volumen

$h_i=\sqrt{\frac{V_i}{10}+144}-12$ donde $0\le V_i\le 1120\,\text{litros}$

<u>Experimentación</u>:

La construcción ser realiza en el laboratorio con placas de plástico, y se les sugiere a los alumnos que se construya un prisma recto con las características anteriores, pero a escala, utilizando las medidas 0,4 m de largo, y dos de sus caras son trapecios isósceles congruentes de base menor 6 dm, base mayor 8 dm y altura 4 dm.

La decisión de tomar estas medidas, se constituye en una variable didáctica, ya que los valores a obtener de volumen son proporcionales a los del problema original y la altura de la varilla es la misma.

Es decir

V_i (en litros)	10	20	30	40	50	60	…
h_i (en dm)	0,41	0,81	1,19	1,56	1,93	2,28	…

Aunque estos valores no serán calculados algebraicamente sino experimentalmente, al llenar con 10 litros el recipiente, se marca la altura de la varilla a 0,41 dm y así sucesivamente. Los alumnos deberán decidir si estas medidas son las que quieren utilizar, ya que algunos propondrán por ejemplo usar medidas que sean la mitad de las originales, entonces el volumen total del recipiente sería de 560 litros, pero la medida de la altura para marcar cuántos litros será proporcional a la medida de la altura para los 100 litros del problema original.

También podrían dividir por 10 todas las medidas del prima original, pero en este caso el volumen total del recipiente construido sería de 1,12 litros, al igual que antes qué medidas de volumen tomar para encontrar la proporcionalidad con el prisma original.

Simulación (con Geogebra)

El Geogebra es un software libre que permite trabajar algunos temas de Geometría, de Álgebra y de Cálculo Aritmético.

Como propone un grupo de investigación de la Universidad San Martín, la incorporación paulatina de dicho software puede aportar al estudio de las construcciones y a la modelización algebraica a través de problemas geométricos. Su empleo posibilita visualizar tanto la imposibilidad de solución como analizar la multiplicidad de las mismas. De esta forma, se favorece el desarrollo de un trabajo matemático que supera la perspectiva clásica centrada en respuestas únicas a los problemas planteados.

La geometría dinámica facilita las conjeturas sobre propiedades geométricas de las figuras a partir de la observación de fenómenos geométricos. Las propiedades de las figuras podrán aparecer como las invariantes en el curso del desplazamiento de los objetos de base. Podemos decir que del mismo modo que los conocimientos toman sentido en relación a las situaciones que permiten resolver, esta afirmación también es válida para la producción de conjeturas. Para el alumno, la conjetura y el conocimiento nuevo aparecen si tienen sentido para resolver una situación problemática.

En este sentido, el enfoque de la propuesta se sustenta en desarrollos didácticos en los que el alumno deberá no sólo observar, sino también explorar y sobre todo conjeturar.

Luego de haber trabajado con Geogebra, algunas producciones podrían ser una gráfica del volumen en función de la altura:

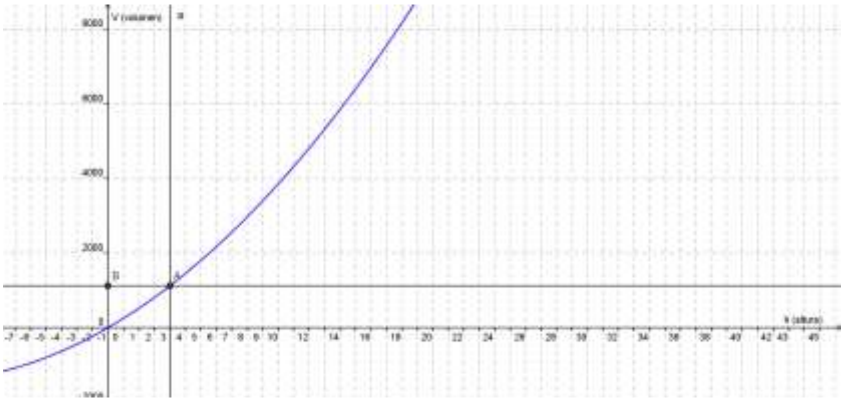

Figura 3- Volumen en función de la altura- Fuente producción propia

O una gráfica con simuladores de la altura en función del volumen:

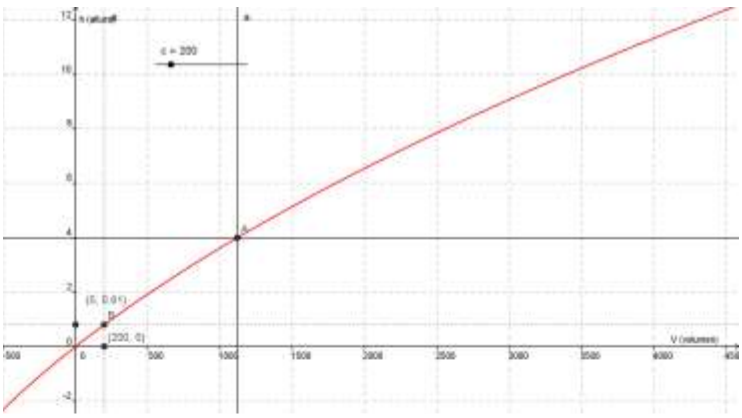

Figura 4- Altura en función del volumen - Fuente producción propia

3. Conclusiones

La intención en el taller al trabajar con los docentes con situaciones como la desarrollada en los párrafos anteriores, es que logren observar la potencialidad de las herramientas para modelizar un problema. Teniendo en cuenta los saberes previos de los alumnos, los saberes que ponen en juego al utilizar distintas estrategias y la potencialidad del uso de variables didácticas en los diferentes enfoques de un problema. También se pretende trabajar ciertas consideraciones didácticas con los docentes en la puesta en el aula de este tipo de problemas, como por ejemplo que el alumno no pueda hallar la dependencia entre el volumen y la altura de la varilla -un obstáculo a franquear es la proporcionalidad directa-.

También se pretende que los docentes en el taller, propongan variantes, por ejemplo en el problema desarrollado preguntarse qué pasaría si las marcas de la varilla fueran equidistantes o si las dos caras en vez de ser trapecios isósceles fueran triángulos isósceles, entre otros.

Referencias Bibliográficas

Arcavi, Hadas. (2003). “El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque”. Documento de trabajo del grupo EM&NT. Área de Educación Matemática. Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle.

Artigue, M. (2000). “Los aspectos de la instrumentación y de la integración de las tecnologías informáticas en la enseñanza de las matemáticas en el nivel secundario”. In: Congrès annuel du GDM, Postdam, febrero 2000. Versión en inglés disponible en: webdoc.gwdg.de/ebook/e/gdm/2000/artigue_2000.pdf

Bosch, H. E., Bergero, M., Carvajal, L., Di Blasi, M., Geromini, N., Guzner, Segura, S. (2007). “Actividades de Matemática Experimental en el Aula”. XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. 15-17 julio, Escuela Normal del Estado de Querétaro, Santiago de Querétaro, México.

Bosch, H.; Bergero, M.; Di Blasi Regner, M.; Rampazzi, M.; Segura, S. (2012). “Modelización de Problemas de la Vida Real. II Jornadas de Enseñanza de la Ingeniería, 2012. Año 2, Volumen 2, pag 43. ISSN 2313-9056.

Bosch, H. E. y Di Blasi, M. A. (2008) “Una mirada experimental para la enseñanza de análisis matemático”, 11th International Congress in Mathematical Education, Monterrey, Mexico.

Perrin Glorian, M.J. (1998). “Analyse d´un problème de fonctions en termes de milieu: structuration du milieu pour l´élève et por le maitre“, en Noirfalise (ed), Actes de l´Université d´été. La Rochelle-Charente-Maritime. Irem de Clermont-Ferrand.