HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO DE SISTEMAS LINEARES, DETERMINANTES E MATRIZES

Agamenon Henrique de Carvalho Tavares – André Gustavo Campos Pereira
agamenon.tavares@ifrn.edu.br – andre@ccet.ufrn.br
IFRN, Brasil – UFRN, Brasil

Tema: V.3 - Historia de la Matemática y su Inclusión en el Aula.
Modalidade: CB
Nível educativo: Médio (11 a 17 anos)
Palavras-Chave: Sistemas Lineares, Determinantes, Matrizes.

Resumo

A adequação do currículo a uma perspectiva cronológica permite aos professores de matemática a oportunidade de usar a história da Matemática no desenvolvimento de atividades que possibilitem a construção de conceitos pelo aluno, além da percepção da necessidade de uma teoria antes que ela seja sistematizada. Tais atividades os ajudarão a entender, ainda que simplificadamente, como o conhecimento matemático se desenvolve e é validado. Neste trabalho, estudamos o método apresentado no livro "Os nove capítulos sobre arte matemática", escrito no século I da era cristã, a fim de revelar como a história pode ser uma motivadora na introdução de tópicos da matemática do ensino médio. Através de observações dos padrões que se repetem no método apresentado, fomos capazes de introduzir o conceito de equações lineares, sistema de equações lineares, solução de sistemas de equações lineares, determinantes e matrizes, além do desenvolvimento de Laplace para cálculo de determinantes de matrizes quadradas de ordem maior que três.

Introdução

Nosso estudo baseou-se em parte do livro intitulado *K'ui-ch'ang Suan-Shu* (Os Nove Capítulos sobre a Arte Matemática), publicado na China durante o século I da era cristã e que, conforme Eves (2004, p. 243), é "o mais importante dos textos de matemática chineses". Em nosso trabalho nos atemos à resolução de sistemas lineares, dada a descrição sistematizada de resolver tais sistemas com coeficientes positivos, apresentada no livro citado. Curiosamente as operações eram realizadas com o auxílio de pequenos gravetos dispostos em uma folha de papel. Ao realizar manipulações com esses gravetos a técnica proposta pela prática matemática na China antiga assemelhava-se ao método da eliminação de Gauss (apresentado, somente, no século XIX). Tais operações eram efetuadas sobre os coeficientes do sistema, daí porque entendermos a técnica como precursora de métodos de solução propostos em épocas posteriores.

Assim, as informações históricas mostram o modo como os chineses usavam um sistema de numeração posicional e ao realizarem operações recorrendo ao uso de um quadrado em branco para representar o zero. Além disso, há informações de que já conhecerem números negativos.

Nossa proposta é apresentar os temas citados seguindo o curso histórico, começando com a resolução de problemas, modelando-os como sistemas de equações lineares, chamando a atenção para algumas expressões que aparecem na resolução de tais sistemas (determinantes), mostrando que essas expressões estão associadas a uma estrutura de números organizados em linhas e colunas (matrizes). Neste trabalho nos atemos aos problemas propostos em que eram dadas duas sentenças de informações, nas quais existiam duas quantidades desconhecidas. Ficando claro como eles faziam esses casos, os problemas com mais informações e mais quantidades desconhecidas eram resolvidos seguindo as mesmas etapas.

Inicialmente estudamos como os autores chineses resolviam alguns problemas. Discutimos outra forma de modelar tais situações, o que nos levou a definição das equações lineares, sistemas equações lineares e, consequentemente, à definição de incógnita, coeficiente e termo livre. Verificamos que o método dos chineses era uma forma de resolução de tais sistemas, ou seja, chegamos ao conceito de solução de sistemas de equações lineares. A partir de observações, encontramos certos padrões matemáticos que nos conduziram à generalização do método chinês para resolução de sistemas de equações lineares.

Em seguida procuramos explicitar o padrão que aparece nas soluções dos sistemas lineares que os chineses resolviam. Com o uso de tabelas obtidas a partir dos coeficientes do sistema, observamos que podemos associar a essa tabela um número (que aparece no denominador dos valores de todas as incógnitas do sistema). Essa associação pôde ser aplicada a outras matrizes de mesma ordem de modo a conseguir os resultados que aparecem nos numeradores das incógnitas encontradas. Com isso verificamos que podemos usar os números gerados pelas tabelas montadas com os coeficientes e os termos livres para conseguir os valores das incógnitas, ou seja, a solução do sistema. Surgiu então a definição de determinante (de uma matriz quadrada).

Posteriormente, mostramos que existem formas mais simples de calcular o determinante, quando a matriz quadrada envolvida tem ordem 2, para finalizar com alguns apontamentos conclusivos e considerações sobre o nosso trabalho.

O Método Chinês

Nesta seção abordamos o método apresentado em *"Os Nove Capítulos sobre a Arte Matemática"* e que era utilizado para a resolução de problemas práticos do dia-a-dia dos autores. O método é ilustrado através de exemplos apresentados na obra citada. Depois de entendido o método, procuramos explicar porque tal método funcionava e que o mesmo pode ser estendido para resolver problemas mais gerais, envolvendo inclusive valores negativos. Nesse trabalho, partimos de situações que são resolvidas segundo esse método. Vejamos um exemplo da obra chinesa, que adaptamos para duas informações.

i. Três feixes de uma colheita de boa qualidade, dois feixes de uma de qualidade regular são vendidos por 39 dou. Dois feixes de boa, três de regular são vendidos por 34 dou. Qual o preço do feixe para cada uma das qualidades?[1]

Segundo o método chinês, o problema deve ser representado, como a seguir.

$$\begin{array}{r} \\ \text{Boa qualidade} \\ \text{Qualidade regular} \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} (1^a) & (2^a) \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 34 & 39 \end{bmatrix}$$

Montada a tabela, utilizamos os seguintes passos:

1º Passo: multiplicamos todos os termos da coluna da esquerda (2, 3, 34) pelo primeiro termo da coluna direita (3), obtendo-se (6, 9, 102).

$$\begin{array}{r} \\ \text{Boa qualidade} \\ \text{Qualidade regular} \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} (1^a) & (2^a) \\ 6 & 3 \\ 9 & 2 \\ 102 & 39 \end{bmatrix}$$

2º Passo: subtraímos o número à direita de cada um dos números da esquerda, obtendo, na esquerda, (6 – 3 = 3; 9 – 2 = 7; 102 – 39 = 63).

$$\begin{array}{r} \\ \text{Boa qualidade} \\ \text{Qualidade regular} \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} (1^a) & (2^a) \\ 3 & 3 \\ 7 & 2 \\ 63 & 39 \end{bmatrix}$$

3º Passo: repetimos continuamente o 2º passo até que o primeiro número da coluna da esquerda seja eliminado (3 – 3 = 0; 7 – 2 = 5; 63 – 39 = 24).

[1] Ver o problema original em Eves (2004, p. 268).

$$\begin{array}{rc}
 & \begin{matrix}(1^{a}) & (2^{a})\end{matrix}\\
\begin{matrix}\text{Boa qualidade}\\ \text{Qualidade regular}\\ \end{matrix} & \begin{bmatrix}0 & 3\\ 5 & 2\\ 24 & 39\end{bmatrix}
\end{array}$$

Com isso eles concluíam que o preço do feixe de qualidade regular é 24/5, que equivale a 4,80 *dou*.

O valor do feixe de boa qualidade era determinado por substituição.

(Feixe de boa qualidade)·3 + 4,80·2 = 39

$\Rightarrow$ (Feixe de boa qualidade)·3 = 39 – 9,60

$\Rightarrow$ (Feixe de boa qualidade)·3 = 29,40

$\Rightarrow$ (Feixe de boa qualidade) = 29,40 $\div$ 3

$\Rightarrow$ (Feixe de qualidade regular) = 9,80

Portanto o feixe de boa qualidade custa 9,80 *dou*.

Notamos que se atribuirmos uma letra ao preço indicado para cada feixe com qualidade diferente, por exemplo:

Preço dos feixes de boa qualidade: **x**.

Preço dos feixes de qualidade regular: **y**.

Segundo o texto do problema, teríamos uma representação para o problema com as seguintes igualdades:

a) Soma de 3 feixes de boa qualidade e dois 2 feixes de qualidade regular totalizando 39 *dou*: 3**x** + 2**y** = 39;
b) Soma de 2 feixes da boa qualidade e 3 de qualidade regular totalizando 34 *dou*: 2**x** + 3**y** = 34.

Assim, o problema pode ser expresso da seguinte forma $\begin{cases} 3\mathbf{x}+2\mathbf{y}=39 \\ 2\mathbf{x}+3\mathbf{y}=34 \end{cases}$.

Verifiquemos se os valores encontrados realmente satisfazem às equações.

Preço dos feixes de boa qualidade: 9,80 ***dou***.

Preço dos feixes de qualidade regular: 4,80 ***dou***.

a) Soma de 3 feixes de boa qualidade e 2 feixes de qualidade regular:

3·9,80 + 2·4,80 = 29,40 + 9,60 = 39;

b) Soma de 2 feixes de boa qualidade e 3 feixes de qualidade regular:

2·9,80 + 3·4,80 = 19,60 + 14,40 = 34.

Através deste exemplo verificamos que o método chinês era usado para encontrar quantidades desconhecidas que satisfaziam algumas condições. Depois verificamos que se chamássemos tais valores desconhecidos por letras, poderíamos escrever as frases dos problemas como um conjunto de equações envolvendo as letras que usamos para expressar as quantidades desconhecidas do problema, no exemplo anterior, as letras **x** e **y**. Vimos que o método encontrava valores destas letras de modo que ao substituirmos tais valores nas equações, todas as equações se tornavam verdadeiras, com aqueles valores. Observamos ainda que a tabela construída no método era formada pelos números que multiplicam as letras e o número que aparece no outro lado da igualdade nas equações montadas, e os valores sempre seguem a mesma ordem, ou seja, se o primeiro número da coluna foi o que está multiplicando **x**, em todas as outras colunas, o primeiro número será aquele que estará multiplicando o **x** das outras equações.

Assim, podemos utilizar o método mesmo quando partimos de um conjunto de equações.

Façamos mais um exemplo da utilização do método caso a modelagem venha em forma de equações.

ii. Um aluno recebe 3 pontos por problema que acerta e perde 2 pontos por problema que erra. Resolveu 50 problemas e conseguiu 85 pontos. Quantos problemas ele acertou e quantos ele errou?

A modelagem desse problema pode ser feita adotando, para o número de acertos, a letra **x** e para o número de erros a letra **y**, dessa forma, teríamos uma igualdade para cada situação descrita, como se segue.

a) Total de questões: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = 50$

b) Total de pontos recebidos: $\mathbf{x} \cdot 3$

c) Total de pontos perdidos: $\mathbf{y} \cdot 2$

d) Pontuação final: $3\mathbf{x} - 2\mathbf{y} = 85$

Em função das letras utilizadas, podemos representar o problema da seguinte forma:

$$\begin{cases} \mathbf{x} & + & \mathbf{y} & = & 50 \\ 3\mathbf{x} & - & 2\mathbf{y} & = & 85 \end{cases}.$$

Observamos aqui que o método ainda se aplica na eventualidade de trabalharmos com números negativos como conhecemos hoje, salientando que, segundo Eves [2004], os chineses foram os primeiros a introduzir uma notação para números negativos.

Segundo o método chinês, o problema deve ser representado, como a seguir.

$$\begin{array}{r} \\ \text{Acertos} \\ \text{Erros} \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} (1^a) & (2^a) \\ 3 & 1 \\ -2 & 1 \\ 85 & 50 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{r} \\ \text{Acertos} \\ \text{Erros} \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} (1^a) & (2^a) \\ 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ 35 & 50 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{r} \\ \text{Acertos} \\ \text{Erros} \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} (1^a) & (2^a) \\ 1 & 1 \\ -4 & 1 \\ -15 & 50 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{r} \\ \text{Acertos} \\ \text{Erros} \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} (1^a) & (2^a) \\ 0 & 1 \\ -5 & 1 \\ -65 & 50 \end{bmatrix}$$

A quantidade de erros é calculada por $(-65) \div (-5) = 13$.

A quantidade de acertos é determinada por substituição.

(n.º de acertos) + 13 = 50 $\Rightarrow$ (n.º de acertos) = 50 – 13 = 37

Verifiquemos se os valores encontrados realmente satisfazem às equações.

Temos sua modelagem, via letras, dada por: $\begin{cases} \mathbf{x} & + & \mathbf{y} & = & 50 \\ 3\mathbf{x} & - & 2\mathbf{y} & = & 85 \end{cases}$.

a) Total de acertos: $\mathbf{x} = 37$.

b) Total de erros: $\mathbf{y} = 13$.

$$\begin{cases} 37 & + & 13 & = & 50 \\ 3 \cdot 37 & - & 2 \cdot 13 & = & 85 \Rightarrow 111 - 26 = 85 \end{cases}$$

É possível perceber que os valores numéricos apresentados na vertical em *"Os Nove Capítulos sobre a Arte Matemática"* aparecem horizontalmente (nas equações) na modelagem em que usamos letras para representar quantidades.

Então vemos que podemos usar o método chinês para encontrar os valores das letras de uma dada quantidade de equações. O que nos leva a formalizar alguns conceitos vistos até o momento.

A utilização de letras representando quantidades nos leva a uma modelagem por equações da forma a seguir.

$$\textbf{(1)} \qquad \mathbf{a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n = b}$$

Que é chamada de equação linear na qual:

$\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$,..., $\mathbf{x_n}$ são chamados de incógnitas, que são as letras que aparecem na equação e que representam as quantidades procuradas;

$\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$,..., $\mathbf{a_n}$ são chamados de coeficientes das incógnitas, e são os números que aparecem multiplicando as incógnitas na equação.

e **b** é o termo independente, sendo o número que aparece sem incógnitas na equação, geralmente do outro lado da igualdade.

Uma solução da equação **(1)** é uma n-upla[2] $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, de tal modo que, na equação, ao substituímos $\mathbf{x_1}$ por $\boldsymbol{\alpha_1}$, $\mathbf{x_2}$ por $\boldsymbol{\alpha_2}$,..., $\mathbf{x_n}$ por $\boldsymbol{\alpha_n}$ a equação é satisfeita.

$$\mathbf{a_1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_1 + a_2 \cdot \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot + a_n \cdot \boldsymbol{\alpha}_n = b}$$

[2] n-upla: sequência ordenada de números que se referem a n variáveis.

Chamamos sistema de equações lineares o conjunto de duas ou mais equações lineares com as mesmas incógnitas.

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 & + & \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 & + & \cdots & + & \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n & = & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 & + & \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 & + & \cdots & + & \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n & = & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_{31}\mathbf{x}_1 & + & \mathbf{a}_{32}\mathbf{x}_2 & + & \cdots & + & \mathbf{a}_{3n}\mathbf{x}_n & = & \mathbf{b}_3 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}_{m1}\mathbf{x}_1 & + & \mathbf{a}_{m2}\mathbf{x}_2 & + & \cdots & + & \mathbf{a}_{mn}\mathbf{x}_n & = & \mathbf{b}_m \end{cases}$$

Uma solução para esse sistema é a n-upla (α_1, α_2,..., α_n) que satisfaz simultaneamente a todas as equações envolvidas.

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\alpha_1 & + & \mathbf{a}_{12}\alpha_2 & + & \cdots & + & \mathbf{a}_{1n}\alpha_n & = & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}\alpha_1 & + & \mathbf{a}_{22}\alpha_2 & + & \cdots & + & \mathbf{a}_{2n}\alpha_n & = & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_{31}\alpha_1 & + & \mathbf{a}_{32}\alpha_2 & + & \cdots & + & \mathbf{a}_{3n}\alpha_n & = & \mathbf{b}_3 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}_{m1}\alpha_1 & + & \mathbf{a}_{m2}\alpha_2 & + & \cdots & + & \mathbf{a}_{mn}\alpha_n & = & \mathbf{b}_m \end{cases}$$

Desta forma, podemos perceber que os problemas que resolvemos, com o método de resolução dos chineses, são sistemas lineares.

Olhando mais de perto para o que foi feito num sistema de duas equações e duas incógnitas (chamaremos um sistema **2** x **2** – lê-se 2 por 2 – em que o primeiro 2 significa o número de equações e o segundo 2 significa o número de incógnitas) no caso de não nos depararmos com uma igualdade absurda ou uma identidade, o método dos chineses encontra o valor para $\mathbf{x_2}$, em seguida para $\mathbf{x_1}$, através de substituição. Este tipo de cálculo foi realizado pelo dispositivo chinês chamado a placa de contagem.

Para um sistema 2x2 como $\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 & + & \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 & = & \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 & + & \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 & = & \mathbf{b}_2 \end{cases}$, realizamos operações elementares visando encontrar um sistema equivalente com a forma $\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 & + & \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 & = & \mathbf{b}_1 \\ & & \mathbf{a}'_{22}\,\mathbf{x}_2 & = & \mathbf{b}'_2 \end{cases}$, que é equivalente ao método chinês sair de $\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{11} \\ \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 \end{bmatrix}$, e chegar em $\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{a}'_{11} \\ \mathbf{a}'_{22} & \mathbf{a}'_{12} \\ \mathbf{b}'_2 & \mathbf{b}'_1 \end{bmatrix}$.

Relato de Experiência

Em nosso estudo utilizamos atividades históricas com um grupo de alunos do 2º ano do Ensino Médio. Avaliamos o uso das atividades durante a realização de 15 aulas. A metodologia que aborda o conteúdo histórico de sistemas lineares demonstrou-se eficaz levando os estudantes à descoberta como elemento importante nas aulas de matemática e estimulando a participação da turma nas aulas ministradas.

Inicialmente, abordamos os temas aqui tratados em duas turmas distintas do mesmo câmpus do IFRN, escolhendo uma para a abordagem encontrada no livro didático adotado e em outra, a abordagem proposta neste trabalho. Como estratégia de investigação, utilizamos a aplicação da mesma atividade avaliativa nos dois grupos.

Conclusões

Neste trabalho começamos estudando o método apresentado no livro *"Os Nove Capítulos sobre a Arte Matemática"* e explicamos como o mesmo era utilizado. Desta explicação conseguimos modelar as informações por equações lineares e gerar sistemas de equações lineares. Então percebemos que o método resolvia tais sistemas de equações lineares. Aplicando a estratégia em sistemas lineares de ordem 2, percebemos que alguns padrões surgiram e nos levaram à definição de determinantes e matrizes, o que nos fez capazes de responder que o método dos chineses valia (para eles) por sempre considerarem, em cada problema, número de equações igual ao de incógnitas, como também que o determinante da matriz formada com os coeficientes dos sistemas era sempre diferente de zero. A investigação de um método milenar foi capaz de introduzir muitos conceitos matemáticos de forma natural e dentro de um contexto.

Concluímos que o desenvolvimento histórico dos tópicos aqui estudados, como estratégia de ensino, torna os conteúdos mais lógicos, com padrões observáveis, com teorias desenvolvidas criticamente e próximas à realidade do estudante, dinamizando as ações em sala de aula e elevando a qualidade dos processos de ensino-aprendizagem na matemática.

Referencias bibliográficas

Batista, Irinéa de Lourdes; Luccas, Simone. (2005). *Abordagem histórico-filosófica e Educação Matemática – uma proposta de interação entre domínios de conhecimento*. III Encontro da Rede Paranaense de Pesquisa em História e Filosofia da Ciência, UFPR, Curitiba (PR).

Boyer, Carl B. (1996). *História da Matemática*. tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgar Blücher Ltda.

Carrera, Josep Pla i. (2009). Liu Hui: Nueve Capitulos de Las Matematicas Chinas. Madrid: Nivola Libros y Ediciones, S.L.

Eves, Howard. (2004). *Introdução à História da Matemática*; tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP.

Tavares, Agamenon Henrique de Carvalho. (2013). *Usando a história da resoluçãao de alguns problemas para introduzir conceitos: Sistemas Lineares, Determinantes e Matrizes.* Natal (RN): UFRN.

Anexos

(I) Exemplo de um sistema de duas equações e duas incógnitas (2 x 2). Em sistemas maiores, os passos são os mesmos: Aline diz a Antonia: se você me der 1/5 do dinheiro que possui, eu ficarei com uma quantia igual ao dobro do que lhe restará. Por outro lado, se eu lhe der R$6.000,00 do meu dinheiro nós ficaremos com quantias iguais. Quanto dinheiro possui cada uma?

A modelagem desse problema deve ser feita segundo a indicação, adotando, para a quantia de Aline, a incógnita **x** e para a quantia de Antonia, a incógnita **y**, teríamos as seguintes situações,

a) Antonia dá 1/5 do dinheiro que tem: **y** – (1/5)**y**

b) Aline recebe 1/5 do dinheiro de Antonia: **x** + (1/5)**y**

c) Aline fica com o dobro do que resta a Antonia: **x** + (1/5)**y** = 2[**y** – (1/5)**y**]

d) Aline dá R$6.000,00 a Antonia: **x** – 6000

e) Antonia recebe R$6.000,00de Aline: **y** + 6000

f) Aline e Antonia ficam com quantias iguais: **x** – 6000 = **y** + 6000

Essa análise nos indica o sistema

$$\begin{cases} 2\left(\mathbf{y}-\dfrac{\mathbf{y}}{5}\right)=\mathbf{x}+\dfrac{\mathbf{y}}{5} & \cdot 5 \\ \mathbf{x}-6000=\mathbf{y}+6000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10\left(\mathbf{y}-\dfrac{\mathbf{y}}{5}\right)=5\mathbf{x}+\mathbf{y} \\ \mathbf{x}-\mathbf{y}=6000+6000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10\mathbf{y}-2\mathbf{y}=5\mathbf{x}+\mathbf{y} \\ \mathbf{x}-\mathbf{y}=12000 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8\mathbf{y}=5\mathbf{x}+\mathbf{y} \\ \mathbf{x}-\mathbf{y}=12000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\mathbf{x} - 7\mathbf{y} = 0 \\ \mathbf{x} - \mathbf{y} = 12000 \end{cases}$$

Vamos resolvê-lo usando as operações elementares já vistas.

$$\Rightarrow \begin{cases} 5\mathbf{x} - 7\mathbf{y} = 0 \\ \mathbf{x} - \mathbf{y} = 12000 \end{cases} \xrightarrow[\text{posições das equações}]{\text{Trocando as}} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x} - \mathbf{y} = 12000 \\ 5\mathbf{x} - 7\mathbf{y} = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{da segunda equação}]{\text{Anulando a 1ª incógnita}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x} - \mathbf{y} = 12000 \\ 5\mathbf{x} - 7\mathbf{y} = 0 & \rightarrow 5\mathbf{L}_1 - \mathbf{L}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x} - \mathbf{y} = 12000 \\ 2\mathbf{y} = 60000 \Rightarrow \mathbf{y}=30000 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{na primeira equação}]{\text{Substituindo a 2ª incógnita}} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathbf{x}-30000=12000 \\ \therefore \mathbf{x}=42000 \end{array}$$

Respondendo à pergunta, Aline possui R$42.000,00 e Antonia possui R$30.000,00.

(II) Observação de Padrões

Genericamente, o método resolutivo que os chineses usavam, adaptado ao uso de equações, pode ser entendido a partir dos casos gerais como o de ordem 2 a seguir.

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2 \end{cases} \xrightarrow[\text{L}_2 \text{ multiplicada por a}_{11}]{\text{L}_1 \text{ multiplicada por}(\text{-a}_{21})} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_1 & (\cdot(-\mathbf{a}_{21})) \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2 & (\cdot\mathbf{a}_{11}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_{11}a_{21}x_1 & - & a_{12}a_{21}x_2 & = & -a_{21}b_1 \\ a_{11}a_{21}x_1 & + & a_{11}a_{22}x_2 & = & a_{11}b_2 \end{cases} \xrightarrow[\text{por } L_1 \text{ - } L_2]{\text{Subst. } L_2} \Rightarrow \begin{cases} -a_{11}a_{21}x_1 & - & a_{12}a_{21}x_2 & = & -a_{21}b_1 \\ a_{11}a_{21}x_1 & + & a_{11}a_{22}x_2 & = & a_{11}b_2 \end{cases} \quad (L_1 - L_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a_{11}a_{21}x_1 & - & a_{12}a_{21}x_2 & = & -a_{21}b_1 \\ & & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 & = & a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a_{11}a_{21}x_1 & - & a_{12}a_{21}x_2 & = & -a_{21}b_1 \\ & & x_2 & = & \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}, \text{ assim } \; x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Vamos encontrar o valor de x_1 por substituição de x_2 na primeira equação do sistema inicial.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \quad \Rightarrow \quad a_{11}x_1 + a_{12} \cdot \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = b_1$$

$$a_{11}x_1 = b_1 - a_{12} \cdot \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad \Rightarrow \quad a_{11}x_1 = \frac{b_1 \cdot (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - a_{12}(a_{11}b_2 - a_{21}b_1)}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$a_{11}x_1 = \frac{b_1a_{11}a_{22} - b_1a_{12}a_{21} - a_{12}a_{11}b_2 + a_{12}a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad \Rightarrow \quad a_{11}x_1 = \frac{b_1a_{11}a_{22} - a_{12}a_{11}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$a_{11}x_1 = \frac{a_{11}(b_1a_{22} - a_{12}b_2)}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

A solução encontrada no caso anterior sugere que os valores das incógnitas procuradas dependem apenas dos valores dos coeficientes das mesmas e dos termos independentes.

Vemos então que é possível montar, a partir do sistema $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$, uma tabela apenas com os coeficientes das incógnitas na ordem em que aparecem em cada equação, da seguinte maneira $I \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Notemos então que podemos associar o número que aparece no denominador, tanto de x_1, quanto de x_2, a essa tabela, pela seguinte associação: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Usando esta associação, para as tabelas $II \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}$ e $III \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$ encontramos os valores que aparecem nos numeradores de x_1 e x_2.

Chamamos a atenção para o fato de que a solução do sistema com $x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$ e $x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$ só faz sentido no caso de termos, como no sistema proposto, o número de equações igual ao número de incógnitas e os denominadores serem diferentes de zero, para garantir que se possa determinar o quociente para cada incógnita.

Vamos observar mais de perto para verificar se conseguimos identificar algum padrão nas relações que a cada tabela associa um número. Em matemática, dado um conjunto de elementos $\mathbf{a_1}$ $\mathbf{a_2}$ $\mathbf{a_3}$, cada organização diferente desses elementos é uma permutação deles. Assim, no conjunto {1,2} podemos montar as permutações [1 2] e [2 1]. Da mesma forma, no conjunto {1,2,3} podemos montar as permutações [1 2 3], [2 3 1], [3 1 2], [3 2 1], [1 3 2], [2 1 3]. Em geral a quantidade de permutações de **n** objetos distintos é dada pelo valor $\mathbf{n}! = \mathbf{n}\cdot(\mathbf{n}-1)\cdot(\mathbf{n}-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$, chamado fatorial de **n**.

No caso {1,2,3} $\to$ (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1), (1,3,2), (2,1,3) $\to$ 6 = 3·2·1 = 3**!**

Olhando para a solução do sistema de ordem 2, vemos que em cada parcela as primeiras entradas de cada fator do produto é [1 2], conforme a expressão $\mathbf{a}_{\underline{1}\underline{1}}\mathbf{a}_{\underline{2}\underline{2}} - \mathbf{a}_{\underline{1}\underline{2}}\mathbf{a}_{\underline{2}\underline{1}}$, na qual observamos que as segundas entradas são as permutações que conseguimos com esses elementos, a saber (1, 2) e (2, 1).

Chamando $\mathbf{S_n}$ = {1,2,3,...,**n**} o conjunto dos **n** primeiros números naturais, temos $\mathbf{S_2}$ = {1, 2}, $\mathbf{S_3}$ ={1, 2, 3} e daí por diante. Vamos encontrar as permutações $\mathbf{P_2}$, fixando o conjunto original e agrupando os termos em suas possíveis permutações.

a) Permutações sobre $\mathbf{S_2}$ = {1, 2} → $\mathbf{P}_1 \to \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix}$ $\quad$ $\mathbf{P}_2 \to \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}$

A permutação $\mathbf{P_1}$ será chamada de identidade, pois temos a mesma ordem nas duas linhas: $\mathbf{P}_1 \to \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix}$. Na permutação $\mathbf{P_2}$, trocando o número 2 pelo número 1 na segunda linha, obtemos exatamente os números que aparecem na primeira linha: $\mathbf{P}_2 \to \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix} \to \mathbf{P}_1 \to \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix}$. Considere que queremos transformar cada permutação na permutação inicial (1 2), trocando a cada etapa apenas dois números de lugar. Em seguida contamos o número de etapas que foram necessárias. No caso de $\mathbf{P_2}$ para $\mathbf{P_1}$, necessitamos apenas de uma etapa, portanto o número de trocas dessa permutação é o número ímpar 1.

Analisemos a paridade dessas permutações, determinando que uma permutação seja par caso necessite de nenhuma ou um número par de trocas para transformá-la na identidade, sendo ímpar quando necessita de um número ímpar de trocas para transformá-la na identidade. Vamos então definir o sinal da permutação pela paridade da mesma, utilizando a expressão, $\text{sinal}(\mathbf{P}) = \begin{cases} +, & \text{se } \mathbf{P} \text{ é par ou zero} \\ -, & \text{se } \mathbf{P} \text{ é ímpar.} \end{cases}$. Verificamos que há uma inversão na permutação sempre que um número maior precede um menor. Assim, uma maneira interessante de obter a paridade, portanto o sinal, da permutação $\mathbf{P} = (\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \dots, \mathbf{p_n})$, consiste nos seguintes passos:

- contamos os números menores que $\mathbf{p_1}$ que estão à sua frente na permutação;
- a seguir, contamos os números menores que $\mathbf{p_2}$ que estão à sua frente na permutação.
- mantemos esta contagem para $\mathbf{p_3}, \dots, \mathbf{p_{n-1}}$
- o número total de inversões é dado pela soma dos números obtidos em cada passo.
- tendo em vista que o número total de inversões corresponde a um possível número de trocas para transformar a permutação na identidade, a paridade desse número é a paridade da permutação. Assim, no caso de ordem 2, podemos associar {1, 2} às permutações (1, 2) e (2, 1). A cada uma dessas permutações podemos associar um produto e um sinal: **a)** $(1, 2) \leftrightarrow \mathbf{a_{11}a_{22}} \leftrightarrow +$; **b)** $(2, 1) \leftrightarrow \mathbf{a_{12}a_{21}} \leftrightarrow -$, pois (1, 2) precisa de zero passo para chegar a (1, 2), sendo associado ao sinal +. Já (2, 1) precisa de 1 passo para chegar a (1, 2), sendo associado ao sinal –.

Juntando cada permutação e seu sinal, temos: **a)** $(1, 2) \leftrightarrow \mathbf{a_{11}a_{22}}$; **b)** $(2, 1) \leftrightarrow -\mathbf{a_{12}a_{21}}$.
Somando estes valores temos $\mathbf{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$ que é o número associado à tabela $\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \end{pmatrix}$. Agora sabemos como obter o número associado a qualquer tabela de ordem **2**x**2**. Basta saber quais são todas as permutações de (1, 2), qual o sinal de cada permutação, aplicar o sinal e somar todas essas permutações com os seus respectivos sinais. A essa soma denominamos o determinante de ordem **2**, obtido pela soma de todos os produtos elementares, com sinal, da tabela a ele associada, ou seja, considerando **P** = {permutações de (1, 2)} = {**(1,2),(2,1)**}. Para $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \end{pmatrix}$, temos

$$\det(\mathbf{A}) = \text{sinal}(1,2)\mathbf{a}_{11}\mathbf{a}_{22} + \text{sinal}(2,1)\mathbf{a}_{12}\mathbf{a}_{21} = \mathbf{a}_{11}\mathbf{a}_{22} - \mathbf{a}_{12}\mathbf{a}_{21}$$

Em certa altura do desenvolvimento de estudos sobre determinantes e matrizes, observou-se que, tomando uma matriz quadrada de ordem 2 e traçando diagonais, atribuindo o sinal positivo à diagonal descendente e o sinal negativo à diagonal ascendente, colocando esse sinal no produto dos termos sobre essas diagonais, obtemos $\mathbf{a_{11}a_{22}}$ e $-\mathbf{a_{12}a_{21}}$ que, somados nos dão $\mathbf{a_{11}a_{22}} - \mathbf{a_{12}a_{21}}$, sendo essa expressão a definição do determinante da matriz quadrada de ordem 2.