CARACTERIZACIÓN DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE ESPECÍFICOS A LOS PROCESOS DE DESCRIPCIÓN, DEFINICIÓN Y DEMOSTRACIÓN EN EL APRENDIZAJE DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Danny Luz Algarín Torres, Jorge Enrique Fiallo
dannyalgarin@gmail.com – jfiallo@uis.edu.co
Universidad Industrial de Santander (Colombia)

Tema: Pensamiento Geométrico
Modalidad: CB
Nivel educativo: Medio (11-17 años)
Palabras clave: Niveles de Van Hiele, descripción, definición, demostración.

Resumen

Presentamos los avances de una investigación que tiene como objetivo general caracterizar los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración, entendidos como actividades cognitivas relacionadas con la comprensión y uso de los conocimientos en el tema de las razones trigonométricas. En esta primera etapa de la investigación, elaboramos una caracterización a priori de los procesos mencionados para cada uno de los niveles de Van Hiele y diseñamos una unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un entorno de geometría dinámica, tendiente al aprendizaje de conceptos y de los procesos de descripción, definición y demostración en los estudiantes. En esta comunicación, presentamos resultados parciales de la evolución de los estudiantes en el aprendizaje de los conceptos y procesos. También presentamos un primer análisis a posteriori de la caracterización propuesta en las primeras actividades.

1. Introducción

Los alumnos llegan a los niveles superiores con muchas falencias en las competencias matemáticas, debido a los numerosos obstáculos y dificultades que se presentan para que el proceso de adquisición de competencias pueda ser exitoso. Una de las dificultades a las que se enfrentan docentes y estudiantes es la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría.

Diversos autores han contribuido al análisis de las dificultades en trigonometría, sin embargo tanto a nivel nacional (MEN, 1998; MEN, 2003, 2006) como a nivel internacional (NCTM, 2003) no se profundiza en el tema ni se presentan propuestas para afrontar el problema, lo cual ha llevado a que la trigonometría se enseñe de la misma forma (lo que está en los libros de texto) durante los últimos años.

Tomando en cuenta lo anterior y con miras a lograr que el estudiante, a partir de situaciones concretas desarrolle su proceso de razonamiento, que adquiera y comprenda conceptos y relaciones matemáticas que favorezcan el aprendizaje de las razones trigonométricas, y sobre todo, que las situaciones planteadas favorezcan el tránsito de los estudiantes de un nivel de razonamiento a otro superior, nos formulamos la siguiente pregunta de investigación: *¿Cuáles son los descriptores que caracterizan los procesos de descripción, definición y demostración en cada uno de los niveles de razonamiento de Van Hiele de los estudiantes cuando se estudian las razones trigonométricas?*

2. Marco conceptual

Las bases teóricas que sustentan la investigación, se apoyan en: Procesos matemáticos, Modelo de Van Hiele.

2.1 Procesos matemáticos

En la actividad matemática desarrollada en el aula de clase, intervienen procesos que se articulan en la medida que los estudiantes interactúan con las diversas situaciones planteadas. Estos procesos se entienden como actividades cognitivas relacionadas con la comprensión y el uso de los conocimientos. Respecto a estos procesos, tenemos que: la palabra *describir* en todos los niveles de razonamiento puede asociarse a listas de propiedades o características de los conceptos, con lo cual entendemos que este proceso se da si los estudiantes elaboran un listado de propiedades físicas o las propiedades y elementos matemáticos de los objetos en cuestión (Guillén, 2004); la *definición* se concibe generalmente como un enunciado de las características y propiedades inherentes de un objeto matemático, las definiciones expresan las propiedades que los caracterizan (objetos); la *demostración* se concibe como el proceso que incluye todos los argumentos planteados por los estudiantes para explicar, verificar, justificar o validar con miras a convencerse a sí mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática (Fiallo, 2010)

2.2 Modelo de Van Hiele

El modelo de Van Hiele, está formado por dos componentes: niveles de razonamiento, que describen la forma como los estudiantes razonan cuando efectúan diversas actividades, desde el razonamiento intuitivo hasta el razonamiento abstracto formal y fases de aprendizaje, que ayudan al profesor a organizar las actividades para que sus estudiantes puedan avanzar de un nivel de razonamiento al inmediatamente superior.

2.2.1 Niveles de Razonamiento

El modelo considera cinco niveles de razonamiento, siendo el último nivel el de rigor, el cual no se alcanza en la escuela secundaria, por lo que no lo tendremos en cuenta. Es característico del modelo el seguimiento de un orden, la adyacencia, las relaciones y el lenguaje, además, el paso de un nivel de pensamiento y conocimiento a otro no va asociado a la edad y sólo alcanzado un nivel se puede pasar al siguiente.

Nivel 1 Reconocimiento: los estudiantes razonan sobre conceptos básicos, tales como formas simples, principalmente por medio de consideraciones visuales del concepto como un todo (Burger y Shaughnessy, 1986). Describen las propiedades y elementos físicos de los objetos matemáticos, no hay razonamiento matemático, por lo que no realizan ningún tipo de demostración (Gutiérrez, 2007).

Nivel 2 Análisis: los estudiantes razonan sobre los conceptos por medio de un análisis informal de las relaciones y propiedades, se establecen las propiedades necesarias del concepto (Burger & Shaughnessy, 1986). Usan definiciones de estructura lógica simple, construyen definiciones a partir de un listado de las propiedades conocidas (Gutiérrez, 2007), realizan demostraciones de tipo empírico ingenuo, experimento crucial basado en ejemplo, experimento crucial constructivo y ejemplo genérico analítico (Fiallo, 2010)

Nivel 3 Deducción informal: Ordenan lógicamente las propiedades de los conceptos, construyen definiciones abstractas y pueden distinguir entre la necesidad y suficiencia de un conjunto de propiedades al determinar un concepto (Burger & Shaughnessy, 1986). Usan cualquier tipo de definición (Gutiérrez, 2007). Realizan demostraciones de tipo ejemplo genérico intelectual, experimento mental transformativo y experimento mental estructurado (Fiallo, 2010)

Nivel 4 Deducción formal: El estudiante razona formalmente dentro del contexto de un sistema matemático, completo, con términos indefinidos, axiomas, un sistema lógico subyacente, definiciones y teoremas (Burger y Shaughnessy, 1986). Admite la existencia de definiciones equivalentes, puede demostrar la equivalencia de definiciones (Gutiérrez, 2007). Las demostraciones son de tipo deductiva formal (Fiallo, 2010).

2.2.2 Fases de aprendizaje

Según Crowley (1987), las características de las fases de aprendizaje son:

Fase 1 Información: En esta etapa inicial el profesor y los estudiantes conversan y realizan actividades sobre los objetos de estudio de este nivel.

Fase 2 Orientación dirigida: Los estudiantes exploran el tema de estudio a través de los materiales que el profesor ha ordenado cuidadosamente. Estas actividades deben revelar gradualmente a los estudiantes las estructuras características de este nivel.

Fase 3 Explicación: Apoyándose en sus experiencias previas, los estudiantes expresan e intercambian sus incipientes puntos de vista acerca de las estructuras que han observado.

Fase 4 Orientación libre: Los estudiantes encuentran tareas más complejas, tareas con muchos pasos, tareas que se pueden realizar de varias formas y actividades abiertas.

Fase 5 Integración: Los estudiantes analizan y resumen lo que han aprendido, con el fin de tener una visión global de la nueva red de objetos y relaciones

2.3 Unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un entorno de geometría dinámica.

Se plantea una unidad de enseñanza conformada por 4 actividades: *Razones trigonométricas para triángulos rectángulos, Razones trigonométricas para ángulos en posición normal, Representaciones lineales y visualización de las razones trigonométricas e Identidades Pitagóricas.* Tiene como característica una enseñanza basada en el descubrimiento guiado apoyado en el uso de software de geometría dinámica. A partir de las interacciones con el software, los estudiantes pueden hacer descripciones de lo que observan en la pantalla, realizan generalizaciones que los llevan a usar y comprender definiciones, con las cuales paulatinamente elaboran demostraciones cada vez más formales. Cada actividad cuenta con un archivo dinámico, que se enfoca como herramienta de visualización, exploración y análisis de relaciones y propiedades trigonométricas.

Las actividades se organizaron utilizando las fases del Modelo de Van Hiele. En la explicitación se proponen discusiones grupales que promuevan la participación, intercambio de resultados, adquisición de vocabulario, realizar conexiones entre conceptos y procesos de razonamiento, y la comprensión de conceptos y propiedades de las razones trigonométricas. Para la integración, se propone completar un mapa conceptual de modo que puedan organizar los conceptos, sus relaciones y propiedades. Los niveles de Van Hiele se tienen en cuenta para la caracterización de los descriptores de los procesos en cada una de las actividades (Ver Anexo 1 Caracterización de los descriptores primera actividad).

3. Aspectos metodológicos

La investigación, de tipo cualitativo, se está llevando a cabo con 35 estudiantes de 10° grado (14 – 16 años), de la Institución Educativa Luis C. Galán de Bucaramanga. La implementación de la unidad se realiza durante el horario normal de clases en el aula de informática (5 horas semanales), en grupos de dos estudiantes por computador. La recolección de los datos se hace a través de video grabación a dos grupos de estudiantes y lo escrito en las hojas de trabajo. A partir de las actuaciones de los estudiantes en la interacción con el computador, con los compañeros y con el investigador, y lo escrito, se obtienen datos cualitativos que son analizados para construir la caracterización de los descriptores de los niveles de razonamiento. La investigadora es a la vez docente del grupo, orienta las actividades a todo el curso, con la colaboración de un auxiliar (estudiante de último semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander) quien conoce las actividades y el objetivo de la investigación.

4. Avances

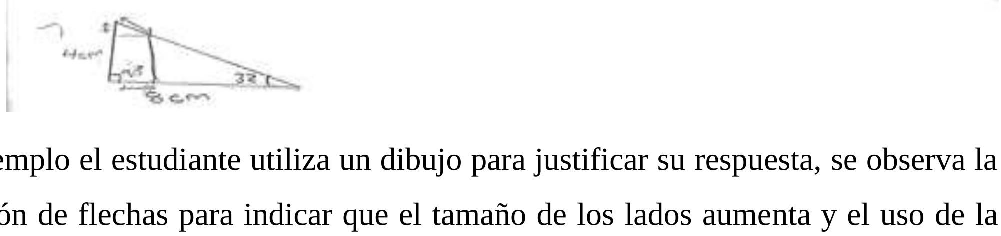
Hasta el momento se ha experimentado la primera actividad, por lo que se ha podido afinar la caracterización propuesta para cada uno de los procesos de la siguiente manera:

Proceso de descripción:	*Proceso de definición*:	*Proceso de demostración*:
descripciones de los elementos y propiedades de los triángulos rectángulos valiéndose de dibujos, utilización de las manos para describir conceptos, el uso de un lenguaje coloquial (palabra trayectoria para referirse a la amplitud de los ángulos), tendencia a describir en forma estática lo que observaban en la pantalla del computador	En esta actividad no se observó la formulación de definiciones. Usa las definiciones de las razones trigonométricas para incluirlas en sus demostraciones	Las demostraciones fueron de tipo empírico ingenuo (usan ejemplos encontrados en la pantalla y escogidos sin ningún criterio), demostraciones del tipo experimento crucial (solo tienen en cuenta los casos en que los ángulos medían 0° y 90°). Uso de argumentos numéricos (divisiones entre números observados en la pantalla), utilización de argumentos geométricos (amplitud de los ángulos).

Tabla 1 Procesos de descripción, definición y demostración.

Presentamos algunos ejemplos que nos permitieron afinar la caracterización inicial:

Actividad 1, pregunta 2c: ¿Existen otros triángulos rectángulos con medida del ángulo igual a 32° y medida de sus catetos e hipotenusa diferentes? JUSTIFICA TU RESPUESTA.



En este ejemplo el estudiante utiliza un dibujo para justificar su respuesta, se observa la construcción de flechas para indicar que el tamaño de los lados aumenta y el uso de la palabra "*trayectoria*" para referirse a la amplitud del ángulo (descripción de nivel 1).

Actividad 1: Pregunta 2.1 Abre el archivo ACT 1, elabora una descripción de lo que observas en este archivo y halla las razones entre los lados del triángulo ABC. Nombra cada razón con su respectivo cociente entre los lados del triángulo, por ejemplo BC/AB. La imagen del archivo se muestra a continuación:

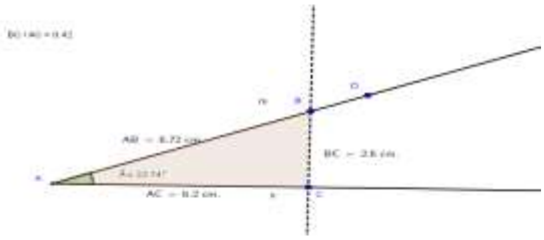
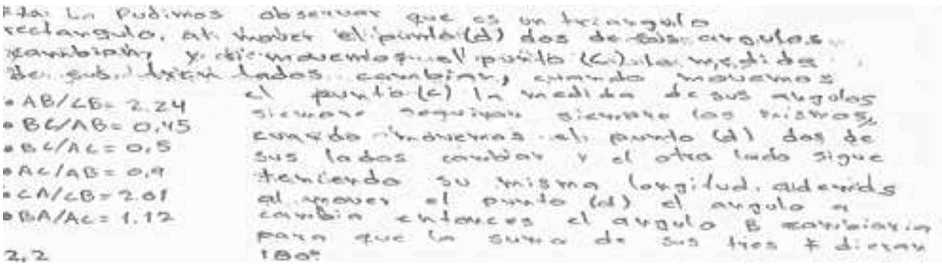


Ilustración 1 Actividad 1



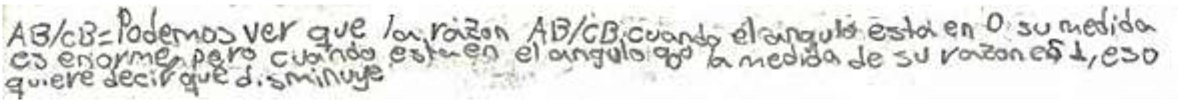
2.1: La pudimos observar que es un triangulo rectangulo, al mover el punto (d) dos de sus angulos cambian y cuando movemos el punto (C) la medida de sus lados cambian, cuando movemos el punto (c) la medida de sus angulos siempre seguiran siendo los mismos, cuando movemos el punto (d) dos de sus lados cambian y el otro lado sigue teniendo su misma longitud, ademas al mover el punto (d) el angulo A cambia entonces el angulo B cambiaria para que la suma de sus tres Ⱡ diera 180°

- AB/CB = 2.24
- BC/AB = 0.45
- BC/AC = 0.5
- AC/AB = 0.9
- CA/CB = 2.01
- BA/AC = 1.12

2.2

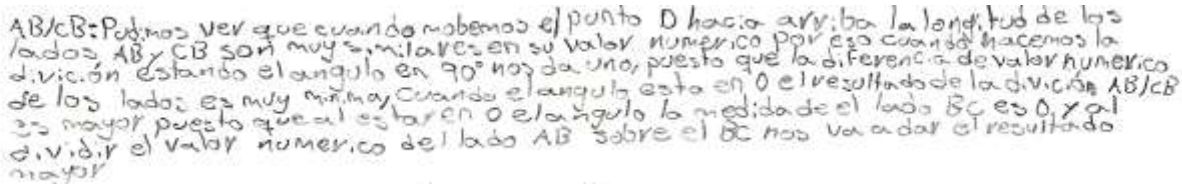
En este ejemplo observamos la descripción de lo que estudiante encuentra en el archivo, escribe valores para las razones trigonométricas, haciendo una descripción estática de estas, a pesar de que al arrastrar los puntos D y C en el archivo observa cambios en el triángulo y en los valores de las razones. La descripción corresponde al nivel 2.

Actividad 2, pregunta 2.2: ¿Qué sucede con los valores de las razones cuando varía el ángulo entre 0° y 90°? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado.



AB/CB = Podemos ver que la razon AB/CB cuando el angulo esta en 0 su medida es enorme, pero cuando esten en el angulo 90° la medida de su razon es 1, eso quiere decir que disminuye

Pregunta 2.3 Explica por qué es verdadera tu conjetura planteada en 2.2



AB/CB: Podimos ver que cuando mobemos el punto D hacia arriba la longitud de los lados AB y CB son muy similares en su valor numerico por eso cuando hacemos la divición estando el angulo en 90° nos da uno, puesto que la diferencia de valor numerico de los lados es muy minima, Cuando el angulo esta en 0 el resultado de la divición AB/CB es mayor puesto que al estar en 0 el angulo la medida de el lado BC es 0, y al dividir el valor numerico del lado AB sobre el BC nos va a dar el resultado mayor

En este ejemplo observamos que la demostración de la conjetura que hace el estudiante se basa en lo que sucede en los ángulos 0° y 90°, además utiliza como argumentos los resultados de las divisiones de los valores de los lados del triángulo en cada caso. Esta demostración corresponde a un experimento crucial y al nivel 2.

5. Conclusiones

Los procedimientos desarrollados mediante la implementación de la primera actividad, permitieron a los estudiantes avanzar en sus niveles de razonamiento, se pudo observar como mediante la descripción de los archivos, los estudiantes fueron generalizando propiedades y usando definiciones que los llevaron a adquirir habilidades en la demostración. El análisis cualitativo permitió establecer categorías emergentes para la descripción inicial propuesta de los niveles de Van Hiele con lo cual se ha ido perfeccionando la caracterización. Las plenarias favorecieron la comprensión de conceptos y propiedades que descubrieron con la utilización del software, se ha visto progreso en el avance lo numérico hacia lo algebraico y en la elaboración de demostraciones más formales.

Referencias bibliográficas

Burger, W. & Shaughnessy, J. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*. *17*(1), pp 31-48.

Crowley, M. (1987) The Van Hiele model of the development of geometric thought, en N.C.T.M.(Ed.), *Learning and teaching geometry, K-12* (1987 Yearbook) (pp. 1-16). N.C.T.M.: Reston, USA.

Fiallo, J. (2011). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica*. (Tesis de Doctorado) Universidad de Valencia.

Guillén, G. (2004) El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: Describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación Matemática 16*(3), 103-125.

Gutiérrez, A. (2007). Procesos matemáticos en la enseñanza/aprendizaje de la geometría. XVI Congreso Nacional de Matemáticas. Medellín. Colombia.

Ministerio de Educación Nacional MEN. (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Áreas obligatorias y fundamentales.* Colombia: M.E.N.

Ministerio de Educación Nacional (MEN), (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas ciencias y ciudadanía*. Colombia: M.E.N.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Van Hiele, P.M. (1957). *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría).* (Tesis doctoral). Universidad de Utrecht, Utrecht (Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991).

Descripción	ángulos internos y externos del triángulo por medio de dibujos a mano alzada o con herramientas, utiliza partes de su cuerpo para describir ángulos, en su lenguaje usan palabras como trayectoria para referirse a la amplitud de un ángulo. • Tendencia a describir en forma estática lo que observa en la pantalla, por ejemplo escribe valores de las razones o de los lados de los triángulos a pesar de observar construcciones dinámicas. • Identifican las seis razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y las describen como "cocientes" entre los lados del triángulo rectángulo.	lados del triángulo rectángulo. • Reconocen que el valor de las razones trigonométricas de un triángulo depende de la amplitud de los ángulos del triángulo pero no depende de las longitudes de sus lados. En su lenguaje usan la palabra amplitud • Reconocen con ayuda de SGD que las razones trigonométricas seno y coseno varían entre cero y uno; tangente y cotangente entre cero e infinito; secante y cosecante entre uno e infinito. • Reconocen que seno y cosecante; coseno y secante; tangente y cotangente son recíprocas respectivamente. • Reconocen que los ángulos agudos del triángulo rectángulo son complementarios. • Reconocen con ayuda de SGD que: $sen(A) = \cos(90 - A)$; $cos(A) = \text{sen}(90 - A)$; $tan(A) = \cot(90 - A)$; • Reconocen que: $\tan(A) = \frac{sen(A)}{cos(A)}$	
Uso de definiciones		Usan las definiciones de las razones trigonométricas del triángulo rectángulo: $\text{sen}(A) = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ $\cos(A) = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ $\tan(A) = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$ $\cot(A) = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}$ $\sec(A) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}}$ $csc(A) = \frac{hipotenusa}{opuesto}$	• Relaciona las definiciones de las razones trigonométricas en el triángulo rectángu cociente y como relación entre magnitu positivas.
Formulación de definiciones		Comprenden las definiciones: $\text{sen}(A) = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ $\cos(A) = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ $\tan(A) = \frac{sen(A)}{\cos(A)}$ $\cot(A) = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}$ $\sec(A) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}}$ $csc(A) = \frac{hipotenusa}{opuesto}$	Conjunto de propiedades necesarias y Encontrar relaciones entre las razones tr Reconocen con ayuda de SGD $sen(A) = \cos(90 - A)$; $cos(A) = se$ $tan(A) = \cot(90 - A)$;
Demostración		Realizan demostraciones empíricas (Empírica Ingenua, Experimento crucial, Ejemplo Genérico Analítico): Uso de ejemplos que encuentra en la pantalla para demostrar la variación de las razones trigonométricas. También utiliza ejemplos cruciales en cero grado y en noventa grados para observar los valores específicos de las razones con los cuales demuestra su variación • Demuestran que las razones trigonométricas seno y coseno varían entre cero y uno; tangente y cotangente entre cero e infinito; secante y cosecante entre uno e infinito • Demuestran que seno y cosecante; coseno y secante; tangente y cotangente son recíprocas respectivamente. • Las propiedades reconocidas de las razones trigonométricas: $sen(A) = \cos(90 - A)$; $cos(A) = \text{sen}(90 - A)$; $tan(A) = \cot(90 - A)$; • Demuestran que: $\tan(A) = \frac{sen(A)}{cos(A)}$	Realizan demostraciones empíricas (Eje Intelectual) Realizan demostraciones deductivas (Expe • Demuestran que las razones trigonomét coseno varían entre cero y uno; tangent entre cero e infinito; secante y cosecant infinito • Demuestran que seno y cosecante; cose tangente y cotangente son recíprocas re • Las propiedades reconocidas de las razo trigonométricas: $sen(A) = \cos(90 - A)$ $cos(A) = \text{sen}(90 - A)$; $tan(A) = \cot($ • Demuestran que: $\tan(A) = \frac{sen(A)}{cos(A)}$

Anexo 1 Caracterización de los descriptores primera actividad