PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN CON GEOGEBRA

Francisco Haro Laguardia
calzmex@yahoo.es
IES Jándula de Andújar (Jaén) España

Tema: TIC y Matemática
Modalidad: CB
Nivel educativo: Medio (11 a 17 años)
Palabras clave: GeoGebra. TIC. Optimización

Resumen

Se va a exponer la experiencia en un centro de enseñanza secundaria de la comunidad de Andalucía en España, con alumnos de último curso. La comunicación hará referencia al estudio y análisis de problemas de optimización utilizando GeoGebra, y a través de la plataforma Moodle del centro El trabajo consiste en un archivo html manipulable de GeoGebra y un cuestionario dirigido. El objetivo del trabajo con los alumnos fue que reconocieran las regularidades, así como relacionar el análisis y la geometría en algunos casos. Finalmente, las conclusiones de los alumnos se debatieron en el aula.

Desarrollo

La comunicación que presento se refiere aun trabajo en el aula de 2º de Bachillerato, grupos A y B en el curso escolar 2012/13. Un campo fundamental de las matemáticas es la búsqueda de regularidades y GeoGebra permite trabajar de forma muy eficaz en este campo.

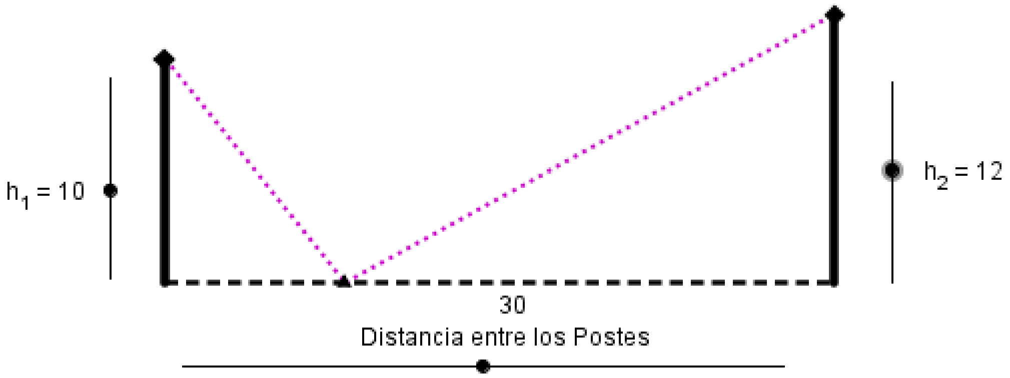
Cuando se plantea un problema de optimización en el que se tienen unas condiciones iniciales y se pretende optimizar unas dimensiones, un coste, unos gastos, una capacidad… la pregunta que siempre nos podemos hacer seria: ¿Si cambiamos las condiciones iniciales, podría cambiar la solución? ¿Cómo afectaría esos cambios a la solución del problema? GeoGebra permite, gracias a la potente herramienta de los deslizadores, cambiar esas condiciones iniciales, y como programa dinámico que es, reestructurar y recalcular todo.

Voy a presentar dos problemas de optimización, el primero, que ha sido con el que he trabajado con los alumnos, y otro que plantearé el próximo curso a los nuevos alumnos.

Problema nº 1

Se quieren unir dos postes de alturas 10 y 12 que distan 30 metros entre sí mediante un cable. Éste se va a anclar en un punto intermedio del segmento que une la base de los postes. ¿Dónde debemos situar el anclaje para que la longitud del cable sea mínima?

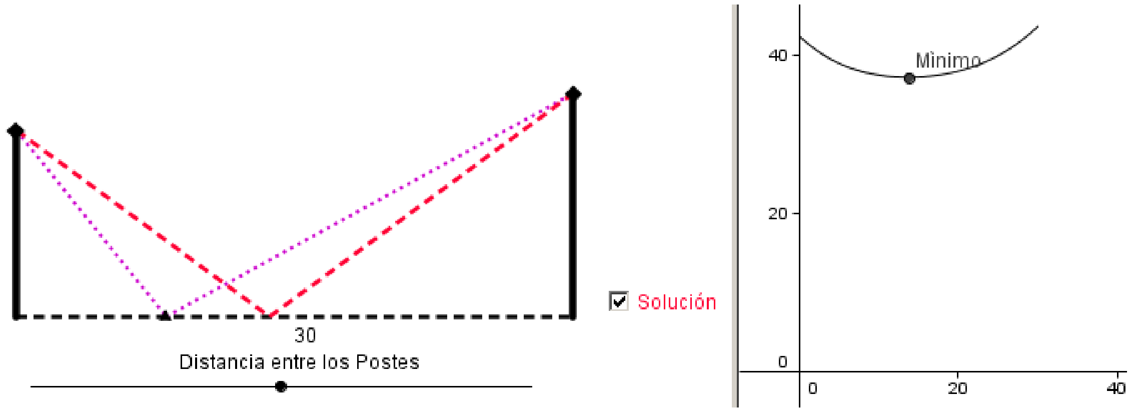
El problema lo planteé con la posibilidad de poder variar la distancia entre los postes y la altura de los mismos.



Fijando una distancia y una altura comenzamos a ver las posibles soluciones moviendo el punto de anclaje y por experimentación, buscamos la menor longitud del cable.

De la misma manera hay una segunda ventana gráfica en la que el problema se resuelve de forma analítica, coincidiendo los resultados gráficos con los analíticos, algo que los alumnos valoran muy positivamente.

En todo momento el alumno puede activar la casilla de solución aunque se le advierte que es mucho mejor que intenten obtenerla ellos antes y la usen solo para comprobar sus resultados.



De la misma manera, en la ventana gráfica aparece la solución como el mínimo de la función a optimizar.

Además hay otras casillas como las proporciones entre las alturas de las torres y la distancia del punto de anclaje a ellas.

El cuestionario consta de ocho ítems encaminados a encontrar regularidades, y son los siguientes:

A) Mueve el punto de anclaje y observa cual puede ser la solución que haga mínima la longitud del cable
B) Mueve la altura de uno de los postes y comprueba nuevamente qué ocurre al mover el punto de anclaje
C) Coloca los dos postes a la misma altura y vuelve a comprobar lo que ocurre
D) Activa la casilla de proporciones y comprueba que ocurre
E) Si separamos los postes o los acercamos, ¿qué observas?
F) Activa la casilla solución y observa si tus conclusiones son acertadas
G) Activa por último la casilla de proporciones de la solución y varía las alturas de los postes y la distancia entre ellos, ¿qué ocurre?
H) Por último, saca tus propias conclusiones finales del problema de optimización planteado

Problema 2

Un alambre de 20 metros de longitud se quiere dividir en dos trozos. Con uno de los trozos se construye un rectángulo cuya base es doble que la altura, y con el otro un cuadrado. Calcula las longitudes de cada uno de los trozos para que la suma de las áreas de rectángulo y cuadrado sea mínima.

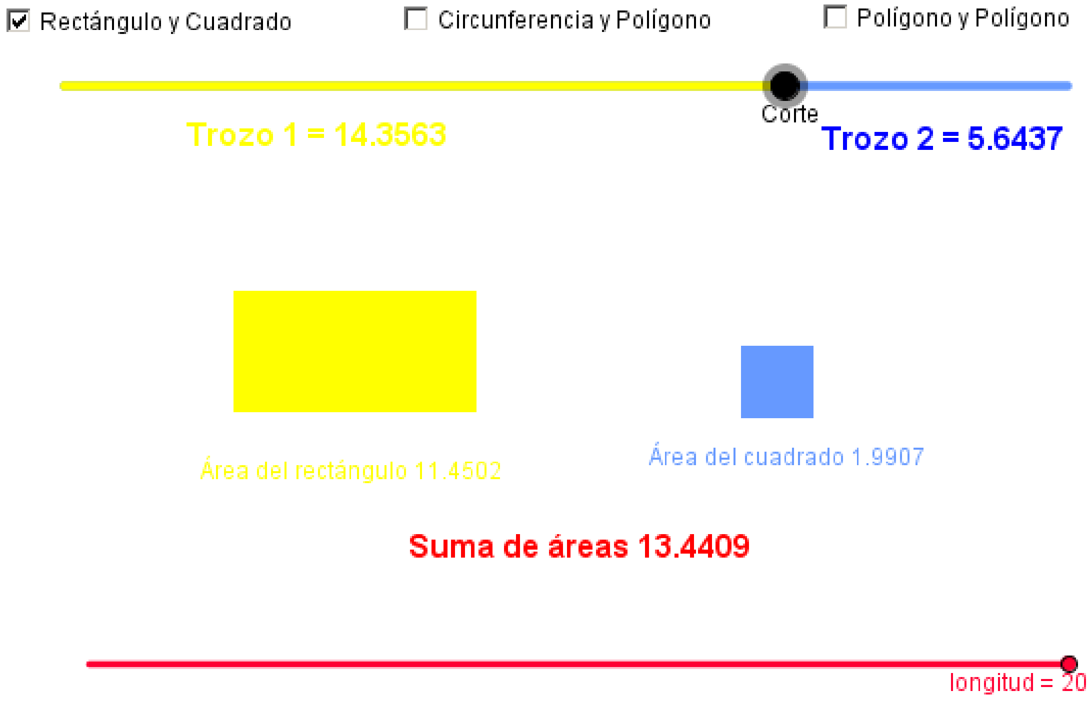
¿Y si queremos construir una circunferencia y un cuadrado?

¿Y si queremos construir un triángulo equilátero y un cuadrado?

Este es un problema típico de optimización y al igual que en el anterior nos podemos preguntar qué ocurre si la longitud del alambre varía. O también podríamos plantearnos ¿qué ocurriría si en lugar de construir una circunferencia y un cuadrado, construimos una circunferencia y un hexágono? ¿O incluso dos polígonos regulares cualesquiera?

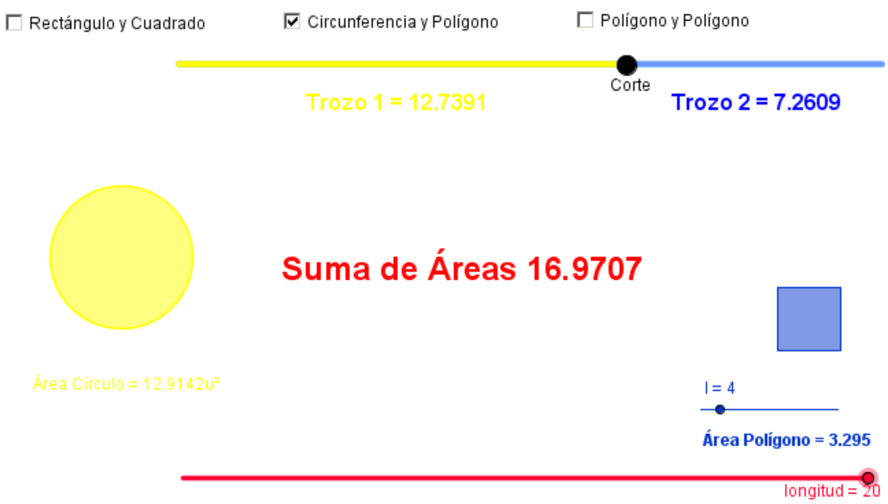
El archivo html que se adjunta resuelve estas cuestiones.

He creado tres opciones, en las que los polígonos regulares pueden variar sus lados entre tres y seis



El cuestionario dirigido al que hay que responder consta de dieciocho ítems y es el siguiente.

A) Activa la casilla de rectángulo y cuadrado y mueve el punto de corte del alambre para buscar una solución.
B) Cambia las dimensiones del alambre, a la mitad y prueba a ver qué ocurre. Vuelve a cambiar la longitud del cable y observa los resultados, puedes anotarlos en la tabla del Anexo.
C) ¿Qué conclusiones puedes sacar?



D) Desactiva la casilla anterior y activa la que corresponde a la circunferencia y el polígono (trabajaremos en principio con un cuadrado) y mueve el punto de corte del alambre para buscar una solución.

E) Observa ambas figuras. ¿Cómo están relacionadas? Puedes usar el Anexo.

F) Mueve la longitud del alambre y comprueba lo que ocurre con las solución.

G) Mueve el deslizador para l=3, estarás trabajando con una circunferencia y un triángulo y vuelve a buscar la solución óptima. ¿compara las longitudes de los trozos con los resultados anteriores. Haz lo mismo para el pentágono y el hexágono.

H) Para ayudarte gráficamente puedes abrir el archivo “alambre.ggb” y mover la circunferencia o el polígono para compararlos. Hazlo y anota los resultados.

I) ¿Qué conclusiones puedes sacar a la vista de los resultados?

J) Desactivamos la casilla circunferencia y polígono y activa la casilla de polígono y polígono y comencemos trabajando con dos triángulos equiláteros. Cambia la longitud del alambre y comprueba lo que ocurre con la solución óptima

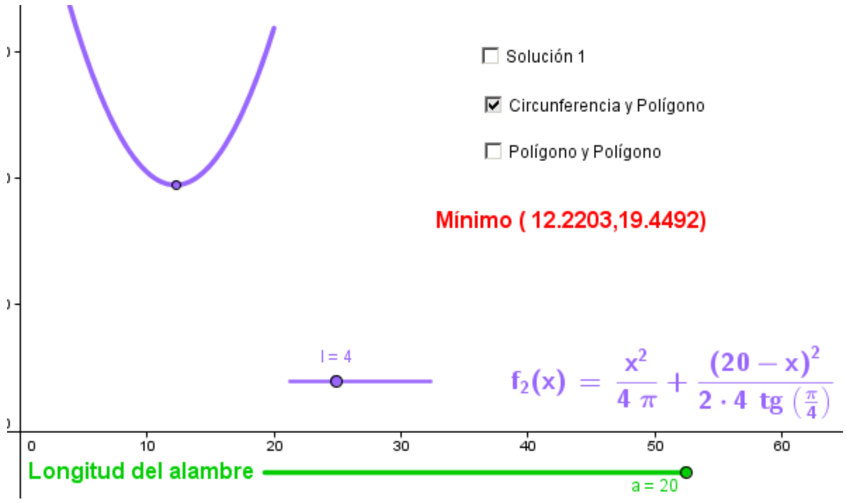
K) Moviendo los deslizadores, trabajemos con dos cuadrados, y luego con dos pentágonos y con dos hexágonos. ¿Qué puedes concluir? ¿Crees que si trabajamos con dos polígonos regulares cualesquiera seguirán manteniéndose estos resultados?

L) Ahora trabaja con un triángulo y un cuadrado. ¿Qué ocurre?

M) Trabaja con un cuadrado y un pentágono y compáralo con los resultados anteriores. ¿Ocurriría lo mismo si trabajamos con un polígono de n lados y otro de n+1 lados?

N) La combinación de polígonos admite varias posibilidades de estudio, ¿cuántas? Si ampliamos a polígonos regulares de hasta diez lados, ¿cuántos estudios diferentes podemos hacer?

O) Puedes crear tu propia tabla de resultados para sacar conclusiones generales del ejercicio de optimización que se ha planteado



P) Finalmente abre el archivo de las soluciones analíticas y podrás comprobar los resultados obtenidos.

Q) Abre el archivo “soluciones alambre.ggb” y activa el rastro de los puntos mínimos de la solución y mueve el deslizador de la longitud del alambre, ¿qué observas? Hazlo con cada una de las soluciones.

R) Escribe claramente las conclusiones a las que te ha llevado el estudio del problema de optimización

Conclusiones

Tanto los alumnos como yo mismo, hemos valorado de forma positiva el trabajo realizado. Se ha podido trabajar la parte de las matemáticas dedicada a la búsqueda de regularidades y han valorado muy positivamente el uso de GeoGebra, en particular el uso de la herramienta del deslizador que permite con una sola definición tener un abanico de funciones, figuras, distancias, áreas,… dispuestas para su estudio.

El trabajo se va a volver a realizar en próximos cursos, y ampliar con algunos problemas. De la misma manera para próximos cursos se propondrá a los alumnos el diseño de este tipo de actividades para resolver problemas de optimización.

Referencias bibliográficas

Carrillo de Albornoz, A. (2009). *GeoGebra. Mucho más que geometría dinámica*. Madrid: RA-MA, Librería y Editorial Micoroinformática

Artículo en Revista

Carrillo de Albornoz, A. (2012). Demostración de teoremas con GeoGebra ¿Es posible? *Epsilon*, 29(3), 79-87.

Información extraída de una página web

Día GeoGebra (2012) Comunicaciones. *GeoGebra en el bloque de Análisis*. http://diageogebra.info/ Consultado 5/12/2011

Proyecto Gauss. Materiales Didácticos. *Materiales didácticos para Bachillerato* http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/materiales_didacticos.htm Consultado 10/09/2010

Ven por Mas. Temas. *Juegos de Lógica y estrategia*. http://venxmas.fespm.es/temas/mueve-ficha-juegos-matematicas-y.html Consultado 11/01/2012

II Jornadas GeoGebra Andalucía (2013) *Taller Optimizando dinámicamente con GeoGebra* http://thales.cica.es/aula/file.php/11/Comunicaciones/COM13.pdf Consultado 20/04/2012

ANEXO

Rectángulo y Cuadrado

Longitud	**Suma mínima**	**Trozo 1**	**Trozo 2**	**Observaciones**
20				
10				

Circunferencia y Polígono

Longitud	**Suma mínima**	**Trozo 1**	**Trozo 2**	**Radio**	**Lado**
20					
10					

Soluciones óptimas para circunferencia y Polígono

	Radio / Lado	**Trozo1 / Trozo 2**	**Posiciones**
Circunferencia y triángulo			
Circunferencia y cuadrado			
Circunferencia y pentágono			
Circunferencia y hexágono			

Dos Polígonos Iguales

Longitud	**Suma mínima**	**Trozo 1**	**Trozo 2**	**Lado**	**Observaciones**
20					
10					

Dos Polígonos Diferentes

Longitud	**Suma mínima**	**Trozo 1**	**Trozo 2**	**Lado l_1**	**Lado l_2**
20					
10					