

## EL DESARROLLO DEL SENTIDO DE LOS SÍMBOLOS EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICA. REFLEXIONES EN TORNO A LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA.

Jimena Fernández  
surrumbu@gmail.com  
Uruguay

Tema: I.1 Pensamiento algebraico.

Modalidad: CR

Nivel educativo: Formación y actualización docente.

Palabras clave: álgebra, formación de profesores, sentido de los símbolos, procedimiento ritual.

### Resumen

*En este trabajo se analizó el desarrollo del sentido de los símbolos de los estudiantes de último año de la carrera de Profesor de Matemática de un instituto de formación de profesores del Uruguay. El análisis de las producciones de los estudiantes se centró en la identificación de los comportamientos considerados por Arcavi (1994) como componentes del sentido de los símbolos. Según lo que pudimos apreciar, el sentido de los símbolos que han desarrollado estos estudiantes está vinculado fundamentalmente a la manipulación simbólica, dejando de lado otros aspectos significativos del álgebra. Observamos un escaso uso del álgebra como herramienta de investigación. También observamos que no es frecuente la inspección de expresiones simbólicas antes de comenzar a trabajar con ellas o la asociación de una expresión simbólica con su significado. Apreciamos que aquellos comportamientos no directamente relacionados con la manipulación simbólica aparecen esporádicamente. Durante el análisis de estos trabajos, nos enfrentamos con un fenómeno que consideramos valía la pena profundizar. Observamos que algunos estudiantes resolvían un mismo ejercicio por dos procedimientos distintos. Luego de obtener por el segundo procedimiento el mismo resultado que por el primero, estaban dispuestos a dar su respuesta. Enmarcamos este fenómeno dentro de la noción de procedimientos rituales de Vinner (2000).*

### Introducción

Hemos observado en nuestro trabajo como docentes, que generalmente los estudiantes logran desempeños aceptables en relación a la manipulación simbólica de las diferentes expresiones (resolver ecuaciones o inecuaciones por procedimientos estándar, operar con polinomios, reducir a común denominador dos fracciones algebraicas, etc.). Pero cuando el trabajo va más allá de la manipulación, cuando incluye la interpretación de los símbolos, la elaboración de expresiones, el uso creativo del álgebra como una herramienta capaz de brindar información sobre una situación o como un instrumento de investigación, los mismos estudiantes que mostraron ser capaces de realizar manipulaciones algebraicas presentan serias dificultades. Esto nos lleva a cuestionarnos al respecto del trabajo que realizamos en nuestras aulas como docentes: ¿Estamos

realmente enseñando álgebra a nuestros alumnos? ¿O estamos reduciendo simplemente el álgebra a la manipulación simbólica de expresiones?

Al analizar variadas investigaciones relacionadas con el aprendizaje del álgebra es posible apreciar una preocupación generalizada en relación a las dificultades que el trabajo con los símbolos presenta en estudiantes de todos los niveles de la educación y, particularmente, en la formación de profesores.

Según la NCTM (2000) las competencias relacionadas con el álgebra son de suma importancia para la educación matemática de los individuos. No solo debido a que los métodos y las ideas del álgebra son fundamentales para el trabajo en diversas áreas de la matemática, sino también por la importancia del aprendizaje del álgebra en la vida adulta de los individuos.

En relación a lo que se espera de un profesor de matemática, la NTCM plantea que estos deben saber y comprender profundamente la matemática que están enseñando. Deben disponer de ese conocimiento de manera flexible en sus tareas de enseñanza. Es imprescindible que los profesores sean conscientes de que las decisiones didácticas que toman, tienen un gran impacto en la forma en que los estudiantes aprenden matemática. Agregan que es una meta lograr que los profesores puedan generar entornos ricos de aprendizaje y para cumplir este objetivo, los conocimientos y las destrezas matemáticas del profesor juegan un papel fundamental.

Consideramos que la formación permanente de los docentes es un proceso que acompaña el ejercicio de la profesión, pero creemos que la formación inicial es fundamental en nuestro posterior desempeño y posterior capacidad para continuar formándonos. Los docentes somos responsables de acompañar a los estudiantes en sus primeros acercamientos al álgebra, por lo que nuestras propias concepciones sobre el álgebra desempeñan un rol muy importante. Fue por esto que decidimos centrar nuestro estudio en la formación inicial de profesores, con el objetivo de que a partir del análisis de algunos aspectos del pensamiento algebraico de los futuros profesores podamos aportar a la formación docente de nuestro país y también a la mejora de la educación matemática en general.

El presente trabajo se encuadra en la línea del pensamiento algebraico. Proponemos indagar el sentido de los símbolos que han construido los estudiantes de profesorado de matemática que cursan el último año de su carrera (4º año) en el Instituto de Profesores Artigas (instituto de formación docente para educación media de Montevideo y el de mayor estudiantado de nuestro país). La investigación será de corte cualitativo y

consistirá en identificar el desarrollo del sentido de los símbolos de los estudiantes que se manifiesta en la resolución de diferentes situaciones donde lo algebraico está en juego.

### **Formulación de objetivos.**

#### ***Objetivo***

Explorar y analizar el desarrollo del sentido de los símbolos que manifiestan en la resolución de diferentes situaciones donde lo algebraico está en juego, los estudiantes del último año (4to año) de la carrera de Profesor de Matemática de Educación Media en un instituto de formación docente del Uruguay.

Consideramos que el análisis de las características del trabajo simbólico que realizan los futuros profesores de matemática, nos permitirá apreciar el desarrollo del sentido de los símbolos de los estudiantes que están realizando su última práctica docente y a partir de los hallazgos, reflexionar sobre sus implicancias para luego realizar recomendaciones para la formación de profesores en el Uruguay. Este trabajo se ubica en la línea de investigación del Pensamiento Algebraico en el contexto de la formación de profesores de matemática.

### **Marco teórico**

Para la realización de esta investigación fue utilizado como marco teórico lo desarrollado por Abraham Arcavi (1994, 2005, 2007) en su caracterización del sentido de los símbolos. En adición a esto y para complementar el marco teórico se utilizó la noción de procedimiento ritual de Vinner (2000). A continuación se presenta un breve resumen del marco teórico utilizado.

Arcavi plantea que el “*sentido de los símbolos*” es un complejo y multifacético “sentimiento” hacia los símbolos. Según Arcavi, el sentido de los símbolos es el componente algebraico de un tema mucho más amplio que es el aprendizaje significativo de la matemática. Esto implica que todas las actividades matemáticas que un individuo realiza estén dotadas de significado, e implica ser capaz de reconocer la capacidad que se obtiene al entender y manipular situaciones matemáticas, y la utilidad de las herramientas matemáticas para hacer progresos dentro de la matemática y más allá de ella. En sus trabajos Arcavi no pretende dar una definición acabada de lo que es

el sentido de los símbolos, sino que a partir de sus investigaciones, enumera diferentes comportamientos que considera son ejemplos del sentido de los símbolos.

Los comportamientos que Arcavi describe como los componentes más importantes que demuestran haber construido “sentido de los símbolos” son:

- 1) Amigabilidad con los símbolos. Esto incluye la comprensión de los símbolos de forma que estén fácilmente disponibles para ser usados cuando es conveniente y para ser dejados de lado en el caso en que sean una opción engorrosa.
- 2) Capacidad para “manipular” y también “leer a través de expresiones simbólicas”, como dos problemas complementarios en la resolución de problemas algebraicos. Esto incluye la capacidad de adoptar una visión global de las expresiones simbólicas y, por otro lado, poder separarse de los significados para que las manipulaciones sean rápidas y eficientes. La lectura de y “a través de” las expresiones simbólicas con el objeto de captar significados agrega niveles de conexión y razonabilidad a los resultados.
- 3) Tomar conciencia de que puede diseñar exitosamente relaciones simbólicas que expresen cierta información dada o deseada.
- 4) Ser capaz de reconocer en expresiones simbólicas equivalentes, significados “no equivalentes”. La manipulación simbólica de las expresiones algebraicas nos permite obtener expresiones equivalentes, sin embargo cada expresión con la que nos enfrentamos puede ser fuente de nuevos significados.
- 5) La capacidad de seleccionar una representación simbólica y, en ciertos casos, reconocer nuestra propia insatisfacción con esa elección e ingeniárselas para buscar una mejor.
- 6) Realizar manipulaciones simbólicas guiadas por un objetivo buscado, evitando realizar operaciones circulares y teniendo una visión global (“gestalt”) en la que se ven a los símbolos organizados de una determinada manera y no solo como una concatenación de letras.
- 7) Conciencia de la necesidad de revisar los significados de los símbolos durante la aplicación de un procedimiento, durante la resolución de un problema o durante la inspección de un resultado, y comparar esos significados con las intuiciones acerca de los resultados esperados y con la situación misma del problema.
- 8) Conciencia de que los símbolos pueden desempeñar roles distintos en distintos contextos y desarrollar un sentido intuitivo de esas diferencias.

Se incluyó también dentro del marco teórico de este trabajo la noción de *procedimiento ritual* desarrollada por Shlomo Vinner (1997, 2000) por entender que complementa la visión de Arcavi, y que permite dar interpretación al fenómeno que consiste en emplear dos procedimientos sucesivos diferentes para resolver una misma tarea. Es decir, el estudiante resuelve la tarea propuesta utilizando cierto procedimiento y a continuación la vuelve a resolver aplicando un segundo procedimiento.

De acuerdo con la noción presentada por Vinner, un procedimiento ritual es una secuencia de palabras o símbolos matemáticos y acciones matemáticas, en las que se observa que con el cumplimiento de esa determinada secuencia de palabras, símbolos matemáticos o acciones matemáticas se complacerá a alguien, ya sea el sistema, los maestros, los padres, etc. También es posible observar que quien cumple con dicha secuencia no entiende necesariamente por qué se debe seguir esa determinada secuencia. Por otro lado, también se puede observar que quien cumple con un ritual cree que siguiendo una cierta secuencia de símbolos o acciones se dará aprobación a ciertos aspectos involucrados en el ritual y que no son necesariamente claros durante el ritual.

Vinner considera que los rituales son comunes en el comportamiento humano y sugiere asumir que existen en nosotros ciertos esquemas psicológicos asociados a los rituales que denomina “esquemas rituales”. Para Vinner, cuando los estudiantes hacen matemática, se dan ciertos estímulos que activan estos “esquemas rituales” sin que el estudiante sea consciente de esto, provocando así respuestas rituales. Cuando el estudiante elige, quizás inconscientemente, una reacción ritual a un determinado estímulo, es posible que el estudiante esté, también inconscientemente, rechazando o excluyendo otro tipo de reacción, quizás más significativa.

Se confeccionó el cuestionario que fue aplicado a los estudiantes en base al marco teórico de Arcavi (2000) seleccionado para la investigación. El cuestionario tuvo como objetivo el poder evidenciar los comportamientos que el autor desarrolla en sus trabajos y así caracterizar el desarrollo del sentido de los símbolos que han desarrollado los estudiantes que participarán en nuestra investigación. Realizamos un análisis a priori de este cuestionario a la luz de nuestro marco teórico, con el objetivo de contrastar este análisis con las respuestas que brindaron los estudiantes. Se aplicó el cuestionario a todos los estudiantes que se encontraban cursando la materia Didáctica III del 4to año de la carrera. Por estar cursando esta materia es que todos estos estudiantes estaban realizando su última práctica docente, es decir, tenían un grupo a cargo.

### **Conclusiones a las que arribamos luego del análisis de las producciones de los estudiantes.**

Los trabajos de los estudiantes que analizamos nos sugieren que el sentido de los símbolos de los estudiantes que cursan el último año de la carrera de profesorado de matemática, está vinculado fundamentalmente a la manipulación simbólica, pues los comportamientos reportados por Arcavi -vinculados a la manipulación simbólica- aparecen frecuentemente en los trabajos producidos por los estudiantes.

Podemos apreciar en ellos la realización de transformaciones simbólicas adecuadas para cada caso, guiadas por el objetivo buscado. Pensamos que los estudiantes perciben a las expresiones simbólicas de manera global, y no como una simple concatenación de números y letras, logrando trabajo coherente con el objetivo buscado.

Los estudiantes reconocen que las transformaciones algebraicas que realizan les proporcionan expresiones equivalentes que son fuentes de nuevos significados. En general, reconocen dichos significados y utilizan la manipulación simbólica para obtenerlos.

Por otro lado, pudimos observar que los comportamientos de Arcavi que no están vinculados directamente a la manipulación simbólica, aparecen esporádicamente, vinculados a la situación en particular que plantea el ejercicio.

Notamos que un mismo estudiante demuestra haber desarrollado un determinado comportamiento en una situación, que además le es útil para resolverla, pero el mismo comportamiento no se evidencia al abordar una nueva situación en la que dicho comportamiento podría haber resultado valioso como estrategia de resolución. Observamos que no es frecuente por parte de los estudiantes el uso del álgebra como herramienta de investigación. No pudimos apreciar en los trabajos analizados la consideración del álgebra como una herramienta disponible para revelar la estructura de un problema, para profundizar en el análisis de una determinada situación o para aportar otras dimensiones al trabajo realizado, como puede ser la generalización de una situación puntual a todos los casos que cumplan determinadas características, o el extraer conclusiones a partir de las generalizaciones realizadas.

Pudimos observar también, que no es frecuente la inspección de expresiones simbólicas antes de comenzar a trabajar con ellas, o la asociación de una expresión simbólica con su significado. Los estudiantes que respondieron el cuestionario generalmente comienzan a realizar transformaciones algebraicas sin reflexionar en torno a las

características de la expresión y los significados asociados a ella. Esto provoca que los alumnos desencadenen procedimientos que los llevan a utilizar herramientas mucho más complejas de lo necesario.

Por otro lado, en aquellos casos en los que los alumnos realizan un trabajo previo de análisis de la expresión, este trabajo no aparece en todas las situaciones posibles. Es más frecuente evidenciar este comportamiento en situaciones en las que no se solicita resolver una ecuación, que en ejercicios cuyo objetivo sí es resolver una ecuación.

Observamos también que los estudiantes no suelen asociar los símbolos con sus significados. El dejar de lado los significados durante la resolución de un problema, les posibilita realizar procedimientos más eficaces, pero al no retomar estos significados pierden de vista el sentido del problema que resuelven, lo que en algunas oportunidades los lleva a proporcionar respuestas con falta de coherencia o de profundidad.

Esto también se relaciona con la elección de las expresiones simbólicas para representar una determinada situación. La forma en que se representa una determinada situación condiciona tanto el procedimiento a realizar como las conclusiones a las que se arriban.

El no tener presente los significados durante la resolución de un problema evita que sean capaces de revisar sus elecciones simbólicas, de reconocer su insatisfacción con ellas -en el caso en que no sean adecuadas o no brinden suficiente información-, y de realizar nuevas elecciones. En ciertas situaciones esta falta de conexión entre los símbolos y los significados, provoca que las respuestas presentadas en forma simbólica y las presentadas en forma verbal sean contradictorias o incoherentes.

Por otro lado, observamos en los cuestionarios analizados que los estudiantes no están familiarizados con el diseño de expresiones simbólicas con un objetivo deseado. En general, los estudiantes reconocieron que era posible relacionar los valores a través de una expresión simbólica, pero no la diseñaron por falta de información.

Por último pudimos apreciar en las producciones de los estudiantes, un trabajo dispar en relación al reconocimiento del rol que cumplen los símbolos. Esta disparidad estuvo presente en el trabajo de un mismo estudiante. Pudimos observar que esta disparidad está vinculada con la dificultad del ejercicio que se debe resolver.

Fue posible evidenciar en los trabajos de los estudiantes procedimientos que pueden ser considerados procedimientos rituales en el sentido en que los identifica Vinner (2000).

Los trabajos de los estudiantes nos sugieren que frente a ciertos estímulos, se desencadenan reacciones rituales que los llevan a proporcionar este tipo de respuestas.

Pudimos verlo claramente en los casos en los que los estudiantes presentaron dos

procedimientos diferentes frente a un mismo ejercicio. En esos casos, a pesar de haber resuelto el ejercicio de manera “no habitual” u original o poco común en las clases de matemática, realizaban a continuación un segundo procedimiento que podría considerarse rutinario o estándar para cotejar si arribaban a la misma respuesta. Mostraron de esta manera una escasa confianza en aquellos procedimientos que se alejan de los que se utilizan habitualmente en las aulas. Este tipo de trabajo pudo verse principalmente en la resolución de ecuaciones.

Pensamos que es posible también identificar como rituales aquellos procedimientos en que los alumnos utilizan herramientas más potentes de las necesarias para la situación a la que se enfrenta, pero que su uso es frecuente en las clases de matemática para dar respuesta a ejercicios con objetivos similares. Los estímulos proporcionados por estos ejercicios activan esquemas rituales en los estudiantes que los llevan a dar este tipo de respuestas. Creemos que es necesario continuar investigando en este tema.

### Referencias bibliográficas



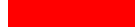
- Arcavi, A. (1994). Symbol Sense: Informal Sense- making in Formal Mathematics. En *For the Learning of Mathematics 14*, 24-35. Canadá: FLM Publishing Association.
- Arcavi, A. (1995). Teaching and learning Algebra: Past, present, and future. En *Journal of Mathematical Behaviour 14*, 145-162.
- Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. En *For the Learning of Mathematics 25*, 42- 48. Canadá: FLM Publishing Association.
- Arcavi, A. (2007) El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. Conferencia realizada como Profesor visitante, CRICED, Tsukuba University- Japan. En <http://ebookbrowse.com/arcavi05-el-desarrollo-y-el-uso-del-sentido-de-los-simbolos-doc-d37871752> (01/06/2011).
- Conference Board on Mathematical Sciences (CBMS). (2001). The mathematical education of teachers. Washington, DC: Author
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principals and Standards for School Mathematics*. USA: NCTM.
- Vinner, S. (1997). The pseudo-conceptual and the pseudo-analytical thought processes in mathematics learning. En *Educational Studies in Mathematics* vol. 34, 97-129.
- Vinner, S. (2000). Mathematics Education- Procedures, Rituals and Man’s Search for Meaning. Conferencia dictada en el ICME 9, Universidad Ben Gurion de el Negev, Japón. En: <http://www.fisme.science.uu.nl/nwd/nwd2003/handouts/vinner.pdf>



## Anexo



### *Síntesis gráfica de los comportamientos de Arcavi evidenciados en los trabajos de cada estudiante*

	Comportamiento 1	Comportamiento 2	Comportamiento 3	Comportamiento 4	Comportamiento 5	Comportamiento 6	Comportamiento 7	Comportamiento 8
Daniela	Red	Yellow	Green	Green	Red	Green	Red	Yellow
José	Red	Yellow	Yellow	Green	Green	Green	Red	Yellow
Mariana	Red	Red	Red	Green	Yellow	Green	Red	Yellow
Leticia	Yellow	Red	Yellow	Green	Yellow	Green	Green	Green
Gabriel	Red	Yellow	Red	Green	Red	Green	Red	Yellow
Lorena	Red	Green	Yellow	Green	Green	Green	Red	Green
Fabiana	Red	Red	Red	Red	Red	Green	Red	Yellow
Damián	Red	Red	Red	Yellow	Green	Green	Red	Yellow
Elena	Red	Yellow	Red	Yellow	Red	Yellow	Green	Yellow
Silvia	Red	Red	Green	Red	Yellow	Green	Red	Green
Darío	Red	Red	Green	Green	Yellow	Green	Green	Yellow
Sebastián	Yellow	Red	Red	Green	Green	Green	Green	Green
Carla	Yellow	Green	Red	Green	Red	Green	Red	Green
Ana	Red	Yellow	Yellow	Yellow	Red	Green	Red	Green
Pedro	Yellow	Green	Red	Yellow	Yellow	Green	Yellow	Yellow
Clara	Yellow	Yellow	Green	Red	Green	Green	Red	Yellow

-  Comportamiento claramente detectado. El comportamiento fue observado en todos los trabajos del estudiante.
-  Comportamiento parcialmente desarrollado. El comportamiento fue observado en algunos ejercicios y en otros no.
-  Comportamiento no apreciado. No pudo observarse este comportamiento en ninguna respuesta del estudiante.

### *Observación de procedimientos*

	Comportamiento 1	Comportamiento 2	Comportamiento 3	Comportamiento 4	Comportamiento 5	Comportamiento 6	Comportamiento 7	Comportamiento 8
Daniela	Blue	Blue						
José	Blue	Blue						
Mariana								
Leticia	Blue	Blue						
Gabriel								
Lorena	Blue	Blue						
Fabiana	Blue	Blue		Blue				
Damián	Blue	Blue		Blue				
Elena	Blue	Blue						
Silvia	Blue	Blue						
Darío	Blue	Blue		Blue				
Sebastián	Blue	Blue						
Carla								
Ana		Blue		Blue				
Pedro								
Clara		Blue		Blue				

-  En ejercicios vinculados con estos comportamientos los estudiantes hallaron la solución mediante dos procedimientos diferentes.
-  En ejercicios vinculados con estos comportamientos los estudiantes realizaron procedimientos que pueden ser considerados como respuestas rituales como ser la aplicación herramientas más potentes de lo necesarias o un trabajo de manipulación simbólica extenso e innecesario.