

CONSIDERACIONES SOBRE LA DIDÁCTICA DE LA PROBABILIDAD Y DE LA ESTADÍSTICA.

Félix Núñez Vanegas

fnunez@itcr.ac.cr

Instituto Tecnológico de Costa Rica – Universidad de Costa Rica, Costa Rica

Tema: Pensamiento relacionado con la Probabilidad.

Modalidad: CB

Nivel educativo: Formación y actualización docente

Palabras clave: Didáctica estadística, probabilidad, ley de los grandes números, efecto topaze, deslizamiento metacognitivo.

Resumen

Actualmente, en Costa Rica, el Ministerio de Educación Pública ha propuesto nuevos programas para la enseñanza de la matemática. Estos programas plantean significativos cambios, tanto en contenidos (introducción a la estadística y a la probabilidad) como en metodología (Teoría de Situaciones de Brousseau). Lo anterior ha generado en el sector docente del área de matemática de la enseñanza primaria y secundaria una cierta incertidumbre y preocupación por el abordaje de tales temas. En ese sentido, el presente trabajo es un aporte que brinda un recuento de los trabajos realizados en Costa Rica sobre la enseñanza de la probabilidad y de la estadística, además de un ejemplo de situación problema y de los principales errores o efectos en que el docente puede incurrir en su afán de que el estudiante aprenda.

1. Introducción

Recientemente en Costa Rica se aprobaron nuevos programas de estudio en el área de matemática, desde la enseñanza primaria hasta la secundaria. Dichos programas contemplan, entre otros cambios, la inserción de una serie de contenidos y modificaciones en el abordaje de otros ya existentes que tienen que ver con probabilidad y estadística. Si se lograran cumplir los objetivos propuestos, el egresado de la enseñanza secundaria tendría herramientas sólidas que le permitirían interpretar el mundo azaroso que los circunda.

El sustento teórico de dichos programas es la Teoría de Situaciones de Brousseau (1986), de la Escuela Francesa. La resolución de problemas, como medio para lograr el aprendizaje, es medular. Más concretamente, en ellos se señala que

“Este estilo propone una secuencia de cuatro momentos pedagógicos centrales en la enseñanza de las matemáticas: presentación de situaciones problema por parte del educador, solución o aporte de ideas por parte del estudiante (en varias modalidades: individualmente, parejas, subgrupos, ...), comunicación de resultados por el estudiante y, finalmente, la institucionalización por parte del educador” (Programas de estudio matemáticas, 2012).

El objetivo nuestro es que los docentes involucrados conozcan la Teoría de Situaciones y los trabajos realizados en didáctica de la estadística y probabilidad.

2. Trabajos realizados en Costa Rica

El interés mostrado hacia la enseñanza de la estadística, de acuerdo con Batanero (2001) quien hace referencia a Holmes (1980), tiene su asidero en los siguientes argumentos:

La estadística es una parte de la educación general deseable para los futuros ciudadanos adultos, quienes precisan adquirir la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en los medios informativos.

También the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) establece una serie de estándares y principios para la educación matemática para primaria y secundaria en el año 2000, propuesta planteada por docentes estadounidenses.

Como consecuencia de esto, en Costa Rica hay algunos trabajos desarrollados en la Universidad de Costa Rica, una tesis de 1999, realizada por tres estudiantes de licenciatura en Educación Primaria con énfasis en primero y segundo ciclos, en la que proponen cómo tratar la estadística y probabilidad en primer y segundo ciclos. (Carvajal, et al, 1999). Adicionalmente, un trabajo de graduación de la Maestría Profesional en Planificación Curricular, una propuesta metodológica de la enseñanza de la estadística, en la que se brinda una guía metodológica que motive al docente de matemática de octavo año a enseñar la estadística, incluyendo actividades innovadoras desde la correlación interdisciplinaria. (Espeleta, 2000).

En el 2007, se elaboró una Memoria de Seminario de Graduación en la Universidad de Costa Rica, específicamente en la Escuela de Matemática, titulado “Diseño de una unidad didáctica que oriente el proceso de enseñanza aprendizaje de los conceptos de estadística de tercer ciclo del programa del Ministerio de Educación Pública.”

En ese trabajo, se aborda la enseñanza de la estadística desde una perspectiva dinámica, en la que el estudiante tiene una participación activa, y al profesor se les dan las definiciones y conceptos, para que pueda llevarlos al aula. (Navarro, 2007).

En 2008, se elaboró una tesis en la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica titulada, La Enseñanza y el aprendizaje de la estadística en secundaria: situación actual, aproximación metodológica. Se realiza una propuesta para enseñar algunos temas de estadística en secundaria.

Por otro lado, en 2009 y 2011 se organizaron los Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos (I EDEPA y II EDEPA

respectivamente) en el Instituto Tecnológico de Costa Rica, organizados por la escuela de Matemática de esta institución. En ellos se desarrollaron trabajos que tenían que ver con la enseñanza y el aprendizaje de probabilidad y conceptos de estadística, así como también con aplicaciones de estos tópicos.

Recientemente, los días 11, 12, 13 y 14 de diciembre de 2012, la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica organizó la Primera Escuela de Verano, como una actividad pre-congreso del III EDEPA que se desarrollará en noviembre de 2013.

3. Un ejemplo de situación a-didáctica

En muchas ocasiones enseñamos a construir tablas y gráficos estadísticos y abordamos dicha enseñanza desde un punto de vista técnico y casi que cosmético.

No se debe olvidar que la construcción de estos tiene su asidero en la necesidad de resumir y presentar la información de la manera más clara posible y que se entienda de qué se trata lo que se presenta. Es frecuente ver que los estudiantes construyen gráficos y tablas de forma algorítmica, pero la interpretación de los mismos, es confusa, y muchas veces errónea.

Nos parece importante que antes de iniciar con una clase de cómo construir tablas y gráficos, debería el estudiante de sentir la necesidad de resumir la información y diseñarse un problema con distintas preguntas para lograrlo.

Al respecto, (Núñez, 2009), planteó a un grupo de estudiantes de la carrera Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora del Instituto Tecnológico de Costa el siguiente experimento: Se lanza un dado 30 veces, ¿Cuántas veces cree usted que el resultado del dado sea par?

Se les pidió que anotaran en una tabla como la siguiente los posibles resultados que obtendrían sin lanzar el dado, y los que se obtienen lanzando el dado: El primer experimento es simulado y el otro el real. Se les indicó que escribieran P para par e I para impar.

Una vez que los estudiantes realizaron el experimento, se les plantearon las siguientes situaciones problema:

¿Cómo podemos saber cuál de las dos secuencias de resultados es inventada y cuáles provienen de un experimento real?

Dos estudiantes llegaron a la conclusión de que debería haber igual cantidad de veces pares que impares, puesto que la probabilidad de que sea par es la misma que la de ser impar: $1/2$. Por tanto, se debería contar el número de veces que salió par e impar,

afirmaron. Así, se desprende que no hay claridad en el concepto de probabilidad y de la Ley de los Grandes Números.

Se pidió a los estudiantes que escribieran en la pizarra la cantidad de veces que obtuvieron par en el experimento simulado. Se obtuvieron los siguientes datos: 15, 16, 13, 14, 15, 15, 13, 16, 15, 17, 15, 17, 15, 17, 17, 15, 15, 15, 13, 16

Con el fin de crearles la necesidad de resumir la información y que no tuvieran que estar contando cada vez que se les preguntara se les formularon las siguientes situaciones:

¿Cuántos estudiantes obtuvieron 14 pares? ¿Cuántos estudiantes obtuvieron 15 pares? y ¿Cuántos estudiantes obtuvieron 16 pares?. Para responder estas preguntas, los estudiantes de este curso tuvieron que ver los datos una y otra vez y les resultaba tedioso contarlos, por lo que ellos mismos sintieron la necesidad de encontrar una forma idónea para resumir y ordenar los resultados. Y la encontraron, observaron que el número de pares que más se repitió fue quince. Finalmente, con el gráfico de barras verticales los estudiantes apreciaron que la cantidad de pares se concentra alrededor de 15.

Después de construir la distribución real, los estudiantes realizaron un gráfico de puntos simultáneos, donde pudieron comparar ambas distribuciones.

Se observó una mayor dispersión en los datos reales, en el sentido de que en el experimento simulado, el 45% de los estudiantes (Nueve) obtuvo quince, mientras que en el experimento real, el 45% de los datos están entre 13 y 15 por ejemplo, sin embargo, los promedios, en ambos experimentos, no difieren en mucho (15.2 simulado, 13.6 real).

La situación anterior deja ver también que el concepto de la Ley de los Grandes Números no es claro. Por ello, en el contexto del II Congreso sobre didáctica de la Estadística se desarrolló un taller en el que entre otros, se propuso el siguiente ejercicio: Explore con Excel la siguiente afirmación: De acuerdo a la Ley de los grandes números, entre más veces se tira una moneda, más cerca se estará el número obtenido de escudos de la mitad del total los lanzamientos.

El comportamiento del grupo fue creer que en efecto es así.

No obstante, la Ley de los grandes Números se refiere a valores relativos no absolutos, por lo que en dos secuencias de lanzamientos simulados con Excel, una de 20 y otra de 200 se encontró que "...pese a que en términos absolutos el número de escudos en la de 200 se aleja de la mitad de lanzamientos (95 de 200, se aleja en cinco), en términos relativos se acerca al 50% (47,5%) de los lanzamientos. Mientras que en la de 20

lanzamientos, se obtuvieron 8 escudos (la diferencia con la mitad de escudos es 2) lo cual en términos relativos se aleja del 50% (40%). (Sanabria, 2011)

4. Los efectos en la Teoría de Situaciones

En los programas de matemáticas propuestos, no se habla de los efectos de los cuales Brousseau (1986) advierte y quisiéramos dar algunos ejemplos de ellos para que los docentes que no están familiarizados con estas ideas, tengan al alcance un aporte más.

Puede darse el caso que el estudiante no quiera interactuar con el problema, es decir que no se dé la devolución, por eso Brousseau (1986) habla del contrato didáctico. También hace un llamado a tener cierto cuidado, porque con el afán de interesar al estudiante en situación de bloqueo, el profesor puede caer en ciertos efectos que de alguna manera, los profesores los hemos vivido y que pueden dar al traste con el aprendizaje del estudiante: Efecto Topaze, efecto Jourdain, y deslizamiento metacognitivo.

Efecto Topaze: Este efecto se da cuando el maestro comienza a dar pistas al alumno para resolver algún problema propuesto, y termina prácticamente dando la respuesta al problema, en este caso los conocimientos pretendidos desaparecen completamente. Por ejemplo, en estadística, con base en la información siguiente, se propone al estudiante el problema: ¿Cuál es el promedio del número de cartones que vendió cada niño?

Los 100 estudiantes de primer grado de una escuela deben tratar de vender cinco cartones cada uno, de un bingo. Se obtuvo la siguiente información:

Cartones	Niños
0	2
1	6
2	12
3	34
4	32
5	14

Es probable que se dé la siguiente situación: El alumno suma los resultados de la segunda columna y el profesor le indica que observe que no se trata de una simple suma. El alumno no entiende, y el profesor le hace ver que se trata de datos agrupados y que tiene que multiplicar la cantidad de cartones por la cantidad de niños que los vendieron respectivamente. Aún así, no entiende, y él le dice sume y divida entre el total.

Es decir dio tantas pistas, que le resolvió el ejercicio. En ese momento el docente ha disimulado su respuesta dando la solución al problema.

Efecto Jourdain: Se da a causa de evitar el debate del conocimiento o un fracaso entre el profesor y el alumno, el primero admite reconocer un conocimiento en el comportamiento o en las respuestas del alumno, aun cuando ellas estén de hecho motivadas por causas diferentes a las pretendidas. Por ejemplo, el profesor pide al alumno, que de acuerdo con la información de la siguiente tabla, en la que se muestran los salarios mensuales en miles de colones del personal de una fábrica, que responda cuántos trabajadores en total reciben un salario mensual menor que 80000 colones, esperando que el alumno tenga que sumar las frecuencias de la primera y la segunda clase.

Distribución de salarios mensuales del personal de una fábrica (en miles de colones)

Salario mensual " x " (en miles de colones)	Frecuencia absoluta
$40 \leq x < 60$	16
$60 \leq x < 80$	60
$80 \leq x < 100$	70
$100 \leq x < 120$	30
$120 \leq x < 140$	14
$140 \leq x < 160$	10
	200

El alumno dice al maestro que la respuesta está cerca de la segunda clase pero que no sabe qué hacer con la primera, el profesor se adelanta y le dice que ya tiene la respuesta, que ya lo resolvió, y le dice que lo único que tiene que hacer es sumar ambas frecuencias, es decir, $60 + 16 = 76$. Es aquí donde el maestro admite reconocer un conocimiento en el alumno el cual tenía un significado trivial.

El deslizamiento metacognitivo: En el momento en que una situación de enseñanza ha fracasado, el profesor convierte los medios de enseñanza en objeto de estudio, sustituyendo el verdadero conocimiento matemático. Por ejemplo, utilizar los diagramas de árbol, en los que las probabilidades van sobre las flechas deben ir las probabilidades, requiere tanto del aprendizaje de la construcción de dichos árboles, que hay que dedicar tiempo a ellos más que al concepto mismo de probabilidad. Es decir el medio de enseñanza se convirtió en objeto de estudio. Casi que pudiera teorizarse sobre ello. El diagrama de árbol es una creación didáctica que tiene como fin facilitar el cálculo de ciertas probabilidades y podría caerse en el error de que, aunque el estudiante calcule

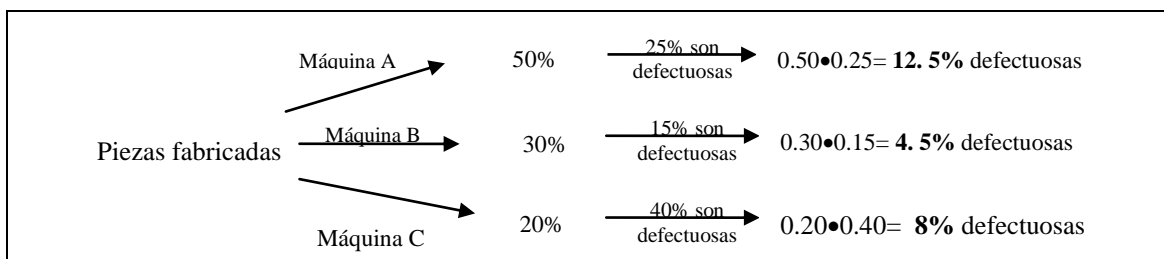
bien la probabilidad de un evento utilizando un diagrama de estos y el profesor le baje puntos porque el diagrama no se adapta a lo establecido.

Un ejemplo del uso del diagrama de árbol es el propuesto por Sanabria (2012):

Las piezas fabricadas por cierta empresa son elaboradas por las máquinas A, B y C. La máquina fabricó el 50% de las piezas, la máquina B el 30% y el restante 20% es fabricado por la máquina C. El 25% de las piezas fabricadas por la máquina A son defectuosas, al igual que el 15% de las piezas fabricadas por B y el 40% de las fabricadas por C. ¿Qué porcentaje de las piezas fabricadas son defectuosas?

Solución:

Diagrama de Valores relativos (porcentajes)



El porcentaje de piezas defectuosas es: $12.5\% + 4.5\% + 8\% = 25\%$ es decir, la cuarta parte de las piezas son defectuosas.

5. A modo de conclusión

Pese a que hay consenso tanto en el plano internacional como en el nacional que la estadística es una parte de la educación general deseable para los futuros ciudadanos adultos, para llevar al aula estos temas se requiere de capacitaciones y una formación continua de los docentes de matemática en servicio.

Antes de iniciar el tema de construir tablas y gráficos, por ejemplo, debería el estudiante de sentir la necesidad de resumir la información y diseñarse un problema con distintas preguntas para lograrlo.

Los medios de enseñanza no deben convertirse en objeto de estudios. Estos deben servir de herramientas, casi que use el estudiante de forma natural para lograr el aprendizaje de conceptos.

El concepto de probabilidad así como el de la Ley de los Grandes números deben entenderse a la luz de la realidad y no aisladamente y en su verdadera dimensión.

Los efectos de los que Brousseau nos advierte, deben llamar la atención a los docentes en sus clases, para no caer en ellos.

Bibliografía

- Batanero, C. (2001). Didáctica de la estadística. Grupo de Investigación en Educación Estadística, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. España. Servicio de Reprografía de la Facultad de Ciencias, Granada, España
- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas. Traducción al castellano del artículo "Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques" publicado en la revista Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2):33-115, y realizada por Julia Centeno, Begoña Melendo y Jesús MurilloCarvajal,
- Chevallard, Y. (1998). La transposición didáctica. Del Saber Sabio Al Saber Enseñado. Tercera edición, Aique editor.
- Espeleta, A. (2002). La enseñanza de la Estadística: una propuesta metodológica. Sistema de Estudios de Posgrado. Maestría Profesional en Planificación Curricular. Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica.
- M; Masís, K; Méndez, T. (1998). La estadística y probabilidad en primer y segundo ciclo: tratamiento y propuesta. Memoria del seminario de Graduación presentado para optar por el grado de Licenciatura en Educación Primaria con énfasis en primer y segundo ciclos. Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica.
- Ministerio de Educación Pública. (2012). Programas de estudio matemáticas. San José, Costa Rica.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). 2000. Principles and Standards for School Mathematics. <http://www.standards.nctm.org/> .Estados Unidos. Ultima revisión, 25 de septiembre, 2007. 11:00am.
- Navarro, R. (2007). Diseño de una unidad didáctica que oriente el proceso de enseñanza aprendizaje de los conceptos de estadística de tercer ciclo del programa del Ministerio de Educación Pública. Memoria del seminario de Graduación presentado para optar por el grado de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática. Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica.
- Núñez, F. (2008). La Enseñanza y el aprendizaje de la estadística en secundaria: situación actual, aproximación metodológica. Sistema de Estudios de Posgrado. Maestría académica en matemática. Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica.
- Sanabria, G; Núñez, F. (2010). Una propuesta para introducir el estudio de las probabilidades: Probabilidad Frecuencial. Memorias del III Encuentro Enseñanza de la Matemática, UNED.
- Sanabria, G. (2012). Comprendiendo las probabilidades. Primera. Cartago: Editorial Tecnológica de Costa Rica.
- Vergnaud, G. 1990. "La théorie des champs conceptuels", Recherches en Didactique des Mathématiques Vol. 10 (23): 133-170.