INFINITO, LÍMITE DE LO ILIMITADO

Sofía Acosta – Gabriela Figares – Victoria López – Victoria Mesa –
Verónica Molfino – Florencia Rivero
acobel@gmail.com – gabrielafigares@gmail.com – vickylopez52@hotmail.com –
vickymesa_16@hotmail.com – veromolfino@gmail.com – florenciaprs@gmail.com
Instituto de Profesores 'Artigas', Consejo de Formación en Educación, Uruguay

Tema: Pensamiento Matemático Avanzado
Modalidad: Taller
Nivel Educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: concepciones de infinito - infinito actual - infinito potencial - práctica social

Resumen

El infinito es un concepto controvertido como pocos en la Matemática Escolar: está presente en todos los cursos, de todas las ramas de la Matemática y niveles, pero, salvo excepciones, no forma parte del contenido curricular explícito de ninguno de ellos. En este taller proponemos una reflexión sobre diferentes concepciones de infinito que conviven tanto en el aula como en la vida extraescolar, en contextos intra y extramatemáticos. A partir de una actividad invitamos a los asistentes a explicitar sus propias concepciones sobre el concepto, para después reflexionar sobre las posibles concepciones que conviven también en los estudiantes de nivel medio y superior. Este taller surge a raíz de un proyecto de investigación enmarcado dentro de la perspectiva socioepistemológica que buscó describir las concepciones de infinito presentes en los estudiantes de profesorado, bajo el supuesto de que son influenciadas por las prácticas sociales identificadas en Lestón (2011b).

Introducción

El presente trabajo parte de un proyecto de investigación que tiene por objetivo explicitar cómo conviven diferentes concepciones de infinito en algunos aspectos del discurso matemático escolar, en particular en estudiantes de la carrera de profesorado de Matemática del Consejo de Formación en Educación.

Pretendemos analizar además de la idea de infinito que crearon los estudiantes a partir de los cursos de Matemática que han tenido en su educación formal, la concepción de infinito que deriva de lo cotidiano y que también influye en la imagen que se crea del concepto.

Partimos de la hipótesis de que conviven en las personas y en los centros educativos, dos concepciones de infinito: uno **no académico** y otro **académico** (Lestón y Crespo Crespo, 2010).

El infinito no académico es de carácter intuitivo y surge fuera de la escuela para adjudicar a todo aquello que no se puede calificar como "mucho" o "muy grande". Es lo que excede a todo lo que es cuantificable, es además una extensión del amor, del deseo, de la fe (Lestón, 2011a). Por otro lado, "hay una ruptura entre lo que los estudiantes entienden por infinito y lo que los docentes creen que están entendiendo o necesitan que sus alumnos entiendan." (Lestón y Crespo Crespo, 2010, p. 880)

Es por ello que fue necesario abordar la temática desde una perspectiva que permitiera estudiar la tríada docente-estudiante-saber contemplando la dimensión social en la cual está inmersa y qué resignifica cada una de sus dimensiones. Esta es la perspectiva socioepistemológica, la cual nos permitió explicar la convivencia de diferentes concepciones en el colectivo de estudiantes a partir de la consideración de las prácticas sociales que norman su actuar.

Creemos que a partir de este análisis podremos reflexionar sobre nuestro discurso matemático escolar, en particular en lo que hace a la concepción de infinito que transmitimos, y de esta manera repensar nuestra propuesta didáctica.

Marco teórico

Considerando a la socioepistemología como un marco que permite dar respuestas a las preguntas planteadas, adoptamos el modelo epistemológico de prácticas propuesto por Montiel (2011) el cual articula prácticas sociales, prácticas de referencia y actividades para explicar la construcción del conocimiento matemático (figura 1). Por otra parte, retomamos de Espinoza (2009) el constructo contexto de significación.

> El *contexto de significación* de cierto conocimiento es el ámbito en el cual cierta persona o colectivo sitúa la significación de cierto conocimiento en cierto escenario sociocultural. (Espinoza, 2009, p. 150)

Según el modelo expuesto por Montiel (2011), una *actividad* es explícita y se observa en los individuos y grupos humanos; el conjunto articulado de actividades intencionales que siguen un propósito específico enmarcadas en un paradigma específico se denomina *práctica de referencia*; finalmente, la *práctica social* se asume como la práctica normativa de la actividad humana, aquello que hace que los individuos o grupos hagan lo que hacen (Covián, 2005).

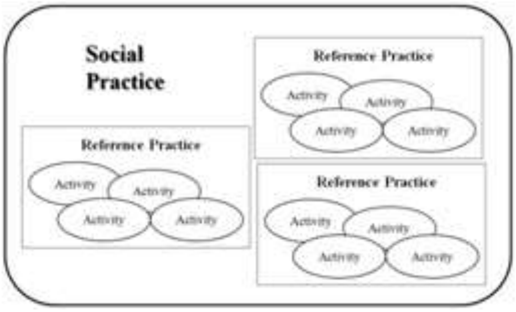


Figura 1. Un modelo epistemológico de prácticas

Prácticas en torno al concepto de infinito

En Lestón (2011b) se reconocen dos grandes concepciones en torno al concepto de infinito que se han manifestado en la historia de su desarrollo: por un lado el infinito de los conjuntos, por otro, el infinito del espacio. Uno representa la necesidad de contar elementos, el otro, de entender el movimiento. Uno es estático y entiende al infinito como lo que ya está acabado o bien no puede ser representado por cantidades finitas. El otro es dinámico y permite explicar la posibilidad de continuación ilimitada de un proceso. Con esas dos miradas fue posible reconocer dos prácticas sociales que llevaron a la emergencia del infinito como concepto científico: la aritmetización de las cantidades por un lado, y la geometrización del espacio por otro.

En una primera instancia el infinito surge exclusivamente como una noción filosófica o religiosa, como una propiedad asignada al espacio pero no como un elemento. Uno de los primeros registros que se tienen sobre discusiones en torno al concepto proviene de Grecia, ya en el siglo V a.C. se cuestionan sobre la posibilidad o no de realizar adiciones sucesivas sobre algo, en forma indeterminada. Zenón es uno de los primeros en enfrentarse con dicha inconsistencia al plantear su ya conocida paradoja de Aquiles y la tortuga.

En el siglo XVII ubicamos a Isaac Newton cuya obra ha sido de gran importancia para el concepto en cuestión. Se ocupaba de concebir y medir el movimiento, estudiando principalmente lo que hoy llamamos análisis. Dicho autor necesitaba quitar los límites para explicar el movimiento, es por esto que aquí el análisis aparece como contexto de significación (el estudio de las curvas). Vale destacar que Newton compartía con Nicolás de Cusa (S. XV) que la extensión del espacio era infinita.

El infinito concebido por Newton y los autores de la época es el que Lestón caracteriza como geométrico, físico, dinámico, y también el que Garbin y Azcárate (2002) o Hitt (2003) denominan **infinito potencial**. Dicho infinito se obtiene mediante procesos que no involucran al infinito en su totalidad, sino como un infinito que aparece como posibilidad y que se va realizando progresivamente (Franco y Ochoviet 2006). Como **práctica social** asociada a dicha concepción de infinito entendemos la geometrización del espacio, como **práctica de referencia** la matematización del mismo (concebir el movimiento, medirlo), y como **contexto de significación** el estudio de curvas (lo que hoy llamamos *análisis*). (Lestón, 2011b)

Contemporáneamente a Newton, Joseph Raphson realiza una justificación axiomática de que el espacio es infinito, logrando así un avance en el *proceso de matematización* del mismo. En el siglo XVIII, si bien Bolzano no propone una definición de infinito matemático, propone críticas a las definiciones existentes que favorecen el desarrollo del concepto.

Así se va conformando otra construcción del infinito que se basa en las cantidades, y es la que hoy encontramos (o creemos encontrar) en la educación superior. Esa construcción es la realizada en el siglo XIX por Georg Cantor, quien replantea la modelización del universo, pero no ya desde cuestiones relativas a la física sino a las cantidades, favorecido por un cambio en la práctica social que norma las actividades de la época.

Con Cantor, el proceso potencialmente infinito en sus orígenes, se considera ahora acabado, y los límites alcanzados (Lestón, 2011b). El matemático puede hoy trabajar con el conjunto de todos los números, sin tener la necesidad de nombrar o pensar en cada uno de ellos individualmente. A esta caracterización que hace Lestón, le asignamos el infinito que Garbin y Azcárate (2002) y Hitt (2003) denominan **infinito actual**.

Cantor logra la aritmetización de las cantidades infinitas, construyendo la noción de infinito que responde a cantidad, cardinalidad. A éste se lo entiende como el infinito del álgebra, es por eso que el *álgebra* aparece como el **contexto de significación**, la matematización de las cantidades como la **práctica de referencia** (contar cantidad de elementos, enumerar). La **práctica social** asociada es la aritmetización de la cantidad.

Algunas reflexiones

Las siguientes conclusiones surgen a partir de la aplicación de un cuestionario (Anexo) a estudiantes del profesorado de matemática del Instituto de Profesores 'Artigas' y del Profesorado Semipresencial.

Una de ellas es que no solamente conviven las concepciones actual y potencial, que son las que esperábamos encontrar, sino que también hay estudiantes que poseen una concepción *finitista* del infinito, evocada en al menos uno de los contextos en los que se proponen las actividades: intra o extramatemático, principalmente en este último, en particular cuando se les pide que escriban frases con la palabra "infinito" (Actividad I). Cuando en estas frases se utiliza la palabra infinito como sinónimo de número muy grande, lo consideramos finitista. Por ejemplo, algunos estudiantes escribieron la frase "*Te lo dije infinitas veces*".

Veamos ejemplos de la convivencia de las distintas concepciones del infinito: uno de los estudiantes responde las actividades desde la concepción actual del infinito, excepto la actividad IV que lo hace desde la concepción potencial. Lo significativo es que en la actividad V, al terminar la encuesta, escribe: "*¡Viendo esto creo que contesté mal la anterior!*". Incluso el sujeto percibe que lo que responde en esta actividad no es coherente con lo que respondió en la actividad anterior, es decir, no está respondiendo con el mismo criterio ambas actividades. Otro estudiante, por su parte, responde las actividades III y IV desde la concepción potencial y ante la actividad V entra en conflicto, ya que responde: "*Si digo que da 1, me contradigo con lo que dije antes, así que mi respuesta es que no sé cuánto da esa suma*". Observamos que ambas concepciones del infinito conviven en el sujeto pero para evitar ser incoherente con sus respuestas, intenta evadir la respuesta que considera correcta. En este caso es muy probable que influya en él el hecho de que la actividad V es tradicionalmente propuesta en contexto escolar, por lo que ya conoce la respuesta considerada correcta.

Otro ejemplo lo presenta otro estudiante, quien en la actividad II deja ver su conocimiento de la existencia de distintos tipos de infinitos, interiorizados tal vez desde el ámbito escolar, pero el hecho de que un conjunto esté contenido en otro se presenta como un obstáculo para reconocer que tienen igual cantidad de elementos. Sostiene que un segmento y una recta tienen la misma cantidad de puntos, pues "*puedo establecer una biyección entre ambos*". Seguidamente agrega: "*Sin embargo el segmento al estar incluido, y en la inclusión estricta, la recta tiene más elementos que el segmento. Este es otro punto de vista. Por esto es que hay varios tipos de infinitos*". Consideramos interesante no sólo que el estudiante presenta contradicciones en una misma respuesta, sino que estas contradicciones se generan a raíz de las distintas concepciones de infinito que conviven en él. De hecho, al decir "*este es otro punto de vista*", creemos que avala la existencia y convivencia de ambas posturas. Vemos cómo las mismas fueron incluidas en su formación e institucionalizadas.

Otra de las conclusiones del trabajo se relaciona estrechamente con lo propuesto por Lestón (2011a y 2011b) y Lestón y Crespo Crespo (2010). En sus investigaciones se asocia la práctica social de aritmetización, que vive en un contexto de significación del álgebra, con la concepción actual de infinito, en el sentido en que lo presenta Hitt (2003). Sin embargo, algunas respuestas de los estudiantes evidencian que esto no es necesariamente cierto, especialmente las respuestas a las actividades I y II, en las que se habilita a responder en contextos extramatemáticos e incluso fuera de ámbitos escolares, pero también en las otras respuestas, en las que el contexto de significación estaba dado por el enunciado (y por lo tanto la práctica social esperada en su resolución) y eran planteadas en un contexto intramatemático. Lo mismo ocurre con la práctica social de geometrización y la concepción potencial.

Por ejemplo, un estudiante responde en la actividad IV desde una concepción actual del infinito, a pesar de que la misma fue pensada para que sea contestada desde la concepción potencial del infinito por tener como contexto de significación el estudio de las curvas y como práctica social la geometrización del espacio. Plantea que si se considera δ como infinito, C_δ y B coinciden.

En la actividad V, dos estudiantes afirman que la suma tiende a uno, y no que *es* uno, dando a entender que la concepción de infinito que están evocando es la potencial, a pesar de que el contexto de significación que está en juego en la actividad sea el álgebra. Otros estudiantes dicen que esa suma da infinito, respondiendo también desde una concepción potencial (algo así como “si se suman infinitos términos, siempre hay uno más, por eso el resultado de la suma es infinito”).

Por otro lado, en la actividad I, en la cual podían evocar concepciones de infinito extramatemáticas y externas al ámbito escolar, se detectaron algunas respuestas que no pudieron asociarse directamente con uno u otro contexto de significación. Estas eran las referidas a la expresión de sentimientos, en contextos externos al escolar. Tampoco las consideramos producto de la influencia de una práctica de referencia determinada, sino que algunas podían asociarse con una y otras con otra.

Entendemos que este tipo de respuesta tienen cabida porque hay entidades no cuantificables numéricamente pero para las cuales se puede usar al infinito como un adjetivo que caracterice lo que alguien siente aplicando ese adjetivo a tal entidad. Por ejemplo, la frase “*Te quiero infinito*”, escrita por varios de los encuestados, puede asociarse con una concepción potencial, ya que estaría haciendo referencia a que siente que “siempre se puede querer un poco más”. Pero la frase “*Te quiero hasta el infinito*”, podría pensarse que tiene una concepción actual, ya que concibe al infinito no como proceso sino como un todo acabado, que sirve como referencia espacial. En el primer caso, la práctica de referencia sería la matematización de las cantidades, lo que refuerza nuestra conclusión anterior acerca de que esta práctica de referencia no necesariamente tiene que ir de la mano de una concepción actual del infinito. En el segundo caso, la práctica de referencia es la matematización del universo, ya que se concibe al infinito como un lugar, nuevamente vemos que ésta no tiene por qué ir biunívocamente relacionada con la concepción potencial.

Otro aspecto a considerar es cómo dependiendo de la práctica de referencia que norme la actividad se valida o no un procedimiento. Por ejemplo, un estudiante responde en la actividad IV: "*No es posible ya que siempre divido el ángulo a la mitad y nunca coincide ya que siempre puedo dividir el ángulo a la mitad*", mientras que en la actividad V, para decir que la suma planteada es uno, realiza un círculo que representa la unidad, y luego lo va completando. Aquí nos surgieron las preguntas: ¿qué diferencia hay entre esta representación y la de la actividad anterior?, ¿por qué en la última se valida que se llegue a completar la unidad y en la anterior no? En la actividad V responde a través del mismo procedimiento utilizado en la actividad anterior, pero al estar bajo la "influencia" de la práctica de referencia de la matematización de la cantidad, este procedimiento es aceptado. Mientras que en la actividad IV, donde la práctica de referencia predominante es la matematización del espacio, no es aceptado.

En el mismo sentido, otro estudiante, en la actividad IV plantea que: "*no es posible que, mediante bisecciones de un ángulo, $C_\delta=\beta_\delta$ con $\delta\rightarrow+\infty$ coincida con B*". Inmediatamente escribe: "*Sin embargo, si fuera posible definir estas bisecciones como una función, $C_\delta=\beta_\delta$ con $\delta\rightarrow+\infty$, en teoría sería posible que C_δ coincida con B*". Si la práctica de referencia es la geometrización del espacio, el estudiante concibe al infinito como un proceso que no tiene fin. Pero bajo la matematización de las cantidades, lo concibe como un proceso acabado, un objeto en sí mismo, que podría (igualmente habla en potencial) tener fin.

El concepto de infinito vive de forma implícita en nuestras aulas pero es raramente explicitado en alguna de las manifestaciones del discurso matemático escolar. Entendemos que con este taller hemos dado herramientas para comenzar a explicitar parte de lo que se pone en juego cuando el infinito aparece, solapado, en el aula. Y, de esa manera, comenzar a reflexionar sobre cómo las diferentes concepciones conviven en el discurso de docentes y estudiantes.

Referencias bibliográficas

Covián, O. (2005). El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional. El caso de la cultura maya. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Espinoza Ramírez, L. (2009). Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico. Tesis de maestría no publicada. CINVESTAV del IPN, México.

Franco y Ochoviet (2006). Dos concepciones acerca del infinito. El infinito actual y el infinito potencial. En G. Martínez Sierra (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19, 509-513. México Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Garbin y Azcárate (2002). Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. Enseñanza de las ciencias, 20 (1), 87-113.

Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En Filloy, E. (Ed), Matemática Educativa, Aspectos de la investigación actual, (pp 91 - 111). México DF, México: Fondo de Cultura Económica.

Lestón, P. (2011a). Concepciones del espacio geométrico y su relación con el infinito. En P. Lestón (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24, 853-861. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Lestón, P. (2011b). El infinito en el aula de matemática. Un estudio de sus representaciones sociales desde la socioepistemología. Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Lestón y Crespo Crespo (2010). El infinito matemático: la escuela, Cantor y Bolzano. En P. Lestón (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23, 879-888. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Montiel, G. (2011). Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico. México: Ediciones Díaz de Santos.

ANEXO: Cuestionario

Actividad I:

Escribe tres frases (con respecto a cualquier tema, matemático o no) que contengan la palabra **infinito.**

Actividad II:

Una de las "nociones comunes" de Los Elementos de Euclides es "*El todo es mayor que sus partes*".

¿Estás de acuerdo con esa noción común? Justifica ampliamente.

Actividad III:

Consideramos los siguientes conjuntos:

$$A = \{n^2, \text{ n pertenece a N}\}, N, Z, R \text{ y } Q.$$

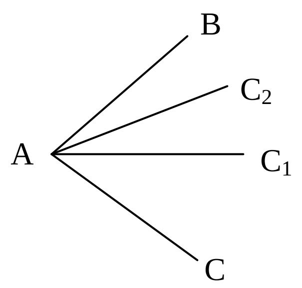
a) Ordena dichos conjuntos según su cardinal. Justifica.

b) ¿Cómo explicarías dicho orden a un alumno de educación media?

c) Piensa nuevamente sobre la noción común "*El todo es mayor que las partes*". ¿Sigues pensando lo mismo?

Actividad IV:

La siguiente figura representa dos segmentos de igual medida: AB y AC. La amplitud del ángulo CAB es β



C_1 es la imagen de C en la rotación de centro A y ángulo $\frac{\beta}{2}$ (en sentido anti horario).

C_2 es la imagen de C_1 en la rotación de centro A y ángulo $\frac{\beta}{4}$ (en sentido anti horario).

C_3 es la imagen de C_2 en la rotación de centro A y ángulo $\frac{\beta}{8}$ (en sentido anti horario).

Se continúa con este procedimiento indefinidamente:

¿Crees que es posible que C_{δ} coincida con B? Explica.

Actividad V:

¿Cuánto da la siguiente suma?

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots.$$