

## DE LA PRODUCCIÓN DE CONJETURAS A LA DEMOSTRACIÓN EN UN CONTEXTO DE GEOMETRÍA SINTÉTICA – ANALÍTICA: EL CASO DE LA CIRCUNFERENCIA

Denise De Grey Zuluaga Duque  
denisezuluaga89@yahoo.es  
Universidad del Valle, Colombia

Tema I.3 - Pensamiento Geométrico.

Nivel Medio (11 a 17 años)

Modalidad Comunicación breve

Palabras claves: Conjetura, Geometría Analítica, Instrumento de Mediación Semiótica, Unidad Cognitiva

### Resumen

*En esta comunicación breve se plantea cómo la continuidad entre la producción de conjeturas y la producción de la demostración, conlleva al aprendizaje de la Geometría Analítica, particularmente la circunferencia. El marco teórico se organizó a la luz de la teoría de la Mediación Semiótica y la teoría de la Unidad Cognitiva, que dan fundamentos a las actividades propuestas en la indagación; al igual que la relación entre el método sintético y el método analítico donde se concibe a la geometría cartesiana como una relectura de la geometría euclidiana. La experimentación se realizó con seis estudiantes de grado undécimo en el colegio Fe y Alegría Madre Alberta de la ciudad de Cali, Colombia, y estuvo caracterizada por la Etnografía educativa como metodología de investigación, y por el ciclo didáctico como instrumento de organización; fue importante observar, registrar y analizar las producciones orales y escritas de los estudiantes, cuando estos resolvieron las actividades integrando el AGD Cabri Géomètre II Plus, destacándose que los argumentos generados por los estudiantes están fuertemente arraigados a la validación empírica que brinda el AGD.*

### 1. Introducción

En los últimos años, la comunidad matemática ha centrado su interés en la demostración, especialmente en los argumentos y procesos de razonamiento matemático que emplean los estudiantes cuando se aproximan a la elaboración de una demostración, las reflexiones apuntan a reforzar aquellos procesos que permiten tener una mejor comprensión de la matemática, algunos de ellos son: *argumentar, razonar, proponer, justificar y participar* en debates que permitan fortalecer los discursos orales y escritos del estudiante, para que de esta manera el estudiante sea más consciente de su propio aprendizaje, no cabe duda que preocupa la falta de un trabajo reflexivo y significativo en el estudiante, que potencie el aprendizaje en él.

El interés se dirige para que la demostración conlleve al aprendizaje de la *Geometría Analítica* dentro de los enfoques *sintético* y *analítico*, para ello, la continuidad entre la producción de una conjetura y su demostración se constituye en un elemento potente

para explorar; esto requiere que los argumentos que han construido la conjetura bajo concepciones y creencia de los estudiantes y que han sido validados empíricamente bajo las funciones usadas del AGD Cabri Géomètre II Plus, puedan evolucionar y sean validados bajo la teoría de la *Geometría Analítica* para que estructuren la demostración. Lograr dicha continuidad depende del trabajo realizado bajo la teoría de la Unidad Cognitiva, pues esta reviste en un modelo de continuidad entre ambos procesos bajo el seguimiento de la actividad argumentativa como eje transversal entre la construcción de conjeturas y la demostración; así, cobra un sentido preponderante en este proceso; además, requiere la integración de un artefacto como Cabri Géomètre II Plus, como un instrumento de mediación semiótica que sea introducido por el docente con una intencionalidad didáctica que permita mediar entre el contenido matemático y la actividad.

## **2. Planteamiento del problema**

En los últimos años distintas investigaciones (Baccaglini-Frank, 2010; Boero, 1999; Mariotti, 2002, 2006) sugieren la continuidad que puede existir entre la producción de una conjetura y la de su demostración enmarcadas dentro de un contexto de Educación Matemática, es una cuestión que ha sido tratada haciendo uso del modelo de Unidad Cognitiva y la integración de un AGD como Cabri Géomètre II Plus como instrumento de mediación semiótica (Teoría de la Mediación Semiótica), en estas aproximaciones se revela como el desarrollo de una conjetura puede ser beneficioso para una posterior prueba.

En esta comunicación breve interesa trabajar la demostración en la *Geometría Analítica* para identificar algunos elementos que permitan establecer la continuidad entre la producción de una conjetura y su demostración, a partir de considerar el modelo de Unidad Cognitiva y en reconocer la demostración como un elemento potente que contribuya en el aprendizaje de la *Geometría Analítica*; esta continuidad, se espera lograr con la integración de Cabri Géomètre II Plus como una instrumento de mediación semiótica cuyo potencial semiótico logra que los estudiantes vinculen los signos personales con los signos matemáticos.

Por otro lado, el aprendizaje en *Geometría Analítica* ha generado controversia en dos sentidos, el primero apunta a que la *Geometría Analítica* es un proceso que se ha ido marginando poco a poco del aula escolar y el segundo problema tiene sus raíces en el aprendizaje, porque el estudiante es sometido a un trabajo rutinario que reviste una

intención netamente algebraica y procedimental que no es significativa y productiva, carente de sentido para ellos (Velásquez, et al, 2007); como consecuencia de esto, los alumnos presentan dificultades cognitivas que se revelan porque tiene falencias de pasar de un sistema de representación a otro (gráfico y algebraico), de ahí la importancia de establecer un vínculo entre el método *sintético* y el *analítico*, porque la continuidad entre estos dos métodos puede proveer una mejor comprensión del conocimiento geométrico (Fernández, 2011).

Bajo estas consideraciones se puede entender cómo la demostración en *Geométrica Analítica* puede ser potente en el aprendizaje de la misma y por ello, ¿Cómo se puede usar el paso de la conjetura a la demostración en el aprendizaje de la *Geometría Analítica*, mediante el método *sintético-analítico* en la circunferencia, en el contexto de la educación media?

El interés se enmarca dentro de la posibilidad de reconocer la continuidad entre la conjetura y la demostración que le permita a los estudiantes aprender conocimiento geométrico, a través de la solución de problemas abiertos integrando un AGD como Cabri Géomètre II Plus como instrumento de mediación semiótica, que permite potencializar las actividades heurísticas y poder analizar las producciones de los estudiantes cuando se ven enfrentados a solucionar dichos problemas.

### **3. Objetivos**

#### **3.1 Objetivo General**

Caracterizar la continuidad cognitiva en el paso de la conjetura a la demostración, en el aprendizaje de la *Geometría Analítica* a través del método *analítico* y *sintético* en la circunferencia, dentro del contexto de la educación media.

#### **3.2 Objetivos Específicos:**

- Determinar algunos aspectos fundamentales que permitan reconocer la forma cómo el modelo de Unidad Cognitiva posibilita la continuidad en el paso de la conjetura a la demostración.
- Establecer algunos componentes que permitan identificar la relación entre los métodos *sintético* y *analítico* para el aprendizaje de la geometría en la producción de conjeturas y demostraciones.

### **4. Marco teórico**

#### **4.1 Teoría de la Unidad Cognitiva y Teoría de la Mediación semiótica**

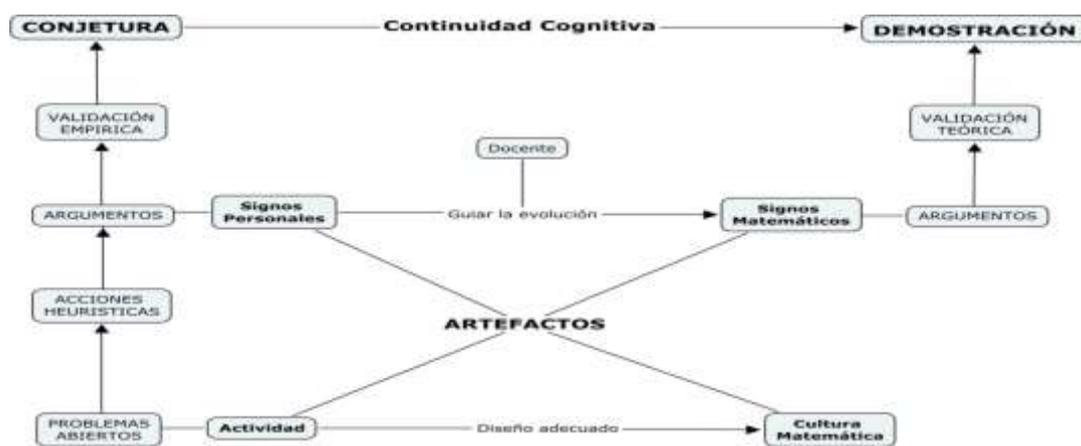
La Teoría de la Unidad Cognitiva (Baccaglioni-Frank, 2010; Bartolini-Bussi & Mariotti 2008; Boero, 1999; Mariotti 2002, 2006; Pedemonte, 2007), es un modelo que permite

analizar e interpretar las relaciones entre los argumentos que se producen al hacer una conjetura y los argumentos que se usan para hacer una demostración, la *Unidad Cognitiva* es considerada como un instrumento de análisis entre estas relaciones y permite reconocer en la actividad argumentativa el medio por el cual los argumentos sean el eje transversal de análisis (Baccaglini-Frank, 2010; Mariotti, 2002, 2006).

Para que los argumentos que han sido usados en producir la conjetura surjan y evolucionen a los argumentos que estructuran la demostración, se requiere integrar una herramienta técnica como instrumento de *mediación semiótica* (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Bartolini-Bussi & Mariotti, 2008; Mariotti, 2009), para este caso el AGD resulta ser un recurso, no solo por las dinámicas de exploración que proporciona para la solución de las actividades (Hanna, 2000), sino también porque obedece a una estructura axiomática de la geometría.

Al considerarse el AGD como una instrumento de mediación semiótica, se tienen en cuenta dos aspectos cruciales para su integración, por una parte la intencionalidad didáctica que le imprima el docente para su uso como mediador entre el contenido y la actividad; y por otro lado, el potencial semiótico que corresponde a la doble relación semiótica que tiene la herramienta con la actividad y la cultura matemática, y el surgimiento de procesos semióticos asociados (Bartolini-Bussi & Mariotti, 2008).

En la ilustración 1, se muestra la relación entre las dos teorías.



.La relación entre la Teoría de la Unidad Cognitiva y la Teoría de la Mediación semiótica permite considerar tanto los procesos argumentativos producto de las construcciones del estudiante, como los procesos semióticos asociados.

#### 4.2. La Integración del AGD Cabri Géomètre II Plus

El AGD contribuye a formar contextos de enseñanza para solucionar problemas geométricos (Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010; Hanna, 2000; Mariotti, 2006), que

permiten favorecer el desarrollo del razonamiento geométrico y de igual manera a una cultura de la demostración; sin embargo, este tipo de herramienta por sí solo no configura un recurso, requiere no solo ser un instrumento de mediación semiótica, sino también que el estudiante tenga ciertos esquemas de uso, o que en el proceso se construyan estos esquemas; para este caso, esquemas de uso sobre las funciones del AGD Cabri Géomètre II Plus como el arrastre pueda ser interpretada en términos de dependencia lógica entre los elementos que conforman la figura geométrica (Baccaglioni-Frank & Mariotti, 2010), permitiendo que la evolución entre los significados personales y los significados matemáticos puedan estructurar la demostración no solo en términos de explicación si no de validación de los argumentos que la conjuguen.

#### **4.3 Actividades: Problemas abiertos**

Dentro del diseño de las actividades se contempla una tipología particular de problemas denominados problemas abiertos que permiten una mayor libertad en la exploración, no sugieren un único método de solución y hacen que la responsabilidad de la solución resida en las producciones propias de los estudiantes, esto crea la posibilidad de una intensa actividad argumentativa por parte de los estudiantes (Baccaglioni-Frank, 2010).

#### **4.4 Complementariedad entre el Método Sintético y el Método Analítico**

La geometría cartesiana va más allá de incorporar un nueva forma de solucionar problemas por medio de resolver ecuaciones algebraicas; su objetivo se extiende en términos de una nueva interpretación de *Los Elementos* de Euclides, que le imprimen una lectura algebraica a esta geometría (Álvarez, 2000).

Al reconocer esta relación entre las dos geometrías, la euclidiana y la cartesiana, se sugiere que las dos sean complementarias (Contreras, Contreras, & García, 2002; Itzcovich, 2005) en dos aspectos principales. Por un lado, como una herramientas de validación que sugieren como por formas distintas se puede llegar a una misma respuesta para los estudiantes (Itzcovich, 2005), y por otro, como con el método *analítico* se puede reconstruir lo hecho por medio del método *sintético* a través de una lectura algebraica de la geometría que surge del método *sintético*; esto presupone el manejo de dos registros de representación semiótica (Duval, 1999), a saber algebraico y gráfico y asociada las dos operaciones entre estos registros conversión y tratamiento.

Tanto la conversión como el tratamiento constituyen en actividades matemáticas complejas que pueden representar dificultades de tipo cognitivo para el aprendizaje en matemáticas de los estudiantes (Duval, 1999), debido a que los registros de representación semiótica son los únicos medios para acceder a los objetos matemáticos

y cada representación ofrece un significado particular; al respecto para que emerja un aprendizaje se requiere la manipulación mínima de dos registros de representación semiótica.

## **5. Resultados y análisis**

### **5.1 Categoría de análisis Continuidad Cognitiva**

La categoría de análisis Continuidad Cognitiva pretende evidenciar si hubo producción de conjeturas y si esas conjeturas evolucionaron a una demostración dentro de la solución de problemas abiertos. Alrededor de esta categoría de análisis se evidenciaron falencias en la manipulación algebraica de las expresiones como propiedades y operaciones entre fracciones; con relación a la producción de una demostración de manera completa no se presentó, los estudiantes con ayuda del docente identificaron algunas la relación que había entre las coordenadas del punto medio (móvil) y la ecuación de la circunferencia inicial  $C$ , pero no lograron encontrar la ecuación del lugar geométrico; aunque los estudiantes ya identificaban este lugar geométrico como una circunferencia.

Estas dificultades pueden deberse a que los estudiantes tenían deficiencias en la formación de sus conocimientos previos necesarios para la producción de la demostración; la necesidad de tiempos pertinentes que consideren la evolución de este proceso de forma paulatina, de tal manera que permita un mayor exploración por parte de los estudiantes y la socialización de los resultados que sea gestionado por el docente para que ayude a la evolución de los argumentos usados en la conjetura y puedan estructurar la demostración.

### **5.2. Categoría de análisis herramienta de mediación semiótica**

La categoría de análisis herramienta de mediación semiótica, busca identificar la producción de signos personales y de signos matemáticos, y la evolución de un signo a otro, a partir de los distintos registros escritos, las transcripciones de los registros orales y las construcciones elaboradas en los archivos Cabri.

Se puede afirmar que la integración de una herramienta como Cabri Géomètre II Plus si puede ayudar en la consecución y determinación de significados personales y posiblemente a la evolución a significados matemáticos, pero por si sólo el AGD no lleva al estudiante a relacionar esos argumentos producidos en las acciones empíricas con argumentos relacionados con la teoría de la *Geometría Analítica*; es necesario por un lado, que el estudiante sienta la necesidad de dar el paso hacia la demostración y específicamente a justificar por qué sus construcciones y sus resultados son ciertos.

### 5.3. Categoría de análisis complementariedad entre el método sintético y el método analítico

En esta categoría se evidenció cómo por medio del método *sintético* las propiedades geométricas de los elementos sirven para hacer la construcción y encontrar el todo, esto significa que se logró identificar en los estudiantes una fase de síntesis, una composición de los elementos para obtener los elementos del conjunto, en este caso hacer la construcción; con este método, las propiedades geométricas de los elementos se hacen evidentes para poder hacer la construcción. Por otro lado, al convertir estas propiedades geométricas encontradas en el método *sintético* en términos algebraicos y reconstruir de esta forma el procedimiento *sintético* para el método *analítico*, se evidenció un fase de análisis en la cual se descomponen los elementos en sus partes, es así como esto se convierte en una herramienta importante que se pueden introducir en la enseñanza de la *Geometría Analítica*.

Tanto un método como el otro, permiten al estudiante estar atento al seguimiento del proceso de construcción de su solución y demostración, el AGD para este caso se comporta como un vínculo directo, que permite verificar si lo encontrado tiene cierto nivel de aceptabilidad, el estudiante le delega pues la responsabilidad de verdad al AGD; es importante que el método *analítico* sea usado como una herramienta que no pierda de vista la forma como se ha dado la solución por medio del método *sintético* (componente geométrico).

### 6. Conclusiones

En general, se puede reconocer algunas características para que el modelo de Unidad Cognitiva sea usado de forma más eficiente en una próxima propuesta: Un diseño adecuado que integre problemas abiertos y otra tipología de preguntas más explícitas que ayuden al estudiante a construir elementos decisivos para hacer la demostración de la conjetura; La consideración de los conocimientos previos necesarios para la solución de las actividades, los asociados a la construcción del conocimiento geométrico y algebraico; La necesidad de reconocer las distintas funciones de Cabri Géomètre II Plus para un uso eficiente dentro de la solución de actividades, es decir desarrollar esquemas de uso suficientes para la integración del AGD y la confrontación con una estructura deductiva de los enunciados; y por último, la gestión del docente para dirigir la clase y ayudar a que los argumentos usados en la conjetura evolucionen de tal manera que permitan construir la demostración, de acuerdo a un modelo axiomático.

Por otro lado, dentro de la complementariedad entre el método  *sintético*  y el método  *analítico* , esto en términos de poder reconocer las relaciones entre los elementos geométricos y convertirlos en términos algebraicos, es así como se sugieren los siguientes componentes para ser usados este tipo de herramientas dentro del proceso demostrativo: Identificar la tipología de situaciones ya sean situaciones problemas de construcción o de lugar geométrico; Considerar los tiempos necesarios para la exploración de la solución por cada método, de tal manera que el estudiante establezca de forma explícita los enunciados en términos de condicionante para poder relacionar la hipótesis con la tesis; y reconocer las operaciones entre los registros de representación semióticos a saber conversión y tratamiento como elementos cruciales que deben ser considerados en la gestión docente al usar la complementariedad entre los dos métodos. En términos generales se puede decir que estrategias como la de integrar un instrumento como mediador semiótico permiten poner de manifiesto procesos semióticos que en ocasiones pasan desapercibidos y son potentes para el aprendizaje de conocimiento matemático, la intencionalidad siempre se encuentra alrededor de que el estudiante sea el agente que se encargue de construir su propio conocimiento y el docente como dinamizador para hacer que sus concepciones evolucionen de acuerdo con la teoría matemática.

### Referencias

- Baccaglioni-Frank, A. (2010) Conjecturing in dynamic geometry a model for conjecture generation through maintaining dragging. UMI. Italia, 1-423
- Baccaglioni-Frank, A & Mariotti, M. (2010). Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model. Springer, 15, 225-253
- Bartolini-Bussi, M. & Mariotti, M. (2008), Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L.English, M. Mariotti, M. (2002). La preuve en mathématique [Mathematical proof]. En ZDM, 34 (4). Recuperado el día 13 de diciembre de 2011 del sitio web <http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm024a5.pdf>
- Mariotti, M (2006). *Proof and Proving in Mathematics Education*. En Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future. A. Gutiérrez, P. Boero (eds.) (pp. 173–204) .the Netherlands: Sense Publishers.
- Mariotti, M. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective the role of the teacher. *ZDM Mathematics Education journal*, 41, 427–440.
- Pedemonte, B. (2007). *¿How can the relationship between argumentation and Proof be analysed*. Educational Studies in Mathematics, 66, 23-41.