CB-489

VALIDACIONES PERCEPTIVAS Y DEDUCTIVAS EN GEOMETRÍA: UN ESTUDIO CON DOCENTES EN FORMACIÓN CONTINUA

Jesús Victoria Flores Salazar – Daysi Julissa García Cuéllar – Saddo Ag Almouloud
jvflores@pucp.pe – ra00193072@pucsp.edu.br – saddoag@pucsp.br
Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú – Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas – TecVEM-IREM, Perú. Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Brasil

Formación del profesorado en Matemáticas
Comunicación breve (CB)
Formación y actualización docente
Palabras claves: Tipos de geometría, formación de profesores, Geogebra.

Resumen

La comunicación breve evidencia resultados parciales del proyecto de investigación Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática em ambientes tecnológicos desarrollado por investigadores del grupo Didáctica de las Matemáticas (DIMAT) de la Pontificia Universidad Católica del Perú y del grupo Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática (PEA-MAT) de la Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo/Brasil. Presentamos uno de los cuatro encuentros de la formación en geometría que realizamos con dieciséis docentes peruanos de Educación Básica Regular-nivel secundario. Analizamos una tarea de la secuencia basados en el Enfoque de Parzysz que determina los procesos y mecanismos relacionados con la enseñanza y con el aprendizaje de la geometría y propone una clasificación o tipos de geometría que considera los objetos como físicos o teóricos y los modos de validación perceptiva y deductiva. En la tarea que analizamos, los docentes utilizan diversas estrategias de resolución y realizan un análisis matemático y didáctico la misma. En cuanto a los resultados, observamos que los docentes utilizan estrategias de resolución del tipo G1-geometría concreta y G2-geometría proto-axiomática, en el sentido de Parzysz, sin embargo muestran dificultad en identificar qué tipo de validaciones están utilizando y se les hace difícil elaborar una estrategia en G0.

Introducción

El presente artículo forma parte del proyecto internacional *Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática em ambientes tecnológicos* desarrollado entre investigadores de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) y la Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo (PUC-SP). Este proyecto internacional tiene como propósito, entre otros analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; proporcionar

ISBN 978-84-945722-3-4

herramientas teóricas al trabajo de profesores de matemáticas e investigadores en educación matemática y producir conocimiento en el área de formación de profesores de geometría.

Formación de profesores y los tipos de validación

Sobre formación continua de profesores nos basamos en André (2000) que explica que este tipo de formación es considerada indispensable para el profesor tanto para actualizar conocimientos y técnicas del área en la cual trabaja, como para desarrollar competencias y actitudes.

Además, presentamos aspectos del enfoque de Parzysz (1989) que sirve de fundamento teórico para esta investigación y que estudia los procesos y mecanismos relacionados con la enseñanza y con el aprendizaje de la geometría en la Educación Básica Regular. Para lo cual plantea una clasificación o tipificación que toma en cuenta los objetos en el juego como físicos o teóricos y las formas de validación como perceptiva o deductiva. El investigador, presenta la siguiente clasificación: Geometría Concreta (G0) en el que se parte de la realidad, de lo concreto y es donde los objetos matemáticos en estudio son materializados; Geometría Espacio-gráfica (G1) es la geometría de representaciones figurales y gráficas; en la que los objetos son bidimensionales. La justificación de las propiedades de los objetos representados es hecha por lo que se 've'; Geometría Proto-axiomática (G2), en este tipo los objetos son teóricos y las demostraciones son hechas a partir de propiedades y/o características de los mismos, no habiendo la necesidad de explicitar un sistema de axiomas. En este tipo, las validaciones son realizadas por medio de propiedades del objeto matemático representado; Geometría Axiomática (G3) en la que las demostraciones son puramente axiomáticas.

De acuerdo con el investigador, en G0 y G1 los objetos son concretos y las justificaciones y validaciones son perceptivas, mientras que en G2 y G3 los objetos son teóricos y las validaciones son deductivas.

Además, Parzysz (2001;2006) menciona que se debe tomar en cuenta que este enfoque teórico no describe un desarrollo progresivo de niveles de geometría, sino que permite identificar los tipos de geometría que se evidencian al resolver un problema que envuelve dichos contenidos.

Desarrollo de la investigación con profesores en formación

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Con base en los aspectos mencionados en el ítem anterior, presentamos el desarrollo de la investigación. Para ello, explicamos el contexto en el que la misma se realiza.

En el marco del proyecto internacional *Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática em ambientes tecnológicos* (PUCP/PUC-SP) que consta de tres grandes áreas: Geometría, Álgebra y Estadística, la presente investigación forma parte del área de Geometría, específicamente se basa en el trabajo que se desarrolló en una formación con dieciséis profesores peruanos de Educación Básica Regular el 2015 y que constó de cuatro encuentros de 3 horas cada uno a cargo de los investigadores de la PUC-SP con colaboración de investigadores de la PUCP.

Presentamos concretamente el primer encuentro de esta formación (ver Tabla 1) que consta de dos tareas.

Tabla 1
Estructura del encuentro 1

Tarea	Nombre de la tarea
1	Una introducción al estudio de diferentes geometrías
2	Menor distancia

La Tabla 1 muestra las dos tareas que presentaremos en este artículo. En la primera tarea llamada 'una introducción al estudio de diferentes geometrías' los investigadores-formadores explicitan aspectos del enfoque teórico de Parzysz (1989) que les sirve de base para la segunda tarea llamada 'menor distancia' en la que se solicita a los docentes participantes realizar un análisis matemático y didáctico de la misma.

En relación a la colecta de datos, estos fueron colectados por medio de fichas de trabajo y grabación de video.

Desarrollo de la tarea 1

Presentamos la tarea 1 que se les presentó a los docentes en formación y con la que se realizó la introducción de los tipos de geometría y validaciones.

Tarea 1: Una introducción al estudio de diferentes geometrías

Probar/demostrar que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º. ¿Cuál sería la estrategia de resolución ubicada en: G0, G1, G2, G3?

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Con base en esta tarea los docentes realizan las posibles soluciones de acuerdo a los diferentes tipos de geometría, así se espera que se pueda confeccionar un triángulo de papel y luego recortar con una tijera los tres ángulos, formando con ellos un semicírculo. En este caso, el docente está en G0 que corresponde a la geometría concreta, porque manipula un pedazo de papel, construye un triangulo lo recorta y con sus colegas, discute, y visualmente valida que la suma de los ángulos internos de un triangulo cualquiera es 180º.

Por otro lado, si se utiliza un ambiente de representaciones dinámicas (ARD) como es el Geogebra, que de acuerdo con las de Silva y Salazar (2012) y Salazar y Almouloud (2015) permite hacer conjeturas e interpretar propiedades que caracterizan a las figuras geométricas representadas. Para que el docente construya el triangulo ABC puede utilizar distintas herramientas del Geogebra como por ejemplo, la herramienta 'ángulo' para medir los tres ángulos, la función arrastre para cambiar de posición y las medidas (proporcionalmente) de la longitud de sus lados y observar que la suma de las medidas de los ángulos internos es siempre 180º. También puede comparar su resultado con el resultado de sus colegas, etc. en este caso el docente está en el tipo G1 (geometría espacio-gráfica), pues conjetura el resultado y lo comprueba empíricamente en la comparación con los resultados de otros sujetos.

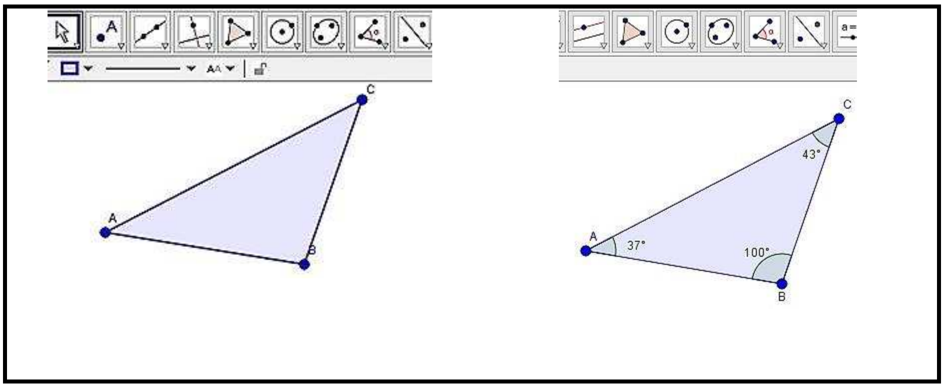


*Figura 1.*Solución en G1

Si el docente (ver Figura 2, en la que también utiliza Geogebra), traza una recta paralela en uno de los lados y señala que las retas paralelas determinan ángulos alternos internos congruentes para probar que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180º, el docente estará en la geometría proto-axiomática (G2), pues traza una recta paralela usa la congruencia de los ángulos alternos internos y realiza deducciones en base a estos trazos auxiliares realizados en la misma figura.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

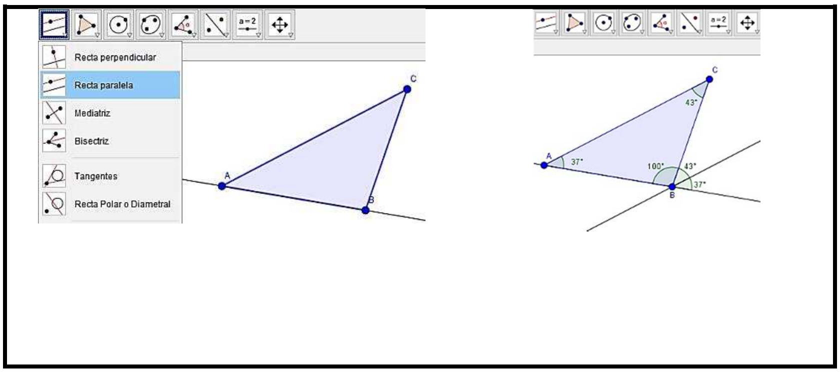


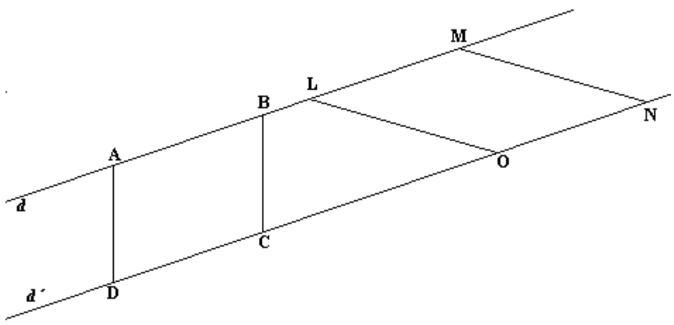
Figura 2. Solución en G2

Cuando el docente realiza una demostración basada en un sistema axiomático de referencia entonces está en G3 (geometría axiomática). Después de presentada esta tarea introductoria, se realizó una discusión didáctica de cada tipo de geometría, en la que los docentes expresaron que las validaciones en los tipos G1 y G2 les son mas familiares y son las que utilizan en su práctica al enseñar este tema de geometría y que resolver esa tarea en G0 les resulta difícil. Percibieron también, que sus estudiantes de nivel secundario (12 a 15 años) cuando resuelven este tipo de tareas realizan, por lo general, validaciones perceptivas (G0 y G1). En armonía con el enfoque teórico de Parzysz (1989) observamos que lo percibido pauta (conjetura) y controla (verificación) lo sabido, pero no lo comanda.

En seguida, presentamos la tarea ‘menor distancia’ en la que se pide hacer un análisis matemático didáctico. La reflexión didáctica fue realizada por los docentes e investigadores que participaron en la formación.

Tarea 2: Menor distancia

Los paralelogramos *ABCD* y *LMNO* de la Figura 3 son tales que *AB* = *LM*. ¿Los dos paralelogramos tienen la misma medida de área y de perímetro? Justifique sus respuestas.



Realice un análisis matemático y didáctico de la tarea.

Figura 3. Tarea “menor distancia”

ISBN 978-84-945722-3-4

Presentamos a continuación, el desarrollado de la tarea 2. Tomamos como ejemplo lo trabajado por el docente que llamamos de Jorge.

Jorge basado en la figura dada, realizó la Figura 4 que se muestra a continuación:

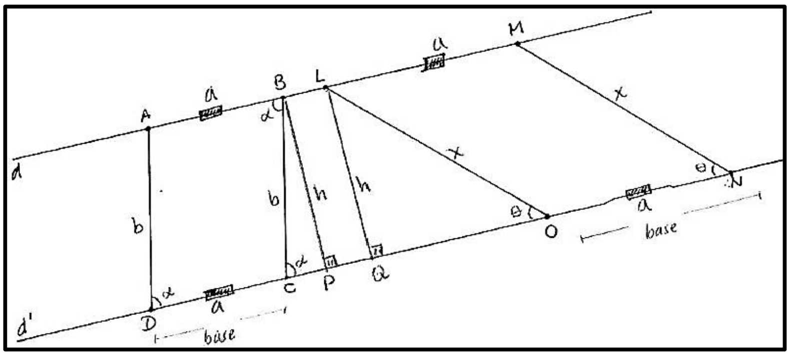
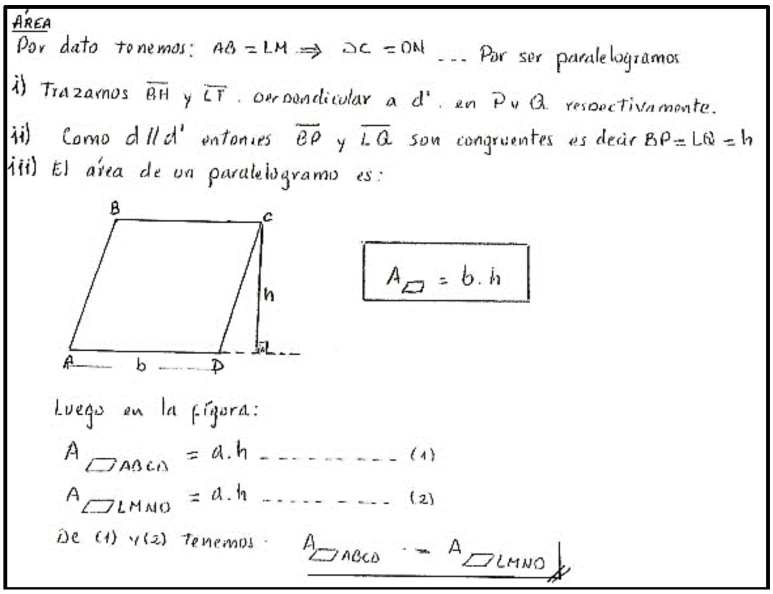


Figura 4. Tarea realizada por Jorge

En la Figura 4, en cuanto a que dadas las condiciones de la tarea los paralelogramos ABCD y LMNO tienen la misma área, el profesor Jorge en la misma figura muestra que utilizando conocimientos matemáticos de congruencia de triángulos, segmentos, ángulos, etc. Lo que muestra que utiliza la estrategia que el mismo docente identificó, en Geometría Proto-axiomática (G2), porque utiliza propiedades y el discurso matemático está en la misma figura.

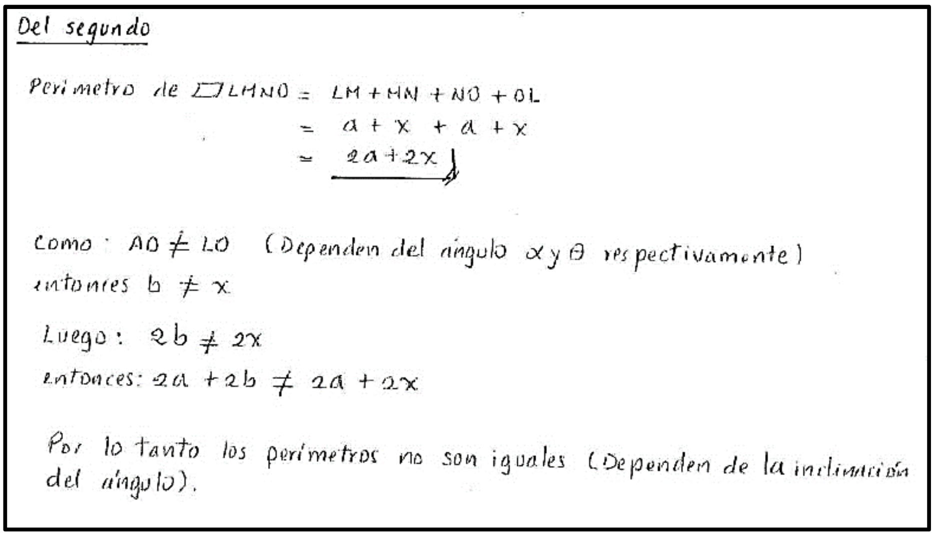
En cuanto al área y perímetro, se muestra en la Figura 5, el docente se basa en el enunciado de la tarea y en el discurso que él elaboró en la figura (ver Figura 4) para explicar que las aéreas de los paralelogramos ABCD y LMNO tienen la misma medida.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 5. Medida de área realizada por Jorge

En relación al perímetro (ver Figura 6) el profesor Jorge con base en el desarrollo anterior y utilizando representaciones algebraicas y propiedades de ángulos afirma que los perímetros no son iguales.


Del segundo

Perímetro de $\square LMNO = LM + MN + NO + OL$
$= a + x + a + x$
$= 2a + 2x$

Como: $AO \neq LO$ (Dependen del ángulo α y θ respectivamente)
entonces $b \neq x$

Luego: $2b \neq 2x$
entonces: $2a + 2b \neq 2a + 2x$

Por lo tanto los perímetros no son iguales (Dependen de la inclinación del ángulo).

Figura 6. Perímetro de los paralelogramos

Notamos que para que este desarrollo esté configurado el G2, las validaciones deben ser deductivas y no perceptivas y por la afirmación que realiza el docente su validación correspondería al G2.

Conclusiones

Observamos que los docentes participantes de la formación, como ejemplo que presentamos del profesor Jorge, consiguen desarrollar una estrategia para el tipo G2 en el cual la validación es deductiva (utiliza propiedades).

Otro grupo de docentes desarrollan estrategias en G1 pues sus argumentos son puramente visuales (percepción) por tal razón pensamos que no logran distinguir entre validaciones perceptivas y validaciones deductivas.

Además, muestran dificultad en identificar qué tipo de validaciones están utilizando y se les hace difícil elaborar una estrategia de solución de la tarea dada que se encuadre en G0.

Por otro lado, pensamos que para desarrollar tareas en geometría, el Geogebra es un ambiente de representaciones dinámicas que podría favorecer la creación de conjeturas lo que permitirá que tanto los docentes como sus estudiantes consigan pasar de validaciones perceptivas a validaciones deductivas.

ISBN 978-84-945722-3-4

Agradecimientos

La presente comunicación breve ha sido posible gracias al apoyo del proyecto Internacional *Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos PEA-MAT/DIMAT,* aprobado por el Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas, IREM-PUCP con código: PI0272, al grupo Tecnologías y Visualización en Educación Matemática TecVEM-IREM y por la *Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo*, FAPESP proceso: 2013/23228-7.

También, la investigación ha sido posible gracias al apoyo de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas en cuanto a las coordinaciones para el desarrollo de la formación y por la participación de los estudiantes de la maestría (docentes en formación continua) sin los cuales no podría haberse llevado a cabo este trabajo.

Referencias bibliográficas

André, M. E. D. A. (2000). A pesquisa sobre a formação de professores no Brasil – 1990-1998. In: CANDAU, Vera M. (Org.). *Ensinar e aprender: sujeitos, saberes e pesquisa*. Rio de Janeiro: DP & A, 83-99.

Parzysz, B. (1989). Knowing vs. Seeing: Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*,19(1), 79-92.

Parzysz, B. (1991). Representation of space and students' conceptions at High school Level. *Educational Studies in Mathematics,* 22(6), 575-593.

Parzysz, B. (2001). Articulatión entre perception et deduction dans une demarche geométrique em PE1. *Coloque de la COPIRELEM – Tours.*

Salazar, J. V. F., & Almouloud, S. A. (2015). Registro figural no ambiente de geometria dinâmica. *Educação Matemática e Pesquisa*,17(5), 927–932.

Silva, Maria José Ferreira da, & Salazar, J.V.F. (2012). Cabri 3D na sala de aula. *VI Congreso Iberoamericano de IBEROCABRI.* Lima, Peru: Ozlo, 101-107.

ISBN 978-84-945722-3-4