CB-423

DEMONSTRAÇÕES EM GEOMETRIA NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Lucas Carato Mazzi
lucascarato12@gmail.com
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP/Brasil

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Modalidad: CB
Nivel educativo: Terciario o Bachillerato (16 a 18 años)
Palabras clave: livros didáticos; geometria; demonstrações

Resumo

O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) foi instituído em 1985 pelo Ministério da Cultura. Esse programa tem como objetivo avaliar, comprar e distribuir livros didáticos para todos os alunos das escolas públicas brasileiras. O programa foi se desenvolvendo desde sua criação, conseguindo abranger todos os níveis escolares. Sendo uma medida relativamente nova, é necessário que sejam incentivadas discussões sobre a estrutura do programa, além de investigações sobre os livros aprovados no mesmo, de modo a buscar melhorias em seu funcionamento. Recentemente os livros didáticos começaram a ganhar espaço na comunidade da Educação Matemática, sendo criadas conferências específicas nesta temática. Desse modo, o trabalho aqui apresentado possui como objetivo principal exibir um panorama geral de quatro das seis coleções de livros didáticos de matemática aprovados pelo PNLD – Ensino Médio de 2015, no que diz respeito à presença de demonstrações nos capítulos de geometria. Para tal, apresentarei um breve histórico das políticas públicas brasileira acerca dos livros, seguido de uma rápida discussão metodológica. Os dados informam que em todas as coleções analisadas, as demonstrações estão presentes, no entanto em quantidades e modos distintos – uns autores utilizam mais a abordagem visual, enquanto outros defendem e utilizam com mais frequência o método dedutivo.

Introdução

A presença dos livros didáticos em território brasileiro tem uma data quase tão antiga quanto ao descobrimento do Brasil. Em 1699, para solucionar o problema de possíveis ataques às terras brasileiras, Portugal decidiu criar as chamadas *Aulas de Artilharia de Fortificações*, cujo objetivo era a formação de militares, a construção de fortes e o manuseio de artilharias. Um dos professores desses cursos foi o Brigadeiro Fernandes Pinto Alpoim (1700-1765), que segundo Valente (2008, 141), “escreveu dois livros que se tornaram, ao que tudo indica, os

ISBN 978-84-945722-3-4

primeiros livros didáticos de matemática escritos no Brasil: Exame de Artilheiros e Exame de Bombeiros, em 1744 e 1748".

Percebe-se, então, que a Matemática como disciplina no Brasil está interligada ao uso de materiais didáticos desde os primórdios. Valente (2008, p.141) afirma que "talvez seja possível dizer que a Matemática se constitua na disciplina que mais tem sua trajetória atrelada aos livros didáticos".

A relevância dos livros no Brasil pode ser percebida novamente na década de 30, com a instituição da Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD), que estabelecia condições para a produção, importação e utilização do livro didático – Decreto Lei 1006, 30/12/1938 – (Brasil, 1938). Com o passar dos anos, o governo desenvolveu diversas políticas públicas acerca do livro didático, até chegar na criação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), em 1985 – em vigor até hoje.

O PNLD tem como objetivo principal distribuir às escolas públicas de todos os níveis livros didáticos, obras literárias e dicionários. Inicialmente se faz uma avaliação de os resultados da comissão avaliadora, organiza-se a aquisição e a distribuição, universal e gratuita, dos mesmos para os alunos das escolas públicas brasileiras. Com o aumento das produções dos livros didáticos, estes se tornaram foco de pesquisas nas mais diversas áreas do conhecimento, em especial na Educação Matemática.

Em âmbito internacional, o livro de matemática também começou a ganhar destaque como objeto de investigação. Apesar de crescente o número de pesquisas, o estudo sobre livros didáticos ainda se encontra em um estágio inicial de desenvolvimento (Fan 2013), tendo espaço amplo para novas pesquisas e discussões.

Dentro desse leque de possibilidades que o livro didático nos possibilita, optei, então, por investigar de que modo as demonstrações matemáticas são apresentadas pelos livros didáticos do Ensino Médio aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático.

Metodologia

A abordagem metodológica utilizada no desenvolvimento dessa pesquisa é a qualitativa, visto que meu intuito é construir uma interpretação sobre as diferentes demonstrações dos livros. Mais especificamente, considero que essa seja uma pesquisa do tipo documental, dado que a fonte de dados é composta por documentos – livros didáticos.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Segundo Godoy (1995), devido ao fato de a pesquisa qualitativa possuir um caráter mais flexível, faz-se possível utilizar uma abordagem qualitativa na investigação de documentos técnicos – no caso os livros didáticos – de modo a elaborar uma interpretação sobre os mesmos. A autora defende que

> a pesquisa documental representa uma forma que pode se revestir de um caráter inovador, trazendo contribuições importantes no estudo de alguns temas. Além disso, os documentos normalmente são considerados importantes fontes de dados para outros tipos de estudos qualitativos, merecendo, portanto, atenção especial (GODOY, 1995, p. 21).

Ainda, a autora afirma que um dos pontos positivos de se trabalhar com esse tipo de pesquisa se dá ao fato da imutabilidade dos dados, ou seja, mesmo após longos períodos, os dados continuarão do mesmo modo, visto que são "dados estáveis".

No caso dessa pesquisa, a fonte de dados utilizada é composta por quatro, dentre as seis coleções aprovadas pelo PNLD no ano de 2015, último edital direcionado ao Ensino Médio, são elas:

1.
2. *Matemática: Contexto & Aplicações*
3. *Matemática: Ciências e Aplicações*
4. *Matemática Ensino Médio*
5. *Novo Olhar Matemática*

Cada uma dessas coleções é formada por três livros cada, sendo que cada volume é direcionado para cada ano do Ensino Médio, ou seja, foram analisados ao todo 12 livros didáticos.

Discussão dos dados

Analisando os 12 livros aprovados pelo PNDL, primeiramente elaborei uma tabela que quantificasse as demonstrações em cada uma das coleções, de modo a obter um panorama geral dos volumes. A tabela abaixo sintetiza as informações encontradas a respeito da presença da demonstração em capítulos de Geometria.

ISBN 978-84-945722-3-4

Tabela 1 - Demonstrações nos livros do Ensino Médio

COLEÇÃO	QUANTIDADE DE DEMONSTRAÇÕES
Matemática: Contexto & Aplicações	54
Matemática: Ciências e Aplicações	97
Matemática Ensino Médio	35
Novo Olhar Matemática	32

Fonte: Arquivo Pessoal (2017)

É possível perceber que há uma diferença razoável entre a coleção *Matemática: Ciências e Aplicações* e as demais, apresentando uma quantidade maior no número de demonstrações realizadas. Além desse fator quantitativo, essa é a única coleção que apresenta uma rápida nota acerca do que se entende por demonstração, como vemos no trecho a seguir.

> "Na Matemática nem tudo se manifesta de maneira imediata. Existem situações em que é necessário comprovar a veracidade de alguma proposição, ideia ou teoria. Para que isso seja possível, são considerados alguns princípios chamados axiomas, que são reconhecidos como verdadeiros, ou, então, proposições que já foram comprovadas como verdadeiras. Por meio da dedução e do raciocínio lógico, é elaborado um método que torne visível ou de fácil percepção a veracidade do que se está questionando. Esse processo de dedução e investigação foi introduzido por Aristóteles (384 a.C. – 322 a. C.) e ficou conhecido como demonstração" (Iezzi et al, p. 48).

A partir desse trecho, nota-se que o autor estava preocupado em apresentar, mesmo que de forma simplista, um possível significado do termo demonstração, fato que não ocorre em todas as coleções. No entanto, o conceito demonstração vai um pouco além do discutido.

De acordo com Hanna (1983, p. 3), o termo prova rigorosa é entendido como uma demonstração em lógica ou em matemática que satisfaz duas condições: "primeiramente, cada definição, suposição e regra de inferência, apontada na prova foi, ou poderia ser explicitamente afirmada. Em segundo lugar, cada passo na cadeia de deduções que constitui a prova é explicitado".

ISBN 978-84-945722-3-4

Essa autora ainda afirma que um sistema axiomático compreende um número de axiomas (sentenças aceitas sem demonstrações), uma ou mais regras de inferências e alguns teoremas. A demonstração em tal sistema é, então, a derivação de um teorema a partir de axiomas, de forma direta ou a partir de outros teoremas, usando apenas regras de inferência. A prova cria uma cadeia linear de resolução, com início nos axiomas e término no teorema. Em outras palavras,

> Uma **demonstração** em S (um sistema formal, pensado como uma linguagem, um conjunto de sinais e um conjunto de regras para a manipulação de sinais) é uma sequência finita não vazia de sentenças de S tal que cada uma delas é um axioma ou uma consequência imediata, por regras de inferências admitidas em S, de duas sentenças anteriores na sequência. Um **teorema** de S é uma sentença A de S tal que existe uma demonstração em S onde A é a última sentença da sequência (Garnica, 1995, p.11).

Tendo em vista essas definições de Hanna e Garnica, será que os livros didáticos seguem exatamente essas premissas ao tratar sobre demonstrações? Será que há diferentes modos de se demonstrar, além do método dedutivo explicitado acima? Com base nos livros, é possível perceber que há diferentes tipos de provas em uma mesma coleção.

Na figura 1, pode-se observar uma demonstração que utiliza o método axiomático como fundamentação. Nela, apresenta-se claramente as premissas do problema, assim como quais postulados [25]foram utilizados para que o resultado fosse alcançado.

[25] Na página anterior ao teorema, o autor apresenta alguns postulados. Na resolução dessa prova, ele recorre aos seguintes: Postulado 1: Dados dois pontos distintos do espaço, existe uma, e somente uma, reta que os contém. Postulado 2: Dados três pontos colineares do espaço, existe um, e somente um, plano que os contém. Postulado 3: Se uma reta possui dois de seus pontos em um plano, ela está contida no plano.

ISBN 978-84-945722-3-4

Figure 1 - Demonstração em um sistema formal

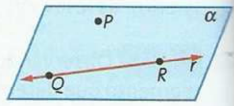
Teorema 1: Existe um único plano que contém uma reta e um ponto não pertencente a ela.

Demonstração:

Considere P um ponto não pertencente à reta r.

Marcamos sobre r dois pontos distintos, Q e R.

Os pontos P, Q e R não são colineares, pois, pelo postulado 1, r é a única reta que passa por Q e R e, por hipótese, P não pertence a r.



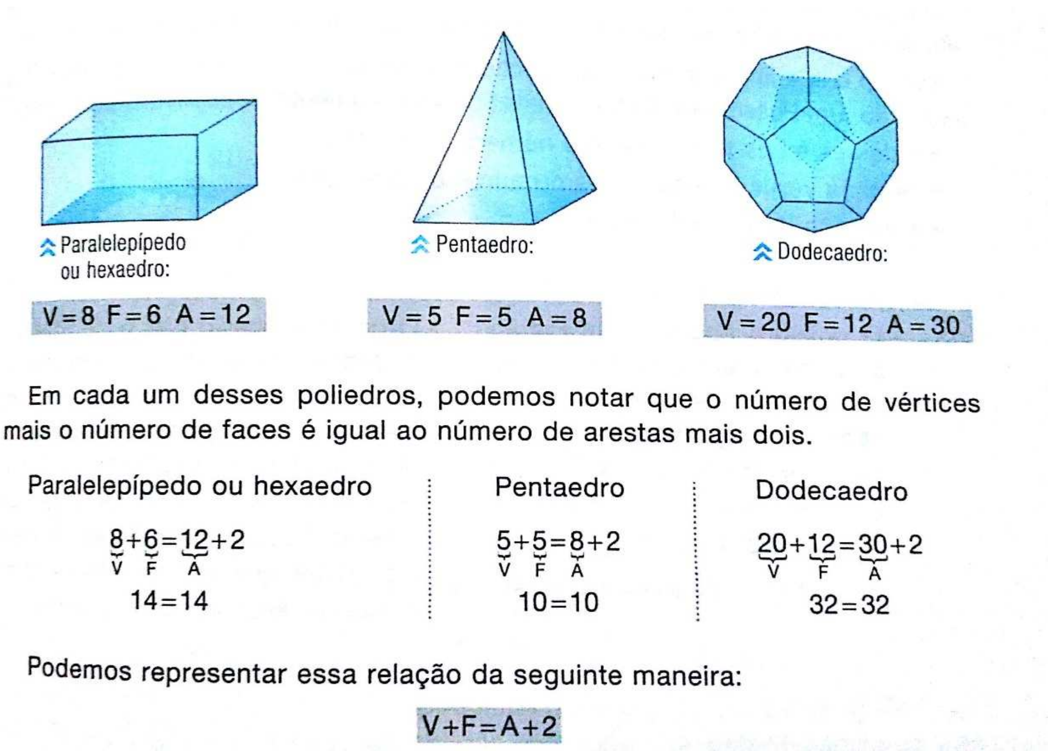
Pelo postulado 2, sabemos que existe um único plano α que contém P, Q e R. Como a reta r tem dois de seus pontos (Q e R) em α, o postulado 3 garante que r está contida em α. Assim, de fato existe um plano que contém r e P. Como esse é o único plano que contém P, Q e R, ele é o único que contém P e r.

Fonte: Dante (2013, p. 180).

Já na figura 2, nota-se um caráter mais exploratório e intuitivo. Ao invés de utilizar o método dedutivo para demonstrar a famosa Relação de Euler, o autor optou por apresentar três exemplos de poliedros convexos (hexaedro, pentaedro e dodecaedro) e, a partir de informações dos mesmos (quantidade de vértices, faces e arestas), mostrou que a relação $V + F = A + 2$ é válida para os três casos. Tendo como base esses exemplos, o autor generalizou a ideia para qualquer poliedro convexo.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Figure 2 - Relação de Euler


Paralelepípedo ou hexaedro:

$V = 8 \quad F = 6 \quad A = 12$

Pentaedro:

$V = 5 \quad F = 5 \quad A = 8$

Dodecaedro:

$V = 20 \quad F = 12 \quad A = 30$

Em cada um desses poliedros, podemos notar que o número de vértices mais o número de faces é igual ao número de arestas mais dois.

Paralelepípedo ou hexaedro

$$\underbrace{8}_{V}+\underbrace{6}_{F}=\underbrace{12}_{A}+2$$
$$14=14$$

Pentaedro

$$\underbrace{5}_{V}+\underbrace{5}_{F}=\underbrace{8}_{A}+2$$
$$10=10$$

Dodecaedro

$$\underbrace{20}_{V}+\underbrace{12}_{F}=\underbrace{30}_{A}+2$$
$$32=32$$

Podemos representar essa relação da seguinte maneira:

$$\boxed{V+F=A+2}$$

Fonte: Souza (2013, p.73)

Acredito que o caráter exploratório é de grande relevância na Matemática e que, dependendo do nível escolar, apresentar uma demonstração formal não seria a melhor opção. Só considero necessário que, ao generalizar uma relação desse modo, seja interessante que o autor tome o cuidado de apresentar uma discussão de que existe uma prova rigorosa para tal resultado e que, no entanto, não será apresentada naquele momento. Contribuindo, assim, com a discussão dos diferentes tipos de raciocínios existentes na Matemática.

Considerações Finais

Nos livros didáticos investigados, pode-se perceber que os autores optaram por utilizar diferentes modos para apresentar as provas no decorrer de seus livros. Em uma mesma coleção é possível encontrar provas rigorosas, de acordo com a definição de Hanna; provas de caráter exploratório, como apresentado na figura 2, além de provas baseadas em aspectos visuais.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Todos esses modos de discutir as justificativas da Matemática são válidos e devem ser utilizados e variados no decorrer dos anos escolares, com o intuito de apresentar ao aluno que não existe uma única forma de raciocínio dentro dessa disciplina.

Independente da abordagem que se utilize, considero que os livros falham no sentido de promover uma discussão mais aprofundada do que seria a demonstração. Considero que esse é um conceito fundamental na Matemática e que, muitas vezes, é um tanto quanto obscuro para o aluno, não possuindo uma significação. Desse modo, defendo que, mesmo no Ensino Básico, sejam discutidas as funções que as demonstrações possuem dentro desse campo e qual a importância em utilizá-las.

Referencias

BRASIL. (1938). Decreto que estabelece as condições de produção, importação e utilização do Livro Didático. http://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1930-1939/decreto-lei-1006-30-dezembro-1938-350741-publicacaooriginal-1-pe.html. Consultado 23/04/2017.

Dante, L. R. (2013). Contextos & Aplicações. São Paulo: Ática.

Fan, L. (2013). Textbook Research as Scientific Research: Towards a Common Ground on Issues and Methods of Research on Mathematics Textbooks. ZDM Mathematics Education 45, 765–77.

Garnica, A. V. M (1995). Fascínio da técnica declínio da crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática. 1995. 258 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro.

Godoy, A. S. (1995). Pesquisa Qualitativa: Tipos Fundamentais. Revista de Administração de Empresas 35 (3), 20–29.

HANNA, G. *Rigorous proof in mathematics education*. Toronto: Oise Press, 1983.

Souza, J. R. (2013). Novo Olhar Matemática. São Paulo: FTD.

Valente, W. R. 2008. "Livro Didático e Educação Matemática: Uma História Inseparável. " Zetetiké 16 (30), 139–162.

ISBN 978-84-945722-3-4