

EL TRABAJO CON GEOGEBRA, ¿CONTRIBUYE EN LA ELABORACIÓN Y VALIDACIÓN DE CONJETURAS? PROPIEDADES DE LAS DIAGONALES DEL RECTÁNGULO

Ana María Mántica, Magali Freyre

Facultad de Humanidades y Ciencias, UNL. Argentina
ana.mantica@gmail.com, magali.freyre@gmail.com

Resumen

Se analiza una actividad desarrollada con GeoGebra en un curso de segundo año. Los alumnos construyen un rectángulo, elaboran conjeturas acerca de las propiedades de las diagonales y producen argumentos para su validación. Se consideran para el análisis archivos del software y grabaciones de audio y video. Se advierte un predominio de la constatación empírica por sobre la utilización de propiedades para la validación de conjeturas. No aparece como argumento que las diagonales se cortan en su punto medio por ser el rectángulo un paralelogramo. Esto evidencia una dificultad para la comprensión de los alcances de la definición por inclusión.

Introducción

En este trabajo se presenta el análisis de una actividad, sobre las diagonales del rectángulo desarrollada en un segundo año de una Escuela Secundaria de la ciudad de Santa Fe. El trabajo en geometría no adquiere un lugar relevante en las aulas, esto se refleja en los documentos regulatorios. En las Orientaciones Curriculares Educación Secundaria Ciclo Básico del Ministerio de la Provincia de Santa Fe (2013) se expresa que “El trabajo en Geometría adquiere características propias que lo diferencian del Álgebra y la Aritmética, producto de la compleja relación entre los objetos del espacio físico y los geométricos, que son objetos teóricos” (p. 41). En los Núcleos de aprendizaje Prioritarios (NAP) del Ciclo Básico (2011) se manifiesta la intención de promover el trabajo geométrico en el aula considerando importante

El análisis y construcción de figuras, argumentando en base a propiedades, en situaciones problemáticas que requieran: (...) - formular conjeturas sobre propiedades de las figuras (en relación con ángulos interiores, bisectrices, diagonales, entre otras) y producir argumentos que permitan validarlas. (p.22)

Respecto a esto Itzcovich (2005) manifiesta que : “Es reconocido por quienes tienen un vínculo con la enseñanza de la matemática, el hecho de que el trabajo geométrico ha ido perdiendo espacio y sentido, tanto en los colegios como en la formación docente” (p. 9). La presentación de tareas del tipo “prueba que...” no genera en el estudiante un compromiso que lo involucre en la racionalidad del trabajo geométrico, dado que lo limita solamente a producir una prueba de una propiedad que sabe que es cierta. La relevancia de un trabajo en geometría que refiera a la formulación de conjeturas y su validación involucra al estudiante

desde el primer momento en el proceso de producción de una prueba que tiene sentido para él.

Esto nos invita a reflexionar sobre nuestras prácticas: ¿Qué tipo de actividades seleccionar? ¿Cómo generar condiciones que involucren a los alumnos en la producción de conocimientos geométricos? ¿Qué papel juegan las conjeturas en las clases?

Itzcovich & Broitman (2001) afirman la importancia de propiciar un modo de pensar geométrico como objetivo esencial de la enseñanza de la Geometría, esto supone

(...) poder apoyarse en propiedades estudiadas de las figuras y de los cuerpos para poder anticipar relaciones no conocidas. Se trata de poder obtener un resultado – en principio desconocido- a partir de relaciones ya conocidas. Esta es la anticipación. Por otra parte poder saber que dicho resultado es el correcto porque las propiedades puestas en juego lo garantizan. (p. 3)

Las actividades de la propuesta implementada se planifican para ser realizadas con el software de geometría dinámica GeoGebra y tienen como objetivo favorecer la entrada de los alumnos en el trabajo geométrico, generando condiciones que permitan revalorizar el carácter deductivo, contribuyendo a la racionalidad propia del trabajo en geometría. Se proponen dos actividades, la primera orientada a la construcción de un rectángulo, la segunda, que presentamos en este trabajo, a obtener las propiedades de sus diagonales.

Marco de referencia

El marco teórico metodológico TPACK (Koehler & Mishra, 2006) se refiere a la planificación de clases con TIC, al conocimiento tecnológico pedagógico disciplinar. Este modelo apunta a prácticas de enseñanza que pongan en juego los tres tipos de conocimiento, integrando al pedagógico y al disciplinar, que habitualmente considera, la tecnología. “Saber cómo utilizar tecnología no es lo mismo que saber cómo enseñar con tecnología” (p. 1033)

Se tomaron decisiones en torno a los tres ejes que propone el modelo TPACK: curriculares, metodológicas y tecnológicas.

Con respecto a las *decisiones curriculares* se selecciona el contenido Propiedades de las diagonales del rectángulo, con estos objetivos:

- Construir un rectángulo.
- Reconocer al rectángulo como un paralelogramo.
- Reconocer las propiedades de las diagonales: son iguales y se cortan en su punto medio.

El segundo objetivo se relaciona con la clasificación por inclusión por la cual se define rectángulo. Berté (2000) afirma que existe un obstáculo para la comprensión relacionado

con este tipo de clasificación, que proviene de la clasificación por partición que generalmente se realiza en la vida cotidiana. Esta clasificación a partir de conjuntos disjuntos obstaculiza que se imagine un rectángulo como un caso particular de paralelogramo.

En cuanto a las *decisiones metodológicas*, se selecciona una actividad en la que los alumnos deben establecer conjeturas acerca de propiedades de las diagonales del rectángulo y validarlas, luego de que realizan la construcción utilizando GeoGebra.

El papel de la construcción resulta fundamental según Itzcovich (2005) teniendo en cuenta que el solo hecho que los alumnos miren dibujos que representan figuras geométricas no garantiza que identifiquen sus propiedades. Las actividades de construcción favorecen esta identificación de ciertas características y propiedades de los objetos geométricos que por su utilidad en los procesos deductivos, adquieren importancia. “El desafío de las construcciones es considerar las propiedades ya conocidas de las figuras y tener en cuenta los datos dados. Exige a los alumnos tomar decisiones acerca del procedimiento de construcción y los instrumentos a utilizar.” (Itzcovich & Broitman, 2001, p. 21)

La actividad mencionada sobre las propiedades de las diagonales del rectángulo, refiere a la importancia del lugar de la conjetura en la clase de geometría. Según Saiz (2007), es importante que se promueva “(...) una matemática en la que los conocimientos aparezcan como recursos para resolver problemas antes de ser estudiados por sí mismos; que se constituya en un desafío para los alumnos, donde haya lugar para las conjeturas, para la discusión de ideas, la confrontación entre los compañeros”.

Larios (2002) afirma que es necesario que los alumnos conjeturen previamente si se pide que prueben conscientemente algo. Proponer actividades en las que tengan lugar las conjeturas contribuye a que los conceptos matemáticos tengan sentido para el alumno. La actividad propuesta trabaja la conjetura a priori según este autor ya que los alumnos deben producirla para luego proponer argumentos que la validen. De esta manera, las propiedades no se dan al alumno como afirmaciones por parte del docente sino que se brindan situaciones y actividades en el contexto adecuado para que las produzca. En las actividades presentadas se espera, además de que conjeturen y constaten empíricamente, que produzcan argumentos, basados en propiedades conocidas, para validar.

Sadovsky & Sessa (2004) afirman que la validación contradice lo establecido culturalmente de la necesidad de corrección del docente de resoluciones del alumno. Así, permite que los estudiantes se responsabilicen matemáticamente por sus producciones. “La validación no es sólo saber si el resultado coincide o no con lo esperado, es fundamental, es saber dar razones de por qué estas herramientas resuelven el problema”. (p. 38)

Itzcovich (2005) reconoce la importancia de proponer situaciones que involucren a los alumnos en la producción de argumentos deductivos. Los aprendizajes implicados en este tipo de trabajo son naturalmente de una gran complejidad. Es importante que en las

actividades que se propongan se consideren las diferencias sustanciales que existen entre los procesos de medir y demostrar. A partir del establecimiento de relaciones se generan procedimientos de tipo anticipatorio, ya que se anticipa a la medición concibiendo la respuesta obtenida como necesaria. “Será responsabilidad del docente orientar a los alumnos en la búsqueda de relaciones equivalentes que demuestren lo que se quiere demostrar” (p. 54)

Con respecto a las *decisiones tecnológicas*, fueron guiadas y orientadas por los objetivos mencionados. Se incorpora en las actividades la utilización del software de geometría dinámica (SGD) GeoGebra. Debido a las diversas posibilidades de trabajo que ofrece, la eficacia educativa depende del uso que se haga del software y de las actividades que se decidan realizar.

El Diseño Curricular de Educación Secundaria Orientada del Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe (2014) expresa que se debe:

...profundizar la producción y el análisis de construcciones geométricas y propiciar el control de estas tareas, esto es, decidir si la respuesta a los problemas planteados y el procedimiento utilizado para obtenerla, son válidos. Las construcciones deben realizarse tanto con instrumentos tradicionales como con software de geometría dinámica. (p. 51)

El software elegido es que es de código abierto y está disponible de manera gratuita. Además facilita la exploración, permitiendo construcciones dinámicas y promoviendo la elaboración de conjeturas basadas en las representaciones gráficas.

Una ventaja del software que vale destacar es la capacidad de generar un tipo de interacción llamada retroacción. El alumno trabaja en el software y este le devuelve información que utiliza para continuar en la construcción de conocimientos.

La importancia de esta retroacción radica en que es externa al alumno. Respecto de esto, Laborde (1997) sostiene:

El recurso al desplazamiento contiene en sí mismo el uso de conocimientos: la ventaja de ello es que estas retroacciones proceden de un dispositivo externo al sujeto e independiente del profesor y, de esta manera, son susceptibles de hacer evolucionar al sujeto. (p.40)

La utilización del software favorece especialmente la producción de conjeturas por parte del alumno en la actividad propuesta. González López (2001) sostiene que la actividad exploratoria en el SGD corresponde a arrastrar los elementos libres en la construcción. Esto permite elaborar conjeturas y constatar propiedades. Si se encuentra un contraejemplo para la conjetura establecida, la comprobación experimental es una evidencia de falsedad. Si por el contrario se cumple para todas las posiciones, puede constituir un obstáculo para la elaboración de una prueba formal “(...) dado que los alumnos no perciben la necesidad de

demostrar algo visualmente evidente”. (p. 283). Chazan (citado en Larios & González González, 2010) afirma que el valor de evidencia proviene de apoyarse en imágenes dinámicas y puede producir el fenómeno que convierte la evidencia en prueba y la prueba en evidencia. Como consecuencia, puede generar una falta de necesidad del alumno por realizar justificaciones.

El aspecto dinámico de las construcciones que ofrece el software favorece la visualización y permite la generalización y abstracción en la construcción de conocimientos, experimentando y conjeturando. Proporciona la posibilidad de manipulación directa de las representaciones de los objetos geométricos a través del arrastre. La experimentación conjuga el uso de las primitivas geométricas y el desplazamiento.

Análisis de la actividad

Tareas previas

Los alumnos trabajan en clases previas las propiedades de lados, ángulos y diagonales del paralelogramo, el software GeoGebra para la construcción del paralelogramo. La docente nos manifiesta que trabajan además con la definición de rectángulo por inclusión: paralelogramo con un ángulo recto.

En la clase en la que se implementa la actividad se recuerda la definición de rectángulo y se utiliza el software para la construcción de un rectángulo de vértices A, B, C y D, en parejas. Luego trazan las diagonales y su punto de intersección O.

Tareas realizadas con el software

Se les entrega la consigna siguiente: ¿Qué propiedades cumplen las diagonales? Justifica tus afirmaciones. A continuación se reúnen en grupos de cuatro integrantes para discutir las conclusiones obtenidas en el trabajo en parejas. Para el análisis se cuenta con el trabajo realizado en el software, dado que permite la reconstrucción de lo actuado, además de los audios de los grupos y la filmación de la puesta en común. Lo que pudo rescatarse como más productivo para el análisis del proceso de argumentación de las conjeturas es lo realizado en el software y lo expuesto en la puesta en común. En el momento de la discusión en los grupos, se evidencian escasos intercambios respecto de la consigna solicitada.

En el desarrollo de la primer actividad, tres grupos presentan dificultades que no les permiten realizar correctamente el rectángulo por lo que no se consideran en este trabajo.

Se analizan las producciones de los binomios que logran construir el rectángulo, un total de 11, que concluyen que las diagonales son iguales y se cortan en su punto medio, aunque manifiestan algunas diferencias en el proceso de validación llevado a cabo.

Uso de los recursos tecnológicos en el aula de matemática

Todos los grupos utilizan la herramienta “Circunferencia (centro, punto)” trazando una circunferencia de centro O que pasa por uno de los vértices del rectángulo. Explicitamos qué otras herramientas utilizaron para formular sus conjeturas y las conclusiones que algunos grupos escribieron en sus archivos con la herramienta “Texto”.

Los grupos 1, 3, 4, 5 y 11 utilizan la herramienta “Distancia o longitud” para medir las diagonales. El grupo 4 mide también los segmentos de las diagonales AO, OC, BO, OD.

Los grupos 2, 6, 7 y 8 utilizan la herramienta “Distancia o longitud” para medir los lados del rectángulo y no miden diagonales.

Conclusiones

<p>Grupo 1: <i>Las diagonales de un rectángulo miden lo mismo.</i> <i>La circunferencia pasa por todos los puntos.</i> <i>Las diagonales se cortan en un punto medio.</i></p>	<p>Grupo 3: <i>Todos los ángulos miden 90°</i> <i>Las diagonales se cortan en un punto medio</i> <i>Todos sus lados son paralelos</i> <i>Las diagonales son iguales</i></p>
<p>Grupo 2: <i>Todos sus ángulos miden 90°</i> <i>Todas sus diagonales son iguales</i> <i>La circunferencia pasa por todos los puntos</i> <i>Las diagonales se cortan en un punto medio</i></p>	<p>Grupo 4: <i>Hay la misma distancia entre el punto en el que se cortan las dos diagonales. Hasta el vértice es la misma siempre.</i> <i>Si se realiza una circunferencia tomando como punto inicial donde se cortan las diagonales, la circunferencia pasará por todos los vértices.</i></p>
<p>Grupo 5: <i>Las diagonales de un rectángulo miden lo mismo</i> <i>La circunferencia pasa por todos los puntos</i> <i>Las diagonales se cortan en el punto medio de la figura</i></p>	

Los grupos 9 y 10 no utilizan la herramienta "Distancia o longitud". El grupo 9 traza una circunferencia de centro O que pasa por C y marca dos ángulos interiores del rectángulo. El grupo 10 traza dos circunferencias. Una con centro O que pasa por el vértice C y otra con centro O que pasa por el vértice A. (Figura 1)

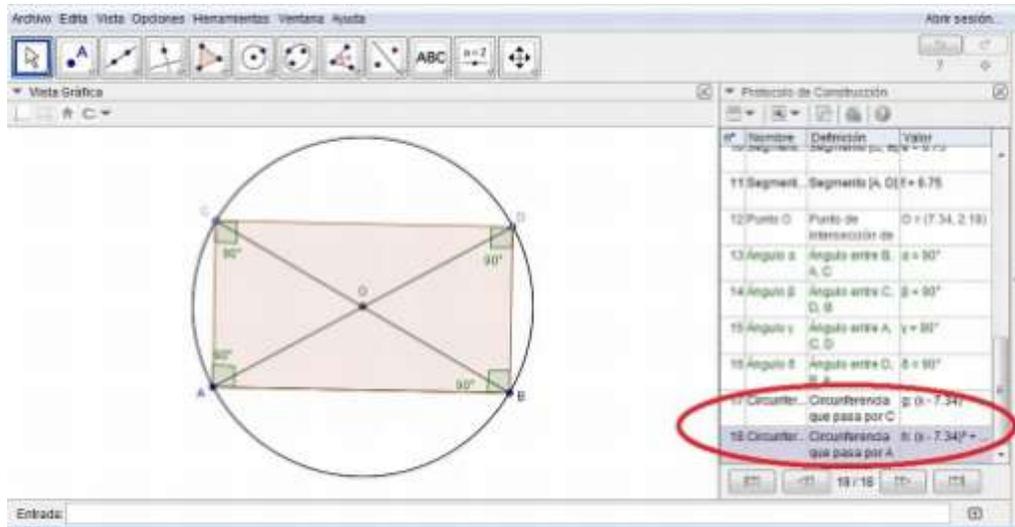


Figura 1

Puesta en común

En la clase siguiente, se retoma la propuesta para llevar a cabo una puesta en común, de algunos grupos, de la actividad realizada. Cada grupo de cuatro elige una de las construcciones realizadas por los binomios para proyectarla y explicar lo realizado y compartir con el resto sus afirmaciones. Durante la exposición de cada grupo no hay intervención del resto de los alumnos de la clase, no porque esto no se permitiera sino porque los estudiantes deciden no participar. En la puesta en común, la docente realiza preguntas a algunos grupos con el objetivo de conocer sus argumentos en el proceso de validación. Pregunta cómo aseguran que las diagonales son iguales y todos los grupos afirman haber medido las diagonales con la herramienta “Distancia o longitud”. También pregunta cómo aseguran que los vértices del rectángulo son puntos de la circunferencia trazada. Dos de los grupos afirman utilizar la herramienta “Relación” para comprobarlo. Vale destacar que en el protocolo de construcción de GeoGebra no queda registro de la utilización de la herramienta “Relación”. Esto hace que no se pueda afirmar si es utilizada por los grupos. Los integrantes de los grupos 1 y 11 responden que el hecho de que los segmentos de las diagonales sean iguales permite que al trazar la circunferencia ésta pase por todos los vértices del rectángulo. Los integrantes de los grupos 4 y 10 explican sus conclusiones afirmando que el hecho de haber trazado la circunferencia permite asegurar que las diagonales son iguales y se cortan en su punto medio. Eligen para proyectar la construcción correspondiente al grupo 4. (Figura 2) Este grupo decide validar lo que en la construcción se nota visualmente evidente, con las herramientas que le brinda el software y utilizando propiedades anteriores. Verifican que los puntos pertenecen a la circunferencia y miden las diagonales. Afirman que utilizan la herramienta “Relación” para verificar que cada uno de los vértices es un punto de la circunferencia y la herramienta “Distancia o longitud” para medir las diagonales. Explican sus conclusiones diciendo que las diagonales son diámetros de la circunferencia, porque pasan por el centro y esto les permite afirmar que son iguales. Los segmentos AO, OC, BO, OD son radios de la circunferencia de centro O, por lo tanto son iguales y las diagonales AC y BD se cortan en su punto medio.

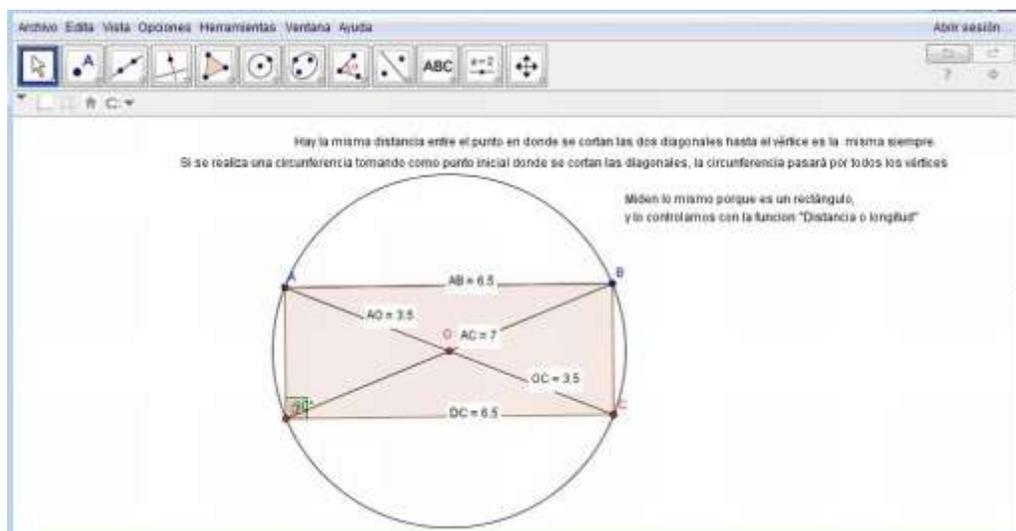


Figura 2

Finalizada la puesta en común la docente realiza preguntas al grupo clase relacionadas con las propiedades de los lados, ángulos y diagonales del paralelogramo. Luego se recuerda la definición de rectángulo como un paralelogramo con un ángulo recto. También se recuperan las propiedades de lados y ángulos del rectángulo, pues si bien no son objeto de la actividad analizada, los estudiantes las mencionan en las construcciones y en la puesta en común. Al mencionar las propiedades de las diagonales de un rectángulo, no logran utilizar la definición de rectángulo para validar que las diagonales se cortan en el punto medio por ser el rectángulo un paralelogramo. Es necesario volver a preguntar por las propiedades del paralelogramo, recordar la definición de rectángulo, aclarando que se trata de un paralelogramo una vez más, para que finalmente concluyan que las diagonales de un rectángulo se cortan en su punto medio porque es un paralelogramo y ésta propiedad se cumple para todos los paralelogramos. Una alumna pregunta si la propiedad de las diagonales iguales se cumple también en un cuadrado. Si bien no se trabaja la definición de cuadrado previamente, consideramos que esa alumna intenta un trabajo de razonamiento deductivo utilizando para validar propiedades conocidas.

Reflexiones

La implementación de la propuesta permite reflexionar en torno a los procesos puestos en juego por los alumnos en la elaboración de conjeturas y en su validación. Larios & González González (2010) sostienen que el proceso de elaboración de conjeturas es fundamental "(...) porque es el paso previo para la justificación de propiedades por medio de un proceso de observación y construcción de conocimiento" (p. 158)

En la actividad implementada, se trabaja con un SGD en el que el carácter dinámico de las construcciones favorece especialmente la elaboración de conjeturas. Sin embargo, las posibilidades que ofrecen las herramientas de GeoGebra deben ser tenidas en cuenta en la planificación de propuestas, ya que en algunos casos puede generar, según González López

(2001) una anticipación de respuesta que “(...) puede impedir precisamente las beneficiosas tareas de exploración y conjetura”. (p. 284). En la actividad analizada, las herramientas “Relación” y “Distancia o longitud” son utilizadas para elaborar y validar conjeturas.

La validación requiere argumentos explicativos, distintos a la constatación empírica. La problemática de la validación según Saiz (2007) es didácticamente compleja, ya que implica que el alumno comprenda que el conocimiento matemático es un medio para estar seguro más allá de la experiencia. Los grupos 4 y 10 utilizan propiedades que tienen disponibles en el proceso de validación, además de las herramientas que les ofrece el software, por esto les resulta significativo el trazado de la circunferencia. Los grupos 1 y 11 intentan utilizar un argumento en base a propiedades conocidas pero para justificar que la circunferencia trazada pasa por todos los vértices del rectángulo usan la propiedad a validar. Sin embargo, considerando los argumentos de la totalidad de los grupos que exponen, se observa un predominio de la constatación empírica para la validación de conjeturas. Laborde (1997) sostiene que

(...) el dibujo se presta a experimentos que dan cuenta de preguntas planteadas en la teoría, traducidas luego al dibujo, y cuya respuesta en el dibujo no da una respuesta en la teoría sino que proporciona supuestos, pistas para el trabajo teórico. (p. 37)

La constatación empírica que se observa en la mayoría de los grupos como único argumento de validación, muestra que la respuesta en el dibujo significa una respuesta en la teoría para los alumnos. Este predominio puede deberse al valor de evidencia que proporciona el aspecto dinámico de las construcciones con el software. Chazan (citado en Larios & González González, 2010) sostiene que puede transformarse de ésta manera la prueba en evidencia y la evidencia en prueba, y generar en el alumno una falta de necesidad por producir argumentos de validación. Itzcovich (2005) destaca la diferencia que existe entre los procesos de medir y demostrar. Los alumnos que manifiestan haber medido las diagonales con la herramienta “Distancia o longitud” obtienen medidas determinadas, pero si no utilizan propiedades geométricas para validar sus conjeturas, no tienen argumento que demuestre que las medidas no pueden haber sido otras. Sin embargo no es un cuestionamiento para los estudiantes, para quienes es suficiente con lo devuelto por el software. Para validar la propiedad que las diagonales se cortan en su punto medio, no aparece como argumento utilizado por los alumnos que el rectángulo es un paralelogramo y por esa razón cumple con la propiedad. De ésta manera, puede evidenciarse el obstáculo para la comprensión que menciona Berté (2000) relacionado con la clasificación por inclusión que es la utilizada por el docente para definir rectángulo. A los estudiantes les resulta más “natural” definir por partición.

En éste tipo de propuestas se intenta propiciar la elaboración de argumentos deductivos por parte del alumno, y la validación de los mismos. La complejidad de este proceso requiere que se planifiquen distintos tipos de tareas donde las construcciones se utilicen como medio para explorar y producir propiedades, con el propósito de involucrar al alumno en el trabajo deductivo teniendo siempre presente que el trabajo dinámico del software, que permite

múltiples posiciones de una única construcción, puede generar en el alumno la falta de necesidad de validación más allá de la evidencia que le ofrece el SGD.

Referencias bibliográficas

Argentina. Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe. (2013). *Orientaciones Curriculares. Educación Secundaria. Ciclo Básico*.

Argentina. Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe. (2014). *Diseño Curricular de Educación Secundaria Orientada*.

Berté, A. (2000) *Matemática Dinámica*. Buenos Aires: AZ Editora.

González-López, M. J. (2001). La gestión de la clase de geometría utilizando sistemas de geometría dinámica. En Gómez, P., y Rico, L. (Ed.) *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 277-290). Granada: Editorial Universidad de Granada.

Iztcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la geometría. De las construcciones a las demostraciones*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Iztcovich, H. & Broitman, C. (2001) *Orientaciones didácticas para la enseñanza de la Geometría en EGB*. Gabinete pedagógico curricular. Matemática. Buenos Aires. Subsecretaría de Educación.

Koehler, M. & Mishra, P. (2006), “Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge” (Conocimiento tecnológico, pedagógico del contenido. Un marco conceptual para el conocimiento docente), *Teachers College Record*, 108(6), 1017-1054. Recuperado en inglés de: http://punya.educ.msu.edu/publications/journal_articles/mishra-koehler-tcr2006.pdf

Laborde, C. (1997) *Cabri-Geómetra o una nueva relación con la Geometría*. En Puig L. (Ed.) *Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática*. (pp. 33-48) Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Larios, V. & González González, N. (2010) Aspectos que influyen en la construcción de la demostración en ambientes de geometría dinámica. *Relime*. Vol. 13 (4-I). pp. 147-160.

Larios Osorio, V. (2002). Demostraciones y Conjeturas en la escuela media. *Xixim*. Año 2, n° 3: pp. 45-55.

Saiz, I. (2007). Entrevista Una matemática con sentido. Recuperado de: <http://portal.educ.ar/noticias/entrevistas/irma-elena-saiz-una-matematica.php>

Sadovsky, P. & Sessa, C. (2004). Entrevista: Para estar seguros. *La Educación en nuestras manos*. N° 71: pp. 36-40.