EL APRENDIZAJE DE ESPACIOS VECTORIALES EN ÁLGEBRA: UNA MIRADA DESDE LA TEORÍA APOE

Fabiana Montenegro[1,3], Alejandra Gagliardo[1,2], Silvina Mangini[1], Aylén Carrasco[1]
[1]Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas. Universidad Nacional del Litoral. [2]Facultad Regional Santa Fe. Universidad Tecnológica Nacional. [3]Escuela Normal Superior Nº 32 "General José de San Martín". Argentina
montenegrofabiana@yahoo.com.ar, agagliardo@frsf.utn.edu.ar,
silvinamangini@yahoo.com.ar, aylen.carrasco@gmail.com

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo lograr una más amplia y acabada comprensión de las dificultades de los alumnos en el aprendizaje de "Álgebra Lineal", para proponer cambios a mediano plazo que contribuyan a disminuir dichas dificultades y al logro de mejores rendimientos académicos, usando los conceptos de la Teoría APOE. Para ello elaboramos una entrevista en la que participaron 6 alumnos. El análisis cualitativo de las encuestas lo hemos interpretado por pregunta y por alumno. Como grupo docente reconocemos que éste es el primer paso para el análisis y aplicación de la Teoría APOE en nuestra cátedra.

Introducción

El trabajo que aquí se presenta es una iniciativa del grupo de docentes de la asignatura 'Álgebra Lineal' de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas (FICH) de la Universidad Nacional del Litoral (UNL), y tiene como objetivo lograr una más amplia y acabada comprensión de las dificultades de los alumnos en el aprendizaje de esta sección de la matemática, para proponer cambios a mediano plazo que contribuyan a disminuir dichas dificultades y al logro de mejores rendimientos académicos, usando los conceptos de la Teoría APOE.

Los Planes de Estudio de todas las carreras de grado de esta facultad contienen en el segundo cuatrimestre del primer año la asignatura 'Álgebra Lineal', con una carga horaria de 6 horas semanales. Según el régimen de correlatividades, para el cursado de esta asignatura, los alumnos deben poseer la condición de alumno regular en 'Matemática Básica', asignatura del cuatrimestre anterior en la que desarrollan contenidos de Algebra. Quienes conformamos el grupo docente de Álgebra Lineal, desarrollamos esta tarea desde hace años y a partir del 2014, es nuestro deseo conocer y explorar estudios de la didáctica del Álgebra que puedan fortalecer nuestro rol docente en esta asignatura. Fue así como en el año 2015, comenzamos esta investigación a través de una búsqueda bibliográfica enfocada en detectar las posibles causas de dificultades que los alumnos de grado enfrentan en el aprendizaje del Álgebra Lineal, y sobre este bagaje, procedimos al análisis de errores en relación a 'Transformaciones lineales' en exámenes parciales y finales del 2014 (Montenegro et. al.2015).

Comenzamos este trabajo revisando literatura específica y en base a ella elaboramos una entrevista en la que participaron 6 alumnos del último dictado.

Marco teórico

El concepto de Espacio Vectorial (EV) resulta muy difícil para los alumnos debido primordialmente a que es de naturaleza abstracta, con un estatus epistemológico diferente al de la mayoría de los conceptos que se enseñan en la universidad y que implica necesariamente la formalización de conocimientos aprendidos anteriormente.

La propuesta de Piaget sobre el proceso de abstracción reflexiva como la clave de la construcción de los conceptos lógicos-matemáticos, influyó sobre Dubinsky en 1991 en el desarrollo de la teoría de Acción-Proceso-Objeto-Esquema (teoría APOE).

> El propósito central de esta teoría es entender cómo las matemáticas se aprenden para así elaborar un programa educativo que ayude a promover el aprendizaje de éstas. Es por ello, que la Teoría APOE se centra específicamente en la manera en que los estudiantes construyen o aprenden los conceptos matemáticos a partir de sus estructuras matemáticas previas, las cuales evolucionan conformando otros saberes, para así ayudar a los estudiantes a realizar las construcciones mentales necesarias para que dicha evolución se dé, de manera tal de mejorar los procesos de aprendizaje (Vásquez y Parraguez, 2012, p. 575).

Nos situamos en la Teoría APOE como referente teórico y metodológico, ya que esta línea de la didáctica de la matemática brinda elementos adecuados que permiten describir y analizar las construcciones mentales que los estudiantes ponen en juego para construir el concepto de EV.

Según APOE, la construcción del conocimiento matemático pasa por tres etapas básicas: acciones, procesos y objetos.

Un estudiante muestra una concepción ACCIÓN de un determinado concepto matemático si no es capaz de realizar las transformaciones sobre el objeto por sí solo, necesitando estímulos o instrucciones externas que le indiquen paso a paso como llevarlas a cabo. De algún modo el objeto es percibido por el individuo como algo externo. Una acción es por naturaleza, algorítmica. Por ejemplo, Parraguez (2009, p. 39) cita de Trigueros y Oktaç (2005. p. 161) “Un ejemplo de acción en la condición de cerradura sobre un conjunto dado de vectores consiste en tomar 2 vectores explícitamente del conjunto, realizar la adición y verificar si el resultado es un elemento del conjunto”.

> Aunque la concepción de acción es muy limitada, las acciones marcan el principio crucial del entendimiento de un concepto. Por lo tanto, el acercamiento pedagógico de la teoría APOE basada en una teoría de aprendizaje comienza con

> actividades diseñadas para ayudar a los estudiantes a construir acciones (Dubinsky, 1996, pág. 34).

Se dice que un estudiante muestra una concepción PROCESO de un determinado concepto matemático cuando es capaz de reflexionar sobre el concepto, realizando transformaciones pero sin la necesidad de realizar acciones específicas sobre él, es decir, realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. A diferencia de una acción, el individuo percibe el proceso como algo interno, y bajo su control. Sobre esto Trigueros y Oktaç, 2005 (p. 161)decían "Un ejemplo de proceso se encuentra cuando un estudiante es capaz de expresar las etapas necesarias para determinar, sin necesidad de verificación, que la adición de dos elementos de un conjunto de vectores dado es o no es, un elemento del conjunto. Se puede decir que el sujeto ha interiorizado las acciones en proceso. De la misma manera, cuando es capaz de explicar cómo cada axioma se verifica (sin tener la necesidad de realizar cálculos) para que un conjunto dado sea un Espacio Vectorial".

Como menciona Parraguez (2009, p. 39) según Dubinsky (1996) cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un OBJETO.

> Un estudiante que es capaz de demostrar que el conjunto de todas las combinaciones lineales de un conjunto de vectores es un subespacio de un Espacio Vectorial está muy probablemente en el paso de manifestar una concepción de objeto del concepto de combinación lineal. En el caso del concepto de subespacio, esta evidencia puede incluir la posibilidad de determinar si dos conjuntos de vectores diferentes forman dos subespacios equivalentes" (Trigueros y Oktaç, 2005, p. 162)

El paso por las etapas de Acciones, Procesos y Objetos no es necesariamente lineal, y un estudiante puede estar en una etapa en ciertos aspectos de un determinado concepto y en otra para otros.

> En la teoría APOE, un ESQUEMA [….] se define como la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática que involucre esa área de las matemáticas. Cuando un sujeto se encuentra frente a un problema específico en el ámbito de las matemáticas, evoca un esquema para tratarlo. Al hacerlo, pone en juego aquellos conceptos de los que dispone en ese momento y utiliza relaciones entre esos conceptos. […]. El tipo de relaciones que cada sujeto establece entre los conceptos que utiliza, así como el tipo de construcción del concepto que muestra, dependen de su conocimiento matemático. Se espera que a mayor conocimiento, se hayan construido más relaciones entre conceptos y que

> estas relaciones formen estructuras cognitivas coherentes en el sentido de que el individuo distinga claramente aquellas situaciones que pueden tratarse poniendo en juego un esquema específico y aquéllas para las que no es adecuado (Trigueros, 2005, p. 11).

Un esquema no se mantiene fijo sino que evoluciona constantemente y se reestructura dependiendo de las nuevas situaciones problemáticas a las que se enfrenta la persona.

Niveles de evolución de un esquema

En las relaciones que pone en juego un individuo al resolver un problema, se pueden identificar los distintos grados de formación o de estructuración de los esquemas. Consideramos en este trabajo una clasificación de la evolución de los ESQUEMAS dada en Piaget y García (1989).

Por cuestiones de extensión, presentamos los siguientes indicadores, extraídos de Parraguez (2009), de que un estudiante se encuentra en un nivel del esquema de EV o en otro.

Se considera que un estudiante se encuentra en un nivel de esquema INTRA del concepto EV, cuando en sus argumentaciones ante una situación específica, muestra algunos de los siguientes razonamientos:

- Para *n* y *m* números naturales específicos R^n y M_{mxn} son espacios vectoriales conocidos.
- No existen relaciones entre diferentes espacios vectoriales, ni subespacios vectoriales.
- Para chequear que una estructura no es un EV recurre a averiguar uno por uno los axiomas que definen un EV.
- La averiguación de vectores linealmente independientes/dependientes (LI/LD) se realiza mediante una combinación lineal igual al cero vector de R^n.
- La base de un EV es un conjunto de vectores que no tiene relación con el EV.
- La operación suma y multiplicación por escalar son consideradas como las usuales en la estructura Cuerpo-Conjunto. No hay conciencia de que en una misma estructura pueden definirse de manera distinta dichas operaciones binarias.

Un estudiante se encuentra en un nivel de esquema INTER del concepto EV si manifiesta algunos de los siguientes razonamientos:

- Identifica que todos los espacios vectoriales tienen un cero vector, bases, dimensión, etc.
- Relaciona estructuras entre un EV y sus subespacios.
- Reconoce que el cero vector no siempre es un objeto con ceros y acepta la posibilidad de que en algún EV, es un elemento del espacio que no contiene ceros.
- Para chequear que una estructura no es un EV además de verificar los axiomas, recurren a teoremas y propiedades que tienen los EV, empleando la implicación

contrarecíproca. Por ejemplo si V es un EV, H un subconjunto de V y si el vector nulo de V no pertenece a H entonces éste no es un subespacio vectorial de V.

- La averiguación de vectores LI se realiza mediante una combinación lineal igual al elemento neutro. Particularmente en el caso de que el conjunto tenga sólo dos elementos se chequea que éstos sean múltiplos para asegurar que dicho conjunto es LD.
- Expresa que todo vector del EV se puede escribir como combinación lineal de los elementos de cualquiera de sus bases.
- Acepta que una estructura Cuerpo-Conjunto pueda tener definidas operaciones suma y multiplicación por un escalar diferentes a las usuales.

Un estudiante se encuentra en un nivel de esquema TRANS del concepto EV, cuando en sus argumentaciones ante una situación específica, muestra algunos de los siguientes razonamientos:

- Reconoce adecuadamente todas las relaciones entre el EV y otras nociones del álgebra lineal o de otras ramas de la matemática, por ejemplo, con nociones de cálculo.
- Trabaja con ejemplos desconocidos y más complicados de espacios vectoriales.
- Hay pleno reconocimiento de las operaciones binarias en la estructura Cuerpo-Conjunto.

Como se observa Parraguez (2009) ha incluido otras nociones del álgebra por considerar que enriquecen el esquema de EV: independencia-dependencia lineal, base, dimensión, etc.

CICLO DE INVESTIGACIÓN DE LA TEORÍA APOE

La Teoría APOE consiste en un ciclo de investigación compuesto por tres componentes: el análisis teórico, el diseño y aplicación de instrumentos yel análisis y verificación de datos (Asiala et al., 1996).

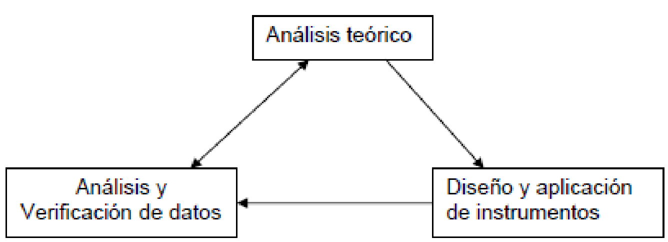

Figura 1. Ciclo de investigación Teoría APOE

El objetivo principal de la primera fase, análisis teórico, es definir una descomposición genética viable para que los estudiantes construyan un concepto determinado, mediante la descripción explícita de las construcciones mentales.

Recordemos en líneas generales la definición de EV: un *EV* sobre el cuerpo de escalares *k*, es un CONJUNTO V de objetos llamados vectores junto con las OPERACIONES

BINARIAS definidas como suma de vectores y multiplicación por un escalar, si las dos operaciones satisfacen determinados AXIOMAS.

Entonces en la estructura algebraica de EV se encuentran dos FUNCIONES

- ✓ Una función fija de $V\times V\rightarrow V$, la suma: $(x,y)\rightarrow x+y$,
- ✓ Hay una función fija de $K\times V\rightarrow V$, la multiplicación por un escalar: $(\lambda,x)\rightarrow\lambda x$.

Para este trabajo hemos adoptado la descomposición genética que elaboró Parraguez en su tesis doctoral, en la cual para la construcción del esquema de EV es preciso tener construidos previamente los esquemas de: CONJUNTO - AXIOMA- OPERACIÓN BINARIA - FUNCIÓN.

Entonces, si en alguno de los esquemas previos el estudiante posee una deficiencia, ésta podría ser una causa para no poder construir de manera coherente el esquema del concepto de EV, que evoluciona pasando por las etapas del esquema descriptas anteriormente.

Entrevista semiestructurada

Preguntas formuladas

Teniendo en cuenta el carácter cualitativo y descriptivo de nuestro estudio, donde las concepciones de los estudiantes son de primordial importancia, consideramos que la entrevista es la técnica que nos permitirá obtener información significativa. Cada una de ellas tuvo una duración aproximada de treinta minutos.

La condición de los seis alumnos entrevistados fue: 2 alumnos promocionados, 2 alumnos regulares que aprobaron luego del cursado, un alumno que rindió la materia como libre, y un alumno regular que aún no había aprobado la materia.

Pregunta 1: Dado el conjunto $B = \{(x, y, z) \in R^3 / 2x + y - z = 0\}$

i. Elige dos elementos cualesquiera de B y súmalos. ¿Es el vector suma un elemento de B? Justificar. ¿Por qué?

ii. Si no hubieras hecho la suma podrías afirmar que ese vector suma es un elemento del conjunto.

iii. Demuestra que el conjunto de todas las combinaciones lineales de dos elementos cualesquiera de B, llamémoslos *c* y *d*, es un subespacio de B.

Análisis: Con el inciso i) se quiere indagar la concepción que posee un estudiante con respecto a la suma definida en este EV. Es decir, dados dos elementos de un conjunto específico y una operación binaria específica, si puede encontrar un elemento resultante (concepción acción). Con el inciso ii) se quiere investigar si el alumno, sin hacer los cálculos, puede determinar si el vector suma es o no un elemento del conjunto (concepción proceso). Con el inciso iii) si el estudiante es capaz de demostrar que el conjunto de todas las combinaciones lineales de un conjunto de vectores, es un subespacio de un EV (concepción objeto).

Pregunta 2: Dado el conjunto B=$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad / \ a = d, b = 2, c \epsilon R\right\}$

i. Determina un elemento cualquiera de B y un número real. Multiplícalos. ¿Es dicho vector un elemento de B? Justificar.

ii. Si no hubieras hecho la operación del ítem anterior, podrías afirmar que el producto de un elemento de B por un escalar, es un elemento del conjunto.

Análisis: El objetivo es indagar las construcciones hechas por los estudiantes con respecto a la otra operación binaria: la multiplicación por un escalar. Al igual que en la pregunta 1, en i) se investiga si le es posible determinar un elemento específico de un conjunto y reconocer si al multiplicarlo por un escalar se obtiene o no otro elemento del mismo conjunto (concepción acción). En ii), si el alumno observando el conjunto dado puede justificar su afirmación anterior sin la necesidad de efectuar cálculos (concepción proceso).

Pregunta 3: ¿Es V = {p= (2, 3, -1) + t (1, 4, 5) / t$\in$R} un EV?

Análisis: En esta pregunta se le presenta al alumno un conjunto V haciendo uso de un parámetro y se le cuestiona si tal conjunto es un EV. Se quiere observar el tipo de construcción que tiene el alumno en relación al esquema de EV y al concepto de axioma. El alumno se enfrenta a distintas dificultades tales como: ausencia explícita del cuerpo y de las operaciones binarias, notación de conjuntos y dificultades relacionadas con parámetros.

Pregunta 4: ¿Es posible que exista un EV que tenga un solo elemento? ¿Por qué?

Análisis: Esta pregunta puede presentar dificultades porque de acuerdo a las operaciones binarias y a los axiomas, el alumno puede dudar si el conjunto necesita como mínimo dos o tres elementos. De igual manera, se quiere observar si el axioma de inclusión del cero vector y la cerradura de las operaciones binarias han sido interiorizadas.

Pregunta 5: ¿Es posible que exista un EV que tenga dos elementos? ¿Por qué?

Análisis: Como en la pregunta anterior se puede pensar que no es posible puesto que se necesita al menos tres elementos para poder verificar el axioma de la asociatividad de la suma o los axiomas de distributividad.

Pregunta 6: Sea V un EV y U$\subset$V. ¿Es U un EV? ¿Por qué?

Análisis: Se quieren observar las dificultades que pueden causar las propiedades de un subconjunto de un EV en el alumno porque puede pensar que un subconjunto de un EV es también un EV o dar un contraejemplo para mostrar que este no necesariamente es el caso.

Pregunta 7: i) ¿Es el conjunto de los enteros un subespacio vectorial de los reales? ¿Por qué? ii) ¿Es el conjunto de los reales un subespacio vectorial de los números enteros? ¿Por qué?

Análisis: Con esta pregunta se espera tener un panorama general acerca de las construcciones mentales de los alumnos respecto al papel que juegan el EV y el cuerpo de los escalares, cuando hay una relación de inclusión entre dichos conjuntos.

Pregunta 8: ¿La intersección de dos rectas en R^3 es un EV de R^3?

Pregunta 9: ¿La intersección de dos planos en R^3 es un EV de R^3?

Análisis de las preguntas 8 y 9: En estas últimas dos preguntas se quiere examinar si el alumno reconoce adecuadamente las relaciones entre espacios vectoriales, en particular, la propiedad que dice que la intersección de dos subespacios vectoriales es un subespacio vectorial.

Respuestas de los alumnos

Respuestas de la Pregunta 1

De los 6 alumnos entrevistados, sólo uno responde correctamente a todos los incisos de la pregunta. De los 5 alumnos restantes:

- En el ítem i), responden bien 3 de ellos y de manera equivocada 2.
- En el ítem ii),4 presentan la duda de que si la justificación de la respuesta se debe a que V es un plano en R^3 que pasa por el origen. Destacamos que el concepto de plano en el espacio pertenece a la asignatura Matemática Básica.
- Con respecto a iii), 4 no lo resuelven y los 2que sí lo hacen, presentan dificultades al expresar la combinación lineal confundiéndola con el concepto de independencia lineal.

Respuestas de la Pregunta 2

En ambos ítems, 4 de los alumnos sostuvieron que la multiplicación por escalares no es cerrada ya que uno de los elementos de las matrices del conjunto es un valor fijo. Los otros 2 alumnos no notaron esta característica.

Respuestas de la Pregunta 3

Solo 1 de los 6 alumnos entrevistados logró responder sin dificultades la pregunta identificando que la recta no contiene al origen, por lo tanto no es un EV. Los otros 5 estudiantes si bien tenían claro el concepto teórico de que una recta que no pasa por el origen no es un EV, tuvieron dificultades para reconocer la estructura de la Recta en R^3; una vez identificado esto, entonces lograron llegar a la respuesta correcta.

Respuestas de la Pregunta 4

De los 6 alumnos entrevistados, 4 de ellos respondieron correctamente. Los 2 alumnos restantes propusieron, en primer lugar, al conjunto {1} pero probaron que la cerradura bajo la suma no se satisface. En consecuencia, interpretaron que el conjunto formado por el elemento cero era el único EV con un solo elemento.

Respuestas de la Pregunta 5

Como los 6 alumnos presentaron dificultad para contestar dicha pregunta, se propuso que escriban un conjunto de dos elementos. Todos ejemplificaron un conjunto que incluía el vector nulo y otro vector distinto a él, pero no consideraron que si sumaban el vector no nulo con sí mismo, el vector resultante no era un elemento del conjunto propuesto.

Respuestas de la Pregunta 6

De los 6 alumnos, 3 contestaron correctamente, y los 3 restantes confundieron la definición de subconjunto con la de subespacio.

Respuestas de la Pregunta 7

En el inciso i), todos los alumnos tuvieron presentes las operaciones binarias, pero fallaron al evaluar el axioma de cerradura del producto por un escalar, por no observar que el conjunto de los escalares es el conjunto de los números reales.
Con respecto al inciso ii), todos los alumnos contestaron correctamente al reconocer que el conjunto de los números reales no es un subconjunto del conjunto de los números enteros.

Respuestas de las Preguntas 8 y 9

Los 6 alumnos interrogados han realizado un dibujo de la intersección de dos rectas y de dos planos, deduciendo que siempre que las rectas y los planos pasen por el origen, su intersección es un EV.

Ánalisis de las respuestas

Considerando el análisis teórico mencionado en este trabajo, el análisis cualitativo de las encuestas lo hemos interpretado por pregunta y por alumno.

Análisis por pregunta El razonamiento de las respuestas indica que el 46 % de las mismas caracteriza al nivel INTRA en la evolución de esquema de EV, el 52 % refiere al nivel INTER y solo el 2% de las respuestas al nivel TRANS.

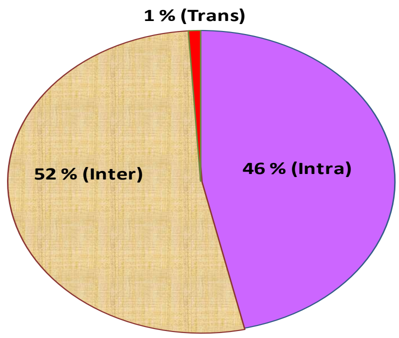

Figura 2. Análisis cuantitativo de las encuestas

Hemos observado que en algunas preguntas todas las respuestas dan cuenta del mismo nivel de esquema. Así, por ejemplo, todas las respuestas de las preguntas 3 y 5 corresponden al nivel INTRA y todas las respuestas de las preguntas 7,8 y 9 al nivel INTER.

Análisis por alumno

Del análisis delas argumentaciones de todas las respuestas de cada alumno y considerando los niveles de esquema del concepto de EV dada por Parraguez (2009) podemos afirmar de que los 6 entrevistados:

- 2 alumnos se encuentran en el nivel INTRA pues las acciones, procesos y objetos que conforman su esquema de EV están ligados entre sí por relaciones débiles y no han identificado transformaciones que permitan establecer relaciones entre dichas componentes del esquema.
- 3 alumnos se encuentran en el nivel TRANS pues en sus razonamientos evidencian la existencia de relaciones entre diferentes acciones, procesos y objetos relacionados con los conceptos vinculados con EV.
- 1 alumno está en la transición del nivel INTER al TRANS ya que va configurando un esquema de EV coherente y manifiesta transformaciones que permite relacionar de manera más fuerte los elementos constitutivos del esquema.

Los seis alumnos entrevistados construyeron el concepto de EV como una concepción acción, tres con una concepción proceso y solo un estudiante muestra una concepción objeto del objeto matemático EV.

En algunos alumnos se observó que los obstáculos para no lograr una concepción proceso de EV se debe a dificultades de esquemas de conceptos desarrollados en Matemática Básica. Por ejemplo en los conceptos de Rectas y Planos en el Espacio.

Como grupo docente reconocemos que éste es el primer paso para el análisis y aplicación de la Teoría APOE en nuestra cátedra.

Referencias bibliográficas

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., Thomas, K., (1996): *A framework for research and development in undergraduate mathematics education.* En Kaput, J. Shoenfeld H., Dubinsky, E. (eds) Research in Collegiate Mathematics Education IICBMS Issues in Mathematics Education, 6, 1-32**.**

Dubinsky, E. (1991): *Reflective Abstraction In Advanced Mathematical Thinking*, En Dordrecht, Kluwer Academic Press, D. Tall (eds.).Advanced Mathematical Thinking.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educaciónmatemática universitaria. *Educación Matemática*. 8(3), 25 – 41.

Dubinsky, E. (1997). Some Thoughts on a First Linear Algebra Course, En D. Carlson, C. Johnson, D. Lay, R. Porter, A. Watkins y W. Watkins(Eds). *Resources For Teaching Linear Algebra* (pp. 85-106). Washington: Mathematical Association of America.

Ordoñez Velásquez, M. A y Torres Salgar O.L, (2011). Concepto de variable: Procesos que favorecen su construcción. Trabajo de grado como requisito para optar por el título de especialista en Licenciado en Matemáticas. Universidad Industrial de Santander. Extraído de http://repositorio.uis.edu.co/jspui/bitstream/123456789/7205/2/142333.pdf.

Parraguez Gonzalez, M. (2009). *Evolución Cognitiva del Concepto de EV*. Tesis de Doctorado publicada. Instituto Politécnico Nacional. Ciudad de México. México.

Piaget, J. y García, R. (1982). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. Madrid. Siglo XXI.

Vásquez Ortiz, C. y Parraguez González, M. (2012). Construcción del concepto probabilidad: una perspectiva desde la teoría APOE. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol 25, p 573-582.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. Educación Matemática, 17 (1), 5-31.

Trigueros, M. y Oktac, A. (2005). La Thèorie APOS et I’Enseignement de I’ AlgèbreLinéaire. *Annales de Didactique et de SciencesCognitives10*, (pp. 157-176). Strasbourg. Francia.