MATICES EN LA TEMATIZACIÓN DEL ESQUEMA CONCEPTOS BÁSICOS DEL ÁLGEBRA LINEAL

Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaaiso. Chile
marcela.parraguez@pucv.cl

Resumen

En el contexto del análisis de la comprensión de conceptos básicos del álgebra lineal en estudiantes universitarios, se considera por una parte, los elementos teóricos y analíticos propuestos por la teoría APOE en relación a la tematización de un esquema y por otra, la configuración de los conceptos caracterizada por: elementos matemáticos, relaciones lógicas y modos de representación que los estudiantes utilizan. Los resultados (Proyecto Fondecyt Regular 1140801) sugieren que tematizar el esquema conceptos básicos del álgebra lineal es difícil de lograr, observándose diferencias en la forma de establecer las conexiones entre las componentes que están conformando el esquema del estudiante.

Introducción

La presente investigación, proporciona evidencia con sustento teórico de las construcciones y mecanismos mentales que utiliza un estudiante universitario como estrategia cognitiva para construir conceptos básicos del álgebra lineal cuando él –hipotéticamente– los utiliza o aplica; bajo el supuesto que el uso y la aplicación de estos conceptos básicos se convierten en un medio de construcción conceptual para el álgebra lineal (AL). En el contexto de este escrito mostramos 3 conceptos básicos representativos del AL: Espacio Vectorial, Combinación lineal y Transformación Lineal.

El uso de un concepto básico del AL lo vamos a entender como la aplicación del concepto a distintos tipos de situaciones, algunas que están en la misma AL, y otras que están en otras áreas de la matemática, lo que permite dar cuenta de un aprendizaje significativo de estos conceptos y posteriormente brindar elementos para la elaboración de material didáctico, con el fin de que esto pueda ser utilizado por la comunidad de profesores interesados en la enseñanza de esta disciplina, para estudiantes de distintas licenciaturas e Ingenierías.

Todo la investigación se fundamentó desde la Didáctica de la Matemática o Matemática Educativa, a través de la teoría APOE, como marco teórico y metodológico, para alcanzar el siguiente objetivo de investigación: Investigar las construcciones y mecanismos mentales (como componentes de un esquema) que puede utilizar un estudiante como estrategia cognitiva para construir conceptos básicos del álgebra lineal, cuando él –hipotéticamente– los utiliza o aplica.

Marco teórico: la teoría APOE

Los proponentes de APOE (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros & Weller, 2014) han venido publicando sus resultados desde la década de los 80; su metodología ha sido validada por diversos trabajos del grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education) y otros.

Dubinsky se basa en la abstracción reflexiva de Piaget para describir la construcción de objetos mentales, y distingue varios tipos de ella o mecanismos: interiorización, coordinación, encapsulación, generalización, reversión. Estos originan diferentes construcciones (mentales): acciones, procesos, objetos, esquemas (APOE).

Tomemos un fragmento F de conocimiento matemático –conceptos básicos del AL–. Un individuo posee una concepción acción de F si las transformaciones que hace sobre él se realizan paso a paso, obedeciendo a estímulos que son y percibe como externos. Él interioriza la acción en una concepción proceso de F si puede realizar una operación interna que hace (o imagina) esencialmente la misma transformación enteramente en su mente, sin necesariamente recorrer todos los pasos específicos. (Puede coordinar dos o más procesos o revertir uno para obtener un nuevo proceso). Si piensa en un proceso como un todo, y realiza y construye transformaciones sobre su totalidad ha encapsulado el proceso en una concepción objeto de F. Si necesita volver desde el objeto al proceso que lo forma, lo hace desencapsulando el objeto. (Las dificultades del estudiante con el simbolismo matemático provienen de tratar de aplicar rótulos antes de que los objetos hayan sido encapsulados). Un esquema de aquel trozo es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente del individuo en una estructura cognitiva coherente. La coherencia es la capacidad para reconocer relaciones al interior del esquema y establecer si este permite solucionar una situación matemática particular y usarlo en tal caso. Al tratar un problema matemático, el individuo evoca un esquema (Figura 1) y lo desenvuelve para tener acceso a sus componentes, utiliza relaciones entre ellas, y trabaja con el conjunto. Un esquema está siempre en evolución y puede considerarse como un nuevo objeto al cual pueden aplicársele acciones y procesos; en tal caso, se dice que el esquema se ha tematizado.

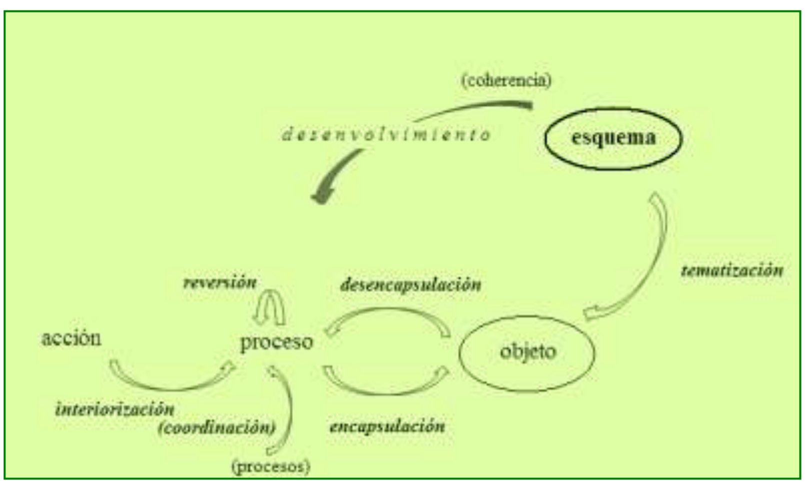


Figura 1. Diagrama de un Esquema descrito según los componentes de APOE.

Una, análisis teórico describe en detalle los aspectos constructivos de *F* para explicitar un camino factible de su aprendizaje en términos de construcciones y mecanismos mentales, de tal manera que el aprendiz pueda seguirlo para tener buen éxito. Tal análsis no es único, pues depende de los caminos de construcción y de las estructuras mentales previas del individuo.

En lo que sigue el uso de un concepto báiso del AL lo vamos a entender A través de un esquema (de conceptos básicos del AL), que son desarrollados y sintetizados por el estudiante para ser utilizados en la resolución de problemas matemáticos y que muestran la coherencia del esquema (o sea niveles de desarrollo del esquema) al discernir cuando el esquema es aplicable o no. Un esquema mental está en continua evolución, que se interpreta a través de tríada (Piaget y García, 1983, 1989). en niveles *Intra*, *Inter* y *Trans*.

A continuación, proponemos indicadores de desarrollo del esquema conceptos básicos del AL en la mente de un estudiante, que nos permitirán interpretar la tematización del esquema conceptos básicos del AL.

Nivel de desarrollo Intra de concepto básico del AL: Por el tipo de relaciones o no, que se establecen en organizaciones conceptuales a partir de relaciones lógicas o síntesis constituidas dentro de la axiomática del AL y los posibles esbozos de relación (del tipo conjunción lógica) que seguramente se realizarán con errores, o en forma aislada

Nivel de desarrollo Inter de concepto básico del AL*:* Por el tipo de transformaciones, esto es, construcción de relaciones y transformaciones entre las entidades cognitivas (agrupar ítemes y aún llamarlos con un mismo nombre)

Nivel de desarrollo Trans de concepto básico del AL*:* Por el tipo de conservaciones o invariantes que se constituye en una estructura subyacente implícita o explícita y a través de ella relaciones desarrolladas, que en esta etapa son entendidas como conservaciones invariantes a través de los cuales se logra establecer qué pertenece a la amplitud del esquema y qué no pertenece, mostrado cuando los estudiantes son capaces de establecer entre los estados de construcciones de conceptos del AL particulares, que evocan dentro del esquema, cuando resuelven problemas.

Ahora, desde esta perspectiva el objetivo es identificar el tipo de relaciones (lógicas o no), transformaciones y conservaciones o invariantes establecidas entre los elementos matemáticos del AL, que los estudiantes usan cuando resuelven un problema, para así caracterizar el proceso de tematizar un esquema de conceptos básicos del AL, a través de su uso.

Metodología

La investigación se propone comprender los procesos mentales que subyacen a las estrategias de aprendizaje del AL en estudiantes universitarios. Particularmente, interesa describir los mecanismos y las construcciones mentales del esquema que un estudiante evoca para aprehender conceptos básicos del AL; al alero del ciclo de metodologico de la teoría APOE, al cual se le ha insertado un estudio de caso (Stake, 2010).

El caso único está conformado por 11 alumnos chilenos de una universidad del centro país, 3 estudiantes de las carreras de Licenciatura en Matemática (etiquetado como L1, L2 y L3), 5 de Pedagogía en Matemática (etiquetados como P4, P5, …, P8) y 3 de Ingeniería (etiquetados como I9, I10 y I11), con ciertas características definidas y escogidos, según los siguientes criterios: (1) Heterogeneidad de los estudiantes que pertenecen al conjunto; (2) Sus malla curricular incluye al menos una asignatura de AL; (3) Accesibilidad de los investigadores; (4) Participan voluntariamente.

Ciclo de investigación de APOE

Al caso de estudio único, se le aplicará el ciclo de investigación previsto en la teoría APOE (Arnon et al., 2014) el que permite obtener una descripción de las construcciones mentales que realizan los estudiantes; y a partir del análisis de los datos obtenidos, se lo puede repetir, para refinar tanto el análisis teórico como los instrumentos. A continuación se describen las tres componentes del ciclo:

Análsis teórico (también conocido como Descomposición Genética): Consiste en el estudio profundo de los conceptos matemáticos inmersos en los conceptos básicos del AL, para determinar las construcciones mentales necesarias para su aprendizaje, y es mediante ésta descripción hipotética que se levanta el esquema, que consiste en una modelación epistemológica y cognitiva del concepto básico del AL. Hemos de aclarar que tal esquema no es único, pues depende de los caminos de construcción del concepto y de las construcciones mentales a considerar.

Diseño y aplicación de instrumentos: Una vez definido el análisis teórico a través del esquema es necesario probarlo, es decir, tener alguna certeza de la viabilidad del camino señalado en él. Para esto se diseñaaron y aplicaron cuestionarios que permitieron identificar las construcciones mencionadas en los esquemas iniciales, de modo de reflejar estrusturas y mecanismos mentales, mediante las cuales los estudiantes pueden aprehender dichos conceptos.

Análisis y verificación de datos: En esta etapa y a partir de los resultados obtenidos con la aplicación de los instrumentos –cuestionarios–, se da por finalizado el ciclo de investigación, pues valida el esquema que se propone, luego de ajustar el que se postula inicialmente, de acuerdo a los datos empíricos obtenidos. A partir de ahí, se pueden hacer propuestas didácticas para la enseñanza y aprendizaje de los conceptos básicos del AL, pues se posee información clara con respecto a las construcciones mentales que los estudiantes han evocado en las actividades propuestas.

En búsqueda de evidencias empíricas que matizan la interpretación de la tematización de conceptos básicos del AL

Se realizó una toma de datos con la intención de documentar las construcciones y mecanismos mentales, que matizan la tematización del esquema conceptos básicos del AL. Hemos seleccionado tres preguntas del cuestionario, para darlas a conocer en este artículo, que a continuación serán analizadas e interpretadas a luz de los elementos de la teoría APOE presentada. La razón de ser de la selección de las preguntas es que ellas desproveen a los estudiantes de las algoritmias propias (que ellos vienen utilizando para dar respuesta a otras preguntas del cuestionario) y los impulsan a hacer uso de las estructuras generales propias del álgebra lineal, para los tres conceptos básicos del AL en estudio.

Análisis teórico de Espacio Vectorial

Conocimientos previos para su construcción: Esquemas de conjunto, operación binaria, axioma y función.

Construcción: el concepto EV se puede construir como un objeto, fundamentalmente por la relación de tres esquemas: conjunto, operación binaria y axioma; a través de la coordinación de los procesos que se derivan del objeto suma de vectores y del objeto multiplicación por escalar mediante la coordinación de los procesos involucrados en las leyes distributivas y los axiomas que van estructurando ambas operaciones. De estas construcciones emerge un nuevo objeto que puede ser llamado espacio vectorial.

Cuando distintos objetos espacio vectorial, como R^n y $M_{mxn}(R)$, se reconocen como objetos matemáticos que comparten la misma estructura, se construye un esquema que se considera en el nivel trans. Para llegar a ese nivel, dicho esquema evoluciona a través de los niveles de la tríada mediante la construcción de relaciones entre el objeto espacio vectorial y los esquemas, objetos, procesos y acciones relacionados con los conceptos tales como conjunto generador, base y dimensión.

Pregunta del cuestionario sobre espacio vectorial

¿Puedes encontrar un subespacio propio de R^2 que contenga los puntos $A(2,5)$ y $B(5,5)$ indicados en la figura 2?

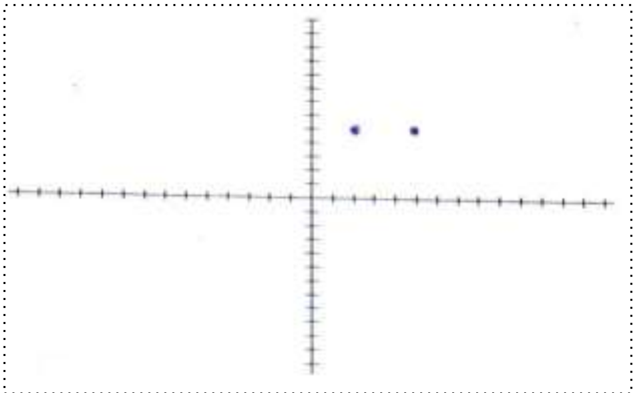
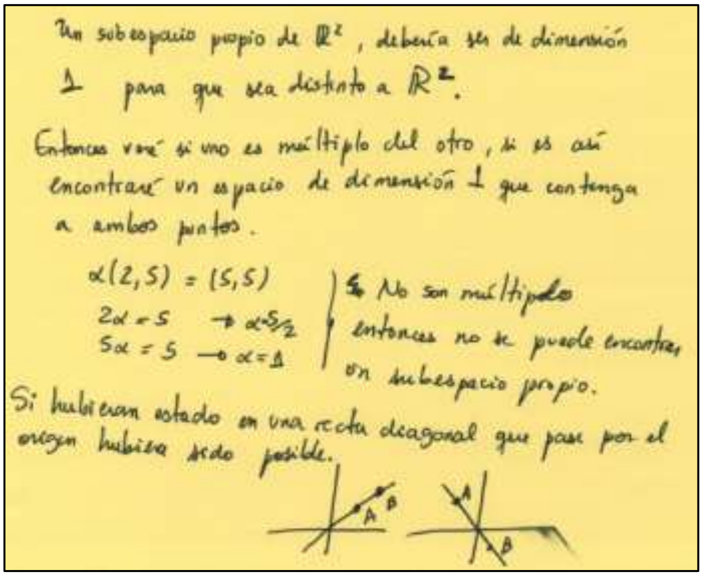


Figura 2. Gráfica del espacio vectorial R^2.

La respuesta del estudiante L2 (Figura 3) pone manifiesto una concepción esquema intra de espacio vectorial $\mathbf{R}^2$, al relacionar las rectas vectoriales con los subespacios propios de $\mathbf{R}^2$.


Un subespacio propio de $\mathbb{R}^2$, debería ser de dimensión 1 para que sea distinto a $\mathbb{R}^2$.

Entonces veré si uno es múltiplo del otro, si es así encontraré un espacio de dimensión 1 que contenga a ambos puntos.

$\alpha(2,5) = (5,5)$
$2\alpha = 5 \rightarrow \alpha = 5/2$
$5\alpha = 5 \rightarrow \alpha = 1$

No son múltiplo entonces no se puede encontrar un subespacio propio.

Si hubieran estado en una recta diagonal que pase por el origen hubiera sido posible.

Figura 3. Respuesta del estudiante L2 a la pregunta de espacio vectorial.

Análisis teórico de Combinación Lineal de vectores

Conocimientos previos para su construcción: Álgebra con números reales como esquema y espacio vectorial como objeto.

Construcción: Una vez que un estudiante logra una concepción proceso proveniente de las operaciones suma y multiplicación por escalar del espacio vectorial, éstos deben generalizarse para una sucesión finita de vectores y para una sucesión finita de escalares, resultando un nuevo proceso de combinación lineal, que será encapsulado en el objeto combinación lineal a través de la resultante de la suma. Esta construcción objeto de combinación lineal evoluciona en la medida que se consideren distintos objetos espacio vectorial, como R^n y $M_{mxn}(R)$ y una diversidad de operaciones suma y ponderación por escalar.

Pregunta del cuestionario sobre combinación lineal de vectores

Determine (en caso de existir), el valor de $k \in \mathbb{R}$ tal que el vector $(-4,1,k,-7)$ sea combinación lineal de $(1,2,1,1)$ y $(2,1,-1,3)$.

Con esta pregunta se indagó en el tipo de construcción que un estudiante muestra del concepto combinación lineal, en particular si un estudiante procede adherido a una definición. Además interesó ver qué procedimientos se desplegaron para determinar los escalares que permiten que un vector del espacio vectorial de R^4, se pueda escribir como combinación lineal de otros dos vectores del espacio vectorial en cuestión.

En la respuesta del estudiante P7 se puede observar que determina a priori dos escalares (Figura 4), para ponderar los otros dos vectores dados y luego sumarlos para comparar sus componentes con el vector que deben generar.

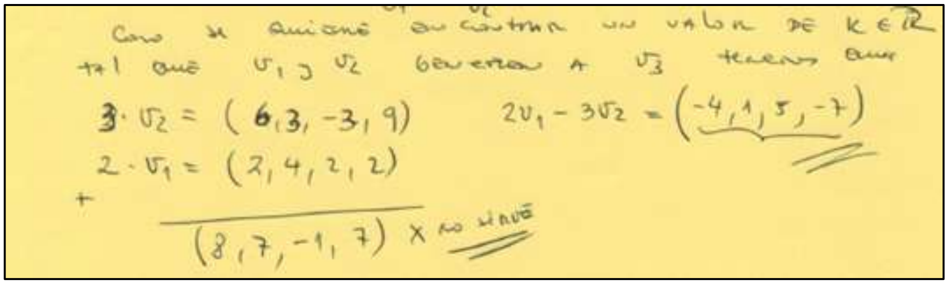


Figura 4. Rspuesta del estudiante P7 a la pregunta de combinación lineal.

Al restar los vectores que pondera inicialmente con los escalares, que establece a priori, P7 logra determinar (Figura 5) la componente que falta al vector que deben generar.

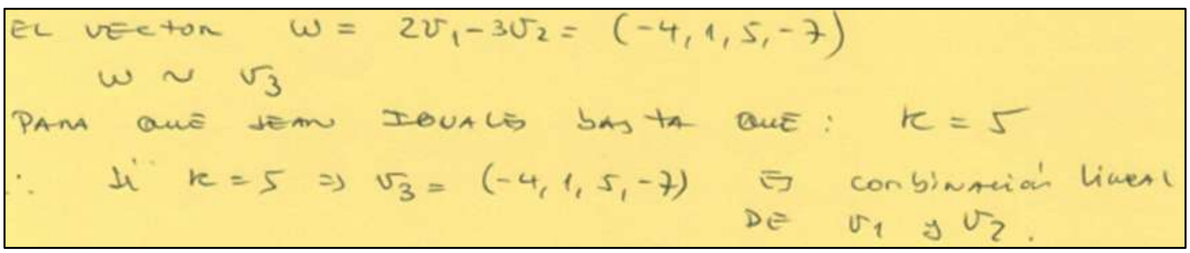


Figura 5. Determinación de la componente que falta al vector generado por dos vectores.

El procedimiento utilizado por este estudiante P7, pone de manifiesto una transformación sobre el concepto combinación lineal (esquema inter), pues asume dos escalares que le permite ponderar a los otros dos vectores que luego adiciona o “resta”; lo que a su vez da cuenta de una “sensibilidad” numérica.

Lo anterior evidencia lo que en la literatura relativa a la investigación en didáctica del álgebra lineal se pone de manifiesto allá por los años ’80, que los estudiantes si bien conocen nuevas herramientas en el ámbito del AL, tienden a resolver los problemas con los rudimentos que han adquiridos en cursos más elementales (Dorier, 2000).

Análisis teórico de Transformación lineal

Conocimientos previos para su construcción: Esquema de función que incluye el concepto de función como proceso y su relación con el concepto de dominio, imagen y contradominio. Concepto de vector como objeto con las operaciones de vectores: suma y multiplicación de vectores por un escalar, estas últimas como proceso. Esquema de espacio vectorial. Concepción proceso de la noción de espacio vectorial que incluye las propiedades que lo definen y el reconocimiento de espacios vectoriales.

Construcción: El proceso de reconocer si una transformación dada es o no es lineal se encapsula en el objeto transformación lineal. Sobre este objeto se pueden ejercer acciones para operar sobre la transformación lineal para encontrar composiciones o para determinar propiedades de las transformaciones lineales, así como sus representaciones geométricas, que darán lugar a la evolución del objeto que fue construído.

Pregunta del cuestionario sobre Transformación lineal

Determine la matriz asociada a la Transformación lineal definida en $P_2[x]$ (polinomios de grado menor o igual dos, incluyendo el polinomio nulo) a R^3, por:

$$T(ax^2 + bx + c) = (a + c, a - b, b)$$

en las bases $B_4 = \{x^2,\ x^2 + x,\ x^2 + x + 1\}$ y $B_5 = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ de $P_2[x]$ y R^3 respectivamente.

En la respuesta del estudiante I9, Figura 6, se parecía la aplicación de un procedimiento para determinar la matriz asociada al operador lineal. Evidenciando una concepción proceso de combinación lineal.

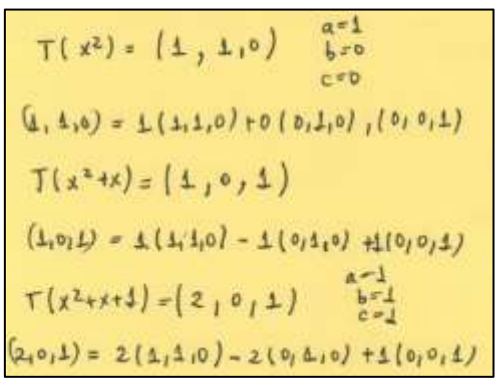


Figura 6. Respuesta del estudiante I9 que evidencia una construcción proceso.

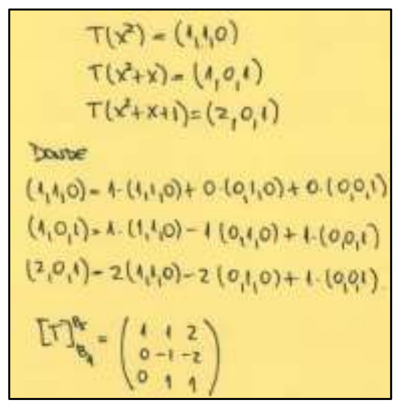


Figura 7. Estudiante I9 aplica procedimiento para obtener la matriz asociada a la transformación lineal.

Al igual que el estudiante anterior P7, I9 aplica correctamente el procedimiento para obtener la matriz asociada al operador lineal (MATL), Figura 7. Pone en evidencia una concepción proceso de transformación lineal. Además manifiesta una concepción objeto de transformación lineal a nivel intra.

A modo de conclusión

Los resultados que han mostrado los estudiantes se han interpretado como matices de la tematización de los conceptos básicos del AL, en el concepto espacio vectorial, combinación lineal y transformación lineal, y se presentan en la Tabla 1.

Esquema Intra-AL	***Esquema Inter AL***	***Esquema Trans AL***
El cero vector es la n-upla cero. ***Proceso***	*El cero vector no necesariamente es el n-upla..* ***Objeto***	*Reconoce que el cero vector es el elemento neutro de un grupo abeliano* ***Objeto***
Para chequear si dos vectores de son Li/Ld se iguala la Combinación Lineal a cero vector. ***Proceso***	*Para chequear si dos vectores son Li/Ld se iguala la Combinación Lineal al neutro de la operación suma.* ***Objeto***	*Construye ejemplos de espacios vectoriales que satisfacen condiciones dadas, haciendo uso de la estructura subyacente.* ***Objeto***
Las operaciones suma y multiplicación por escalar son consideradas las usuales. ***Proceso***	*Las operaciones suma y multiplicación por escalar no siempre son las usuales.* ***Objeto***	*Las operaciones suma y multiplicación por escalar no siempre son las usuales.* ***Objeto***
Concepto de EV real como **Objeto**	*Concepto de EV real como* **Esquema**	*Concepto de EV sobre un cuerpo como* **Objeto**
Concepto de función como **Proceso**	*Concepto de función como* **Objeto**	*Concepto de función como* **Objeto**
Concepto de CL como **Proceso**	*Concepto de CL como* **Objeto**	*Concepto de CL como* **Objeto**
Concepto de MATL como ***Proceso***	*Concepto de MATL como* ***Objeto***	*Concepto de MATL como* ***Objeto***
Concepto de vector como ***Objeto***	*Concepto de vector como* ***Objeto***	*Concepto de vector como* ***Objeto***

Reconocimientos

Este trabajo ha sido subvencionado parcialmente por el proyecto Fondecyt 1140801. Los autores agradecen la buena disposición a los participantes en la investigación.

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education.* New York: Springer.

Dorier, J. L. (2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces, in Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 3-81), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Piaget, J. y García, R. (1983, 1989). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Madrid: Siglo XXI.

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.