ESPACIO DE TRABAJO GEOMÉTRICO-ETG: EXPLORANDO EL GEOPLANO OCTODODECÁGONO EN EL GEOGEBRA

José Carlos Pinto Leivas
Centro Universitário Franciscano de Santa Maria, Brasil
leivasjc@unifra.br

Resumen

O objetivo é criar um Espaço de Trabalho Geométrico – ETG que, segundo seu criador, é um ambiente organizado para permitir o trabalho de pessoas resolvendo problemas geométricos. Utilizamos ferramentas do GeoGebra na resolução do problema de construção do geoplano octododecágono neste ambiente virtual, partindo do registro em língua natural, fazendo conversão para o registro figural, o que diferencia a proposta daquela em que são feitos em madeira e pregos e usam bandas elásticas. Na construção desse artefato, com o sistema teórico de referência visualização, buscaremos relações em construções geométricas, fato importante para o convencimento em uma demonstração rigorosa.

Introdução

Consideramos que um trabalho geométrico pode ser originado a partir de um aspecto importante da Matemática, o qual deve envolver o professor e seus alunos. Dessa forma, propomos um taller, no qual levaremos em conta a definição dada por Kuzniak (2011) de que *Espaço de Trabalho Geométrico-ETG* é um ambiente organizado para permitir o trabalho de pessoas resolvendo problemas geométricos. Para o autor, tal espaço envolve três componentes:

1- um espaço real e local em uma instituição, o qual serve de suporte material para a resolução de problemas;
2- um conjunto de artefatos para as representações realizadas pelos estudantes;
3- um sistema teórico de referência baseado em visualização.

No que diz respeito ao primeiro, entendemos que realizar um taller em um evento de cunho nacional e internacional, utilizando recursos manipuláveis, por meio de computadores, na realização de atividades geométricas, atende ao quesito; empregar as ferramentas de desenho no software Geogebra para a busca de relações adequadas atende ao que o autor recomenda como segundo ponto e, como terceiro, a utilização de visualização como sistema de referência completa o ETG.

Para Kuzniak (2011), as três componentes devem ser organizadas com um propósito bem determinado; o qual vai depender do domínio matemático, na sua dimensão epistemológica; ao que o autor denomina nível epistemológico. Esse paradigma de consenso, em determinado grupo, permite formular problemas e organizar suas soluções para elaborar formas de pensar ao que ele denomina ETG de referência. Tal ETG, que nos propomos criar e desenvolver, irá identificar os modos de fazer e ver determinadas construções geométricas por meio de Geometria Dinâmica, especialmente no tratamento utilizado e nas representações. Com isto, será possível identificar os aspectos teóricos matemáticos relacionados. Nesse sentido, podemos intuir que, no Brasil, talvez em outros países também, isso não seja muito levado em conta no ensino e na aprendizagem em Geometria.

Um segundo nível do ETG consiste na articulação cognitiva de suas componentes e isso nos leva a considerar o processo de visualização que se faz essencial em Geometria. Zimmermann e Cunningham (1991, p. 3) definem visualização matemática como o *processo de formação de imagens (mentalmente, ou com papel e lápis, ou com o auxílio de tecnologia) e utilização dessas imagens para descobrir e compreender matemática*. Por sua vez, Cifuentes (2005, p. 58) considera que *visualizar é ser capaz de formular imagens mentais e está no início de todo o processo de abstração*.

Guzmán (1997, p. 16) define visualização em Matemática como *essa forma de atuar com atenção explícita às possíveis representações*, ao se referir ao conhecimento que todo especialista deve ter da utilidade de manejar com objetos abstratos de origem concreta.

A partir dessas considerações introdutórias passamos a alguns fundamentos teóricos que nortearão o taller.

Fundamentação teórica

No que segue apresentaremos alguns aspectos teóricos e resultados de pesquisas existentes na literatura e que fundamentam o taller.

De acordo com Kusniak (2011), uma das ênfases atribuídas às atividades dos estudantes está em considerar o trabalho realizado por eles na escola junto aos professores; também aqueles realizados em casa e a avaliação em um contexto social. Por outro lado, é importante assegurar que, de fato, o trabalho seja de natureza matemática e realizado pelos estudantes, o que condiz com a proposta de realização de taller, especialmente na resolução de problemas, metodologia apontada como importante pelo autor num ETG.

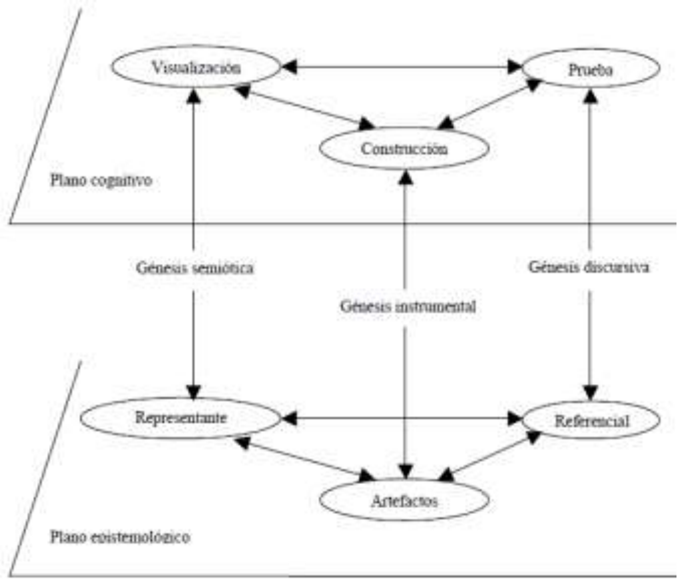
A respeito desta natureza, salientamos o indicado por Hadamard (2009) sobre imagens mentais no pensamento visual: *O pensamento pode ser acompanhado de representações concretas que são diferentes das palavras. Aristóteles admitia que não podemos pensar sem imagens.* (p. 89). Nessa linha de pensamento, criar um espaço em que os indivíduos possam produzir representações geométricas de objetos matemáticos reais, na resolução de problemas bem definidos, vai ao encontro do que foi definido no segundo item da introdução a respeito do que seja um ETG.

Entendemos que Geometria é um campo do conhecimento matemático que apresenta propriedades que os indivíduos necessitam se apropriar de modo a fazer seu uso na prática disciplinar e, por isso, em um ETG, é necessário uma articulação cognitiva efetiva. Nesse sentido, buscamos o apoio em Duval (2004), para quem a atividade matemática nos cursos de Geometria se baseia em dois tipos de registros: o das figuras e o da língua materna, os quais necessitam de uma coordenação no tratamento dos dois. Para o autor, as figuras correspondem a importante suporte intuitivo nas atividades geométricas e favorecem a antecipação na resolução de problemas ou na busca de demonstrações.

No que diz respeito à aprendizagem do que seja uma demonstração, o autor afirma ser a compreensão das definições, o que conduz à análise epistemológica do problema e, num segundo momento, à relação entre definição e intuição na constituição do conhecimento matemático. Em Geometria, cabe averiguar como a intuição das figuras geométricas e da representação do espaço influenciam no acesso cognitivo de um enunciado de uma proposição. Segundo Duval (1995, apud Kuzniak, 2011), é necessário adaptar três processos cognitivos implicados:

-um processo de visualização em relação à representação do espaço e apoio material;
-um processo de construção determinado pelos instrumentos utilizados (réguas, compassos, etc.) e configurações geométricas;
-um processo discursivo que produz argumentos e provas.

Figura 1. Espaço de trabalho geométrico e sua gênese.



Fonte: Kuzniak (2011).

No que segue, apresentamos algumas considerações sobre o plano cognitivo, no que diz respeito à visualização.

Sobre visualização

Considerando a figura 1, um *representante* deve estar relacionado a um *signo* na teoria dos Registros de Representações Semiótica de Duval, o qual tem a ver com o objeto matemático envolvido e o signo remete, por ícones, índices ou símbolos, a um processo semiótico denominado *visualização*. De acordo com Montoya (2015) a articulação entre representante e visualização constitui a *gênese semiótica*, a qual leva em consideração a operação de *conversão* de um sistema semiótico a outro e os tratamentos internos a cada um dos registros.

Um ponto de interesse é que a visualização é uma questão um tanto quanto individual, porém, imagens visuais são utilizadas numa gama enorme de atividades matemáticas, como por exemplo: imagens dinâmicas, pictóricas, concretas, mentais, etc. Visualização, em situações didáticas, especialmente em Geometria, constitui uma fonte de pesquisa interessante, pois auxilia o estudante na resolução de tarefas, algumas vezes, enunciadas apenas em linguagem natural. Entretanto, a passagem para a linguagem visual, por exemplo, nas representações em um software de Geometria Dinâmica, permite interpretação e resolução do problema, de forma menos difícil após o construto mental das informações fornecidas.

Neste sentido, no presente taller, utilizaremos a definição dada por Arcavi (1999, p. 217):

> visualização é a habilidade, o processo e o produto de criação, interpretação, uso e comentário sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, em papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de desenhar e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver ideias não conhecidas e avançar na compreensão.

Nessa linha de conceber o conceito como processo, entendemos visualização como um processo de construção mental e, no presente trabalho, com a aquisição da habilidade via um software de Geometria Dinâmica, afirmada nos autores acima citados.

Sobre geometria dinámica

Demonstrações em Matemática se caracterizam pelo rigor do método dedutivo, o que nem sempre satisfaz aos estudantes que não percebem o encadeamento lógico necessário para chegar ao final da demonstração de um teorema. Isso se torna mais evidente na área de Geometria, que é rica em sentenças a serem demonstradas, nas quais a metodologia empregada não privilegia a intuição e a redescoberta.

Villiers (2003) descreve, a partir de sua prática profissional de matemático envolvido com demonstrações rigorosas, seu encontro/descoberta do uso da Geometria Dinâmica nesse processo. Afirma o autor: *O matemático, no seu trabalho, faz vagas suposições, imagina amplas generalizações e adianta conclusões injustificadas. Arruma e volta a arrumar as suas ideias e acaba por ficar* ***convencido*** *da sua veracidade muito antes de conseguir passar para o papel uma demonstração lógica.* (p. 11). Para ele, os matemáticos não discutem e nem refletem sobre os processos de descoberta ou invenção e demonstração e, embora estejam convictos do teor de uma publicação, essa convicção é pessoal e depende de uma combinação entre intuição, verificação quase empírica e existência de alguma forma de demonstração lógica.

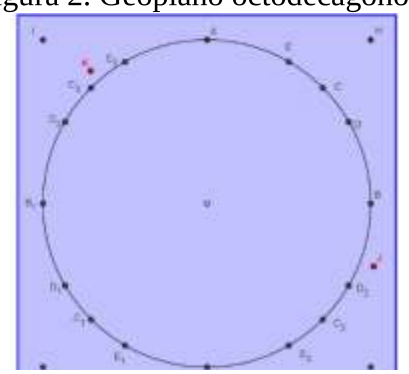
Ao utilizar softwares de Geometria Dinâmica em suas experiências com processos dedutivos, o autor afirma: *A minha experiência diz-me que quanto mais convencido eu estiver de um resultado, mais motivado fico para descobrir o porquê da sua veracidade*. (p.40). É nesse sentido que ele afirma que os softwares de Geometria Dinâmica, em uma demonstração, proporcionam: verificação, explicação, comunicação, descoberta e sistematização.

Nossa opção para trabalhar o artefato geoplano octododecágono, utilizando o software de Geometria Dinâmica GeoGebra, vai nesse sentido, de modo a que os participantes do taller possam adquirir algumas habilidades que lhes permitam aplicar no ensino de Geometria na escola e, até mesmo, na formação de professores de Matemática.

O taller

O geoplano é um recurso didático utilizado em aulas de Geometria em diversos níveis de escolaridade e consiste, usualmente, de um tabuleiro quadrado [representando parte do plano euclidiano] no qual são inseridos pregos [representando pontos] e se utiliza atilhos de borracha para unir dois pregos [representando os segmentos de reta]. Existem geoplanos de diversos formatos e com número de pregos distintos com fins didáticos variados. Para o taller iremos utilizar um geoplano diferente da maioria dos usuais e pouco explorado no Brasil, sugerido por Sabatello (1967), denominado octododecágono.

Figura 2. Geoplano octodecágono



Fonte: Adaptado de Sabatello (1967) pelo autor, no GeoGebra.

Geoplanos, como recursos didáticos, surgiram com o matemático egípcio Caleb Gattegno (1911-1988). Eles podem ser utilizados em atividades didáticas tanto em Geometria, quanto em Aritmética, por exemplo, no estudo de frações e se constituem de meio no desenvolvimento de construtos mentais (visualização) para a obtenção de abstração, tão essencial para a geometria plana, fruto da mente humana.

De acordo com Sabatello (1967, p.20), *el geoplano es un modelo matemático que permite traducir o sugerir ideas matemáticas; en un sentido más exacto constituye un suporte concreto a la representación mental, un recurso que lleva a la realidad ideas abstractas*. Um diferencial que consideramos para a proposta de taller está no fato de construir e utilizá-lo no software GeoGebra. Iniciaremos a partir da resolução de um problema, adaptado dessa autora, ou seja, como interpretá-lo a partir do registro em língua materna e traduzi-lo para o registro figural. A partir dessa construção e representação realizaremos as atividades especificadas.

Atividade 1

Objetivo: Interpretar o problema dado no registro em língua materna e resolvê-lo utilizando as ferramentas do GeoGebra, ou seja, em registro figural.

Numa região quadriculada 30 x 30 inserir 22 pontos ou pregos. Com o centro no centro do tabuleiro, construir uma circunferência de diâmetro 26 cm. Considere um diâmetro vertical (como se fosse o eixo dos yy) e, na extremidade superior, demarque um ponto A e na inferior A_1; um diâmetro horizontal (como se fosse o eixo dos xx) e, na extremidade a direita, demarque um ponto B e na esquerda B_1. O ponto C corresponde ao ponto médio do arco AB e C_1 seu simétrico em relação ao centro da circunferência. Os pontos E e D correspondem aos terços do arco AB, enquanto E_1 e D_1 os respectivos simétricos em relação à origem. Os pontos F, G, H e I são exteriores à circunferência e correspondem aos vértices de um quadrado circunscrito à mesma e permitem a construção de tangentes cujos pontos de tangencia são A, A_1, B e B_1. O ponto C_2, D_2, E_2 são os simétricos dos pontos C, D, E em relação ao diâmetro horizontal BB_1 enquanto que os ponto C_3, D_3, E_3 são os simétricos dos pontos C, D, E em relação ao diâmetro vertical AA_1. Os pontos J e K também são exteriores à circunferência e estão situados de tal maneira que permitem a construção de uma secante que não passe pelo centro da circunferência. O ponto J dista 8 cm do ponto G e 2,5 cm de L. O ponto K dista 4,5 cm do I e 4,5 cm do M.

Primeira etapa

Construir uma região quadrada de 30x30 cm, colocando a fronteira numa espessura em cor mais acentuada do que a região interior, ambas em azul (figura 3). Nessa etapa serão exploradas as ferramentas polígono regular e propriedades.

Figura 3. Região quadrada e fronteira

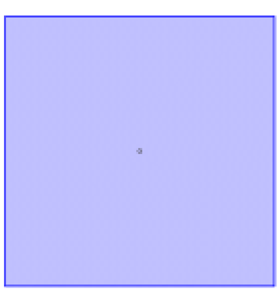
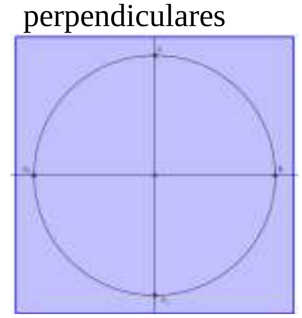


Figura 4. Pontos e eixos perpendiculares



Segunda etapa

Construir circunferência dado centro e raio; os quatro primeiros pontos A, A_1,B e B_1 (figura 4). Aqui se exploram as ferramentas circunferência, ponto médio, perpendicularismo e paralelismo, intersecção, renomear, dentre outras.

Terceira etapa

Construir os pontos C, C_1, D, D_1, E e E_1 (figura 5).

Nessa etapa são exploradas as ferramentas, bissetriz, circunferências, interseção, simetria central, além de propriedades de colorir, exibir rótulo, exibir objeto e outros.

Figura 5. Pontos e simetria central

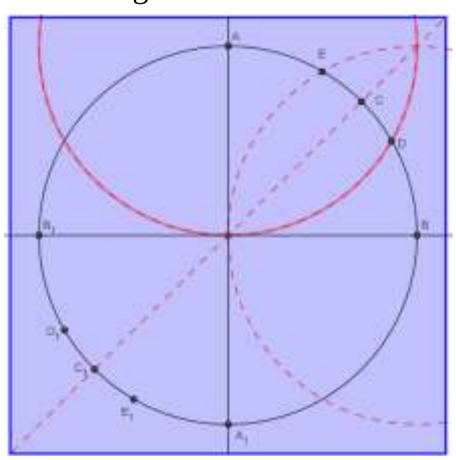
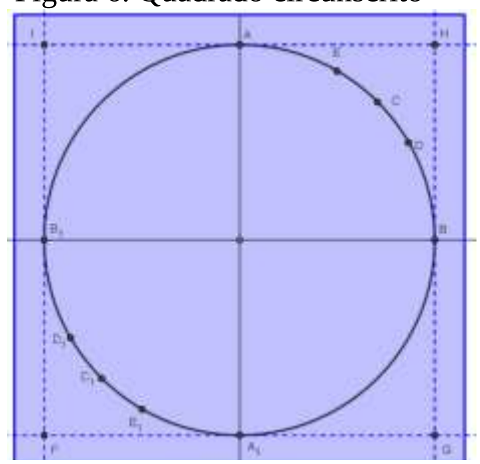


Figura 6. Quadrado circunscrito



Observamos na figura 5 a obtenção do ponto médio do arco AB e dos terços médios do mesmo arco, empregando, fundamentalmente as ferramentas circunferência dados centro e raio e bissetriz de um ângulo reto.

Quarta etapa

Obtenção de um quadrado circunscrito à circunferência; determinação e nomeação dos vértices desse quadrado (figura 6).

Nessa construção a principal ferramenta empregada é reta tangente, além de outras

Quinta etapa

Determinação dos pontos simétricos aos obtidos no primeiro quadrante da circunferência em relação aos eixos horizontal e vertical (figura 7)

Figura 7. Simetria cental

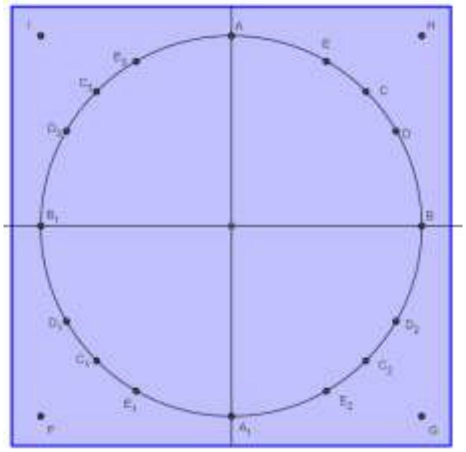
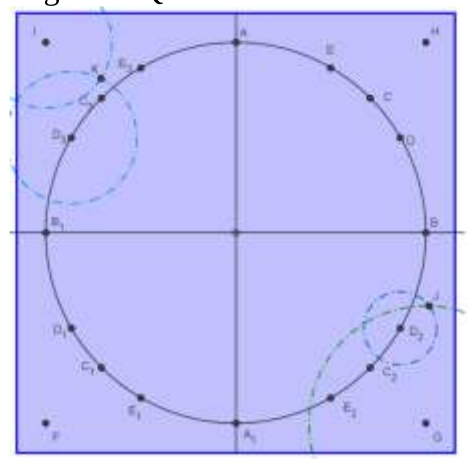


Figura 8. Quadrado circunscrito



A principal ferramenta empregada nesta etapa é a simetria axial para obtenção dos pontos simétricos de C, D, E em relação aos eixos AA_1 e BB_1

Sexta etapa

Obtenção dos pontos que ainda não foram determinados, a saber J e K (figura 8).

A figura ilustra o processo de determinação dos dois pontos que completam o artefacto geoplano octododecágono. A ferramenta principal utilizada é circunferência dado o centro e o raio, além de interseção de objetos.

A sequência apresentada indica a grande abrangência das ferramentas do GeoGebra na resolução do problema, bem como a variedade de conteúdos geométricos envolvidos, por exemplo: polígono, circunferência, arco e ângulo, ponto médio, paralelelismo, perpendicularismo, bissetriz,, mediatriz, simetria puntual e axial, dentre outros. Assim, acreditamos que por si só, esta atividade já constitui o artefacto que, juntamente com a fundamentação teórica, ou seja, o nível epistemológico envolvido, cria um ETG. No que segue apresentamos outras atividades que poderão ser realizadas neste espaço.

Atividade 2

Objetivo: utilizar o artefacto geoplano octododecágono na visualização e argumentação sobre o teorema: o ângulo inscrito em uma circunferência tem por medida a metade da medida do arco de circunferência limitado pelos lados do ângulo.

Atividade 3

Objetivo: estabelecer relação entre áreas de figuras obtidas por decomposição de outra.
Construir um octógono regular inscrito no geoplano e fazer decomposições do mesmo em seis triângulos equiláteros e três isósceles congruentes; seis isósceles congruentes; três

rombos congruentes; doze triângulos retângulos congruentes e dois trapézios congruentes. A partir desta construção, relacionar as respectivas áreas.

Figura	Área de cada um	Área total
Seis triângulo equiláteros		
Três Triângulos isósceles		
Seis triângulos isósceles		
Três rombos		
Doze triângulos retângulos		
Dois trapézios		

Referências bibliográficas

Arcavi, A. (1999). The role of visual representation in the learning of mathematics. In: *North American Chapter Of The Pme*. NJ: Bookwarms….

Cifuentes, J.C. (2005). Uma via estética de acesso ao conhecimento matemático. *Boletim GEPEM, Rio de Janeiro, n. 46*, p. 55-72.

Duval. , R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle, Colombia.

Guzmán, M. (1997). *El rincón de la pizarra, ensayos de visualização en análisis matemática: elementos básicos del análise*. Madrid: Pirámide.

Hadamard (2009). *Psicologia da invenção na matemática*. Rio de Janeiro: Contraponto.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses génèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, v. 16, p. 9-24. IREM de STRASBOURG.

Montoya, E.D.; Rivas, C. H. (2015). Espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula. In: *Enseñanza de las ciencias, 33.2,* pp. 51-70.

Sabbatiello, E.E. (1967). *El geoplano: un recurso didáctico para la enseñanza dinámica de la geometría plana elemental. Su aplicación y utilización en la escuela primaria.* Buenos Aires: Ediciones G.A.D.Y.P.

Villiers M. de. (2003). O papel da demonstração em Geometria realizada em computador: algumas reflexões pessoais. In: *Geometria Dinâmica: seleção de textos do livro Geometry Turned On!* (James R. King e Doris Schattschneider (ed.). T pp. 31-43.

Zimmermann W.; Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics: a project sponsored by the Committee on Computers in Mathematics Education of The Mathematical Association of America*. Washington, USA: Mathematical Association of America.