# *ANÁLISIS DE LAS PRAXEOLOGÍAS EN TORNO A LAS MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES PROPUESTAS EN UN LIBRO DE TEXTO*

***Diana Cecilia Pozas, Marlene Alves Días***
UNCo. Argentina. UNIBAN. Brasil
dpozas@hotmail.com, alvesdías@ig.com.br

## Resumen

En el marco de un proyecto de investigación analizamos cómo se caracteriza el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, las matrices y los determinantes, en un libro destinado a un curso introductorio de álgebra lineal. El análisis toma elementos teóricos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard y Bosch; la noción de cuadro de Douady y los niveles de conocimiento que se esperan de los alumnos, de acuerdo con Robert. Se presenta y se aplica el instrumento de análisis a un ejemplo concreto.

## Introducción

Esta comunicación se enmarca en un trabajo de investigación en curso referido a la búsqueda de comprensión de las dificultades que enfrentan los docentes y estudiantes universitarios en relación con la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra Lineal. Para abordar este problema elegimos focalizar en la teoría específica de los sistemas de ecuaciones lineales en $R^n$, de las matrices y de los determinantes. En principio, analizamos cómo se propone estudiar estas teorías en los libros más utilizados en carreras de ingeniería de las universidades públicas argentinas. Consideramos que al interior del aula universitaria, los libros pueden utilizarse sólo como fuente de información complementaria hasta convertirse en el esquema conceptual de la clase. De manera que siempre participan de una u otra forma en el proceso de enseñanza y de aprendizaje y es por ello que han sido objetos de múltiples investigaciones educativas bajo diversos paradigmas teóricos.

Uno de los objetivos generales de nuestra investigación consiste en describir y analizar las Organizaciones o Praxeologias Matemáticas relativas a la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales en $R^n$, matrices y determinantes presentes en libros de textos universitarios utilizados en carreras de Ingeniería de las universidades públicas argentinas.

En este trabajo particularmente se analiza el libro de David Poole (2011): Álgebra lineal. Una introducción moderna. El análisis toma elementos teóricos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1997, 1999, 2001, 2007); las nociones de cuadro, herramienta y objeto (Douady, 1984, 1992) y los niveles de conocimiento que se esperan de los alumnos (Robert, 1998).

## Referencial teórico

Adoptamos como referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). La TAD integra el saber matemático y la actividad matemática productora y usuaria de este saber en términos de praxeologías matemáticas u organizaciones matemáticas. Una organización matemática es una entidad compuesta por: tipos de problemas; tipos de técnicas que permiten resolver los tipos de problemas; tecnologías o discursos que describen y explican las técnicas; una teoría que fundamenta y organiza los discursos tecnológicos. Los tipos de tareas y los tipos de técnicas constituyen el "saber-hacer" matemático, mientras que los discursos tecnológicos y teóricos conformarían el "saber" matemático propiamente dicho.

En el enfoque antropológico se concibe la noción de estudio en un sentido muy general e integrador. Se aplica a un ámbito más amplio que el del aula e, incluso, más general que el de las propias instituciones didácticas, abarcando desde la actividad de los investigadores hasta la que realizan los alumnos. La consideración de diversos procesos de estudio permite detectar aspectos invariantes presentes en todos ellos. La TAD propone aquí un modelo del proceso de estudio de las matemáticas en términos de momentos didácticos (Chevallard et al, 1997; Chevallard, 1999, 2001). Brevemente, diremos que se distinguen seis momentos didácticos: 1) el momento del primer encuentro con un determinado tipo de tareas; 2) el momento exploratorio del tipo de tareas; 3) el momento de construcción de un entorno tecnológico-teórico; 4) el momento del trabajo de la técnica; 5) el momento de la institucionalización, y 6) el momento de la evaluación.

Bosch y Chevallard (1999) enfatizan el hecho de que los conceptos matemáticos no son directamente accesibles a nuestros sentidos, son objetos "no ostensivos". Los no ostensivos son entonces todos aquellos objetos que existen institucionalmente, en el sentido en que se les atribuye una determinada existencia, pero que no se pueden percibir ni mostrar por sí mismos: las ideas, los conceptos, las creencias, etc. En una determinada actividad matemática, trabajamos con éstos a través de las representaciones ostensivas apropiadas. Los objetos ostensivos se perciben porque están dotados de cierta materialidad, como las escrituras, los grafismos, los sonidos, los gestos. El enfoque antropológico atribuye a los objetos ostensivos un valor semiótico (los signos), y un valor instrumental ligado a la capacidad para integrarse en manipulaciones técnicas, tecnológicas y teóricas. Los objetos ostensivos se consideran constitutivos de las organizaciones matemáticas e ingredientes primarios de las tareas, técnicas, tecnologías y teorías (Bosch, 2000).

Otro elemento teórico que tomamos para nuestro análisis es la noción de "cuadro". Douady (1992) define que un cuadro está constituido por: objetos de una rama de las matemáticas, las relaciones entre dichos objetos, sus diversas formulaciones y las imágenes mentales posiblemente asociadas a esos objetos y a esas relaciones. Estos elementos juegan un rol esencial como herramientas dentro del funcionamiento del cuadro. Además es importante mencionar que esta definición permite transponer el trabajo del matemático al dominio de la didáctica por medio de la noción "cambio de cuadro", esto es, obtener diferentes formulaciones de un problema que permiten la puesta en marcha de herramientas y técnicas, que no es posible realizar dentro de la primera formulación. Para esta investigación diremos brevemente que consideramos cuatro cuadros: sistemas lineales, matrices, determinantes y geometría euclideana.

Para complementar el análisis de los tipos de tareas que se proponen en un libro de texto a los estudiantes utilizamos algunas nociones teóricas de Robert (1997) relativas a los niveles de conocimiento esperados de los estudiantes. Los niveles de conocimiento esperados en relación al desempeño del estudiante se identifican como: Técnicos, Movilizables y Disponibles.

Nivel técnico: en la resolución de una tarea, un estudiante opera a nivel técnico cuando realiza un trabajo acotado y aislado. Este trabajo generalmente se caracteriza por la utilización de una sola técnica o por la aplicación de una definición, propiedad o teorema. El estudiante encuentra explícitamente en el enunciado de la tarea todos los elementos necesarios para su realización.

Nivel movilizante: el estudiante comienza a relacionar y a organizar saberes dentro de un mismo dominio, incluso puede aplicar varias técnicas en la resolución de la tarea, movilizando conocimientos que están explícitos en el enunciado, o que pueden ser sugeridos por el docente. En cualquiera de los dos casos, el estudiante se apropia de esas herramientas y las utiliza correctamente en la resolución de la tarea.

Nivel disponible: el estudiante es capaz de resolver una tarea sin indicaciones, pone en juego conocimientos que no están explícitos en el enunciado. Por ejemplo: cambiar de cuadro, utilizar ostensivos adecuados, articular diferentes nociones matemáticas, buscar contraejemplos. A este nivel de conocimiento generalmente se asocian problemas enunciados en el contexto de la vida cotidiana o aplicaciones a otras ciencias, por ejemplo, la física. Pero también hay problemas, sobre todo en el nivel superior, de interés intra-matemático que el estudiante debe poder abordar con autonomía para avanzar en su formación matemática.

También es importante destacar que no hay una jerarquía absoluta entre los niveles de conocimiento sino que, al menos en la enseñanza, dependen de los objetivos del docente.

**Metodología**

Se realizó un estudio cualitativo, de tipo descriptivo e interpretativo, desarrollado en tres etapas:

1. Relevamiento de los programas de cátedra de todas las universidades públicas argentinas que dictan carreras de ingeniería. Registro de la bibliografía utilizada en los cursos de álgebra y geometría.
2. Elaboración de un instrumento de análisis, tomando como modelo el diseñado por Días (1998).
3. Identificación de las tareas más privilegiadas según el libro seleccionado y análisis de las mismas, aplicando el instrumento elaborado.

En relación al primer punto diremos brevemente que los libros más utilizados son:

- Poole David. Álgebra lineal. Una introducción moderna. Tercera edición. Cengage Learning Editores: México DF. 2011.
- Anton Howard. Introducción al álgebra lineal. Limusa: México. 1983.
- Burgos Juan de. Álgebra lineal. McGraw-Hill: Madrid. 1993.
- Grossman Stanley. Álgebra lineal. McGraw-Hill. México DF. 1991.
- Hernández Eugenio. Álgebra y geometría. Adisson-Wesley: Madrid. 1994.
- Hoffman Kennet & Kunze Ray. Álgebra lineal. Prentice Hall: Bogotá. 1973.
- Rojo Armando. Álgebra I y II. Editoral El Ateneo: Buenos Aires. 1985.

En relación al segundo punto, elegimos los siguientes elementos teóricos para construir el instrumento de análisis:

Momento didáctico en que puede ser ubicada la tarea: 1) primer encuentro 2) momento exploratorio 3) construcción de un entorno tecnológico-teórico 4) trabajo de la técnica 5) institucionalización 6) evaluación.
Cuadro en que la tarea es enunciada: 1) cuadro de los sistemas lineales 2) de las matrices 3) de los determinantes 4) de la geometría euclideana.

Cuadro en que la tarea es resuelta (Idem punto anterior)
No ostensivos utilizados en la tarea
Ostensivos utilizados en la tarea
Nivel de conocimiento esperado: 1) técnico 2) movilizante 3) disponible

En relación al tercer punto, hemos seleccionado para presentar en este trabajo el libro titulado: Álgebra lineal. Una introducción moderna, de David Poole.

Este libro está dirigido principalmente a los alumnos de diversas carreras, especialmente adecuado para un curso introductorio de Álgebra Lineal. La propuesta de esta obra en palabras del autor es: *"Quiero que los alumnos vean al álgebra lineal como una materia excitante y que aprecien su tremenda utilidad. Al mismo tiempo, quiero ayudarles a dominar los conceptos y técnicas básicas del álgebra lineal que necesitarán en otros cursos, tanto en matemáticas como en otras disciplinas. También quiero que los alumnos aprecien la interacción de las matemáticas teóricas, aplicadas y numéricas que impregna la materia."*

En principio fueron detectadas más de 60 tareas sólo para los capítulos que tratan los conceptos de sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes. Esto requirió un reordenamiento de los datos a fin de posibilitar la aplicación de la grilla de análisis a un número representativo de ejemplos. En este sentido, recurrimos nuevamente a los aportes teóricos de la TAD. Chevallard (1999) propone la noción *género de tareas*, la cual engloba diferentes tipos de tarea. La noción *tipo de tarea* supone un objeto relativamente preciso.

Por ejemplo, calcular el valor (exacto) de una expresión numérica que contiene un radical es un tipo de tarea, pero calcular es lo que se denomina un género de tareas.

Siguiendo este orden de ideas, hemos detectado 7 géneros de tareas que caracterizamos a continuación:

Figura 1: Género de tarea - Tipos de tarea – Porcentaje

| **Género de tareas** | **Tipos de tarea (algunos ejemplos)** | **%** |
|---|---|---|
| 1.Verificar: *comprobar la veracidad o no de una aserción en un caso particular* | Verificar si un vector es solución de un sistema | 6 |
| | Verificar que, en general, el producto de matrices no es conmutativo | |
| | | |
| 2.Reconocer: *determinar por inspección si una expresión matemática cumple o no con determinados requisitos* | Distinguir matrices escalonadas y matrices reducidas por renglones | 4 |
| | Reconocer si una operación con renglones es una operación elemental | |
| | | |
| 3.Demostrar: *escribir una secuencia de enunciados organizados según reglas predeterminadas para establecer la veracidad de una proposición* | Usar inducción matemática para probar resultados matriciales | 14 |
| | Completar demostraciones de teoremas | |
| | Hallar contraejemplos para proposiciones falsas relativas a las operaciones con matrices | |
| | Demostrar propiedades relativas a rectas y planos usando determinantes | |
| | | |
| 4.Construir: *exhibir un objeto matemático que cumpla ciertas condiciones y que en general, no es único* | Encontrar un sistema de ecuaciones lineales cuya solución esté dada por ecuaciones paramétricas predeterminadas | 7 |
| | Proponer sistemas lineales que tengan (a) infinitas soluciones y (b) una única solución | |
| | Proponer tres planos que tengan una recta como intersección común | |
| | | |
| 5.Calcular: *llevar a cabo ciertos procedimientos basados en reglas que son tomadas como verdaderas para obtener* | Resolver un sistema lineal mediante el método de Gauss-Jordan | 60 |
| | Determinar el rango de una matriz | |
| | Resolver sistemas lineales con presencia de parámetros | |
| | Resolver sistemas de ecuaciones lineales aplicando el método de Jacobi y aplicando el método de Gauss-Seidel | |

| | | |
|---|---|---|
| *un resultado* | Escribir una matriz como combinación lineal de otras matrices | |
| | Resolver un sistema lineal usando la inversa de la matriz de coeficientes | |
| | Calcular determinantes usando expansión por cofactores | |
| | Calcular determinantes usando operaciones elementales | |
| | Resolver sistemas lineales usando la regla de Cramer | |
| | Calcular la inversa de una matriz usando el valor de su determinante y la matriz adjunta | |
| | Usando determinantes, hallar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados en $R^2$ | |
| | | |
| 6.Graficar: *realizar esquemas, figuras de análisis, tablas u otros grafismos* | Resolver un sistema lineal de 2x2 geométricamente | 3 |
| | Graficar sistemas de 2x2 para ilustrar el método de Gauss – Seidel | |
| | | |
| 7.Representar: *sustituir expresiones matemáticas por otras equivalentes* | Dado un sistema de ecuaciones lineales, escribir la matriz aumentada | 6 |
| | Dado un sistema de ecuaciones no lineales, convertirlo en un sistema lineal mediante un cambio de variables | |

Para mostrar la aplicación del instrumento de análisis elegimos un tipo de tarea del género calcular. Concretamente, analizaremos el ejercicio 6, página 138:

*Para el siguiente sistema de ecuaciones lineales:*

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 \qquad\qquad\qquad &= 1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad\quad &= 0 \\ -x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\ -x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

a) *Aplicar el método de Jacobi, tomando el vector cero como vector inicial y con una precisión de 4 dígitos significativos, es decir, hasta que dos iterados sucesivos concuerden dentro de 0,001 en cada variable.*
b) *Comparar la respuesta con la solución exacta que encuentre usando cualquier método directo a elección.*
c) *Repita el ejercicio usando el método de Gauss-Seidel.*
d) *Compare el número de iteraciones requeridas por ambos métodos para alcanzar la solución aproximada.*

Resolución

a) Método de Jacobi:

$x_1 = \frac{1+x_2}{3}$ ; $x_2 = \frac{x_1+x_3}{3}$; $x_3 = \frac{1+x_2+x_4}{3}$ ; $x_4 = \frac{1+x_3}{3}$

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | … | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0 | 0,3333 | 0,3333 | 0,4074 | 0,4197 | … | 0,4535 | 0,4541 |
| $x_2$ | 0 | 0 | 0,2222 | 0,2592 | 0,3209 | … | 0,3625 | 0,3627 |
| $x_3$ | 0 | 0,3333 | 0,4444 | 0,5555 | 0,5678 | … | 0,6347 | 0,6357 |
| $x_4$ | 0 | 0,3333 | 0,4444 | 0,4444 | 0,5185 | … | 0,5448 | 0,5449 |

b) Empleando el método de eliminación gaussiana obtenemos la siguiente solución exacta:
$x_1 = \frac{5}{11}$; $x_2 = \frac{4}{11}$; $x_3 = \frac{7}{11}$ ; $x_4 = \frac{6}{11}$

*Observación*: la matriz del sistema es estrictamente diagonal dominante. Por lo tanto, el sistema tiene una única solución y tanto el método de Jacobi como el de Gauss-Seidel convergen a dicha solución.

c) Método de Gauss-Seidel:

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | … | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0 | 0,3333 | 0,3333 | 0,4074 | 0,4362 | … | 0,4540 | 0,4543 |
| $x_2$ | 0 | 0 | 0,2222 | 0,3086 | 0,3470 | … | 0,3631 | 0,3634 |
| $x_3$ | 0 | 0,3333 | 0,5185 | 0,6049 | 0,6273 | … | 0,6360 | 0,6362 |
| $x_4$ | 0 | 0,3333 | 0,5061 | 0,5349 | 0,5424 | … | 0,5453 | 0,5454 |

d) El método de Jacobi requiere de 11 iteraciones para aproximarse a la solución, mientras que el método de Gauss-Seidel requiere de 8 iteraciones, es decir, éste último converge más rápidamente.

A continuación mostramos la aplicación del instrumento de análisis:

| | |
|---|---|
| Momento didáctico en que puede ser ubicada la tarea | Trabajo de la técnica |
| Cuadro en que la tarea es enunciada | Cuadro de los sistemas lineales |
| Cuadro en que la tarea es resuelta | Cuadro de los sistemas lineales y cuadro de las matrices |
| No ostensivos utilizados en la tarea | Método iterativo, convergencia, método de eliminación gaussiana, de Jacobi y de Gauss-Seidel |
| Ostensivos utilizados en la tarea | Tabla de doble entrada, representación matricial de un sistema |
| Nivel de conocimiento esperado | Movilizante |

Se trata de un tipo de tarea que no es usualmente trabajada con estudiantes de ingeniería. Tanto en el cuadro de los sistemas lineales, como en el de las matrices, el método de eliminación gaussiana es la técnica predominante. En este libro se exploran dos métodos iterativos que amplían el repertorio de técnicas para resolver sistemas lineales, y además, pueden detenerse siempre que la solución aproximada que generen sea suficientemente precisa.

El nivel de conocimiento que se espera del estudiante es movilizante. Los conocimientos que deberá movilizar están explícitos en el enunciado de la tarea, pero le cabe al estudiante utilizarlos en forma correcta invocando ostensivos y no ostensivos adecuados para responder a la tarea propuesta.

## Consideraciones finales

La organización en términos de tipos de tareas podría ayudar al profesor a escoger aquellas para proponer y discutir en clase y aquellas que pueden ser dejadas a cargo de los estudiantes, como así también decidir cuáles son los géneros mencionados más importantes para ser trabajados con estudiantes de ingeniería.

Por ejemplo, para los estudiantes de ingeniería brasileños, "demostrar" corresponde a un género de tarea poco interesante. Para los estudiantes de ingeniería argentinos ocurre lo mismo, al menos en los inicios de la carrera, y ciertamente pueden existir diversas opiniones al respecto. Es importante destacar que es el profesor quien decide que es lo más adecuado para sus estudiantes. Por lo tanto, un profesor que desee trabajar el género en cuestión podría elegir: "Hallar contraejemplos para proposiciones falsas relativas a las operaciones con matrices."

El referencial teórico escogido y el instrumento de análisis diseñado nos permitió identificar, ordenar y caracterizar las praxeologías en torno a las nociones de sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes que propone un determinado libro para un curso introductorio de álgebra lineal. Este estudio identifica los tipos de tareas que engloba el género calcular como el género privilegiado. En función de los objetivos del autor, este libro parece ser más indicado para cursos en que el álgebra es trabajada como herramienta explicita para o desarrollo de conceptos y nociones de otras ciencias.

Al inicio de este trabajo mencionamos que la enseñanza y el aprendizaje de conceptos básicos del álgebra lineal conllevan enormes dificultades. Consideramos que la reflexión en los términos que presentamos en este estudio ayuda a comprender mejor las propuestas didácticas que los autores plasman en sus obras, y por ende, cómo trabajarlas con estudiantes de carreras de ingeniería.

## Referencias bibliográficas

Bosch, M. (2000). Un punto de vista antropológico: la evolución de los "instrumentos derepresentación" en la actividad matemática. *IV Simposio SEIEM* Huelva.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l´activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques 19(1),* 77-124.

Chevallard, Y; Bosch, M. & Gascón, J. (1997) *Estudiar matemática. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: Horsori.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques. 19 (2)*, 221-266. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions. Traducción de Ricardo Barroso Campos. Universidad de Sevilla.

Chevallard, Y. (2001). *Organiser l'étude. 1 .Structures & Functions.* Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=52

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. En L. Ruiz- Higueras, A. Estepa & F. Javier García (Eds), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico* (pp. 705-746). Universidad de Jaén. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/rubrique.php3?id_rubrique=8

Dias, M.A. (1998). *Les problèmes d'articulation entre points de vue cartésien etparamétrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*. Paris: IREM Paris 7.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques*.Tesis de Doctorado, Université Dennis Diderot. Francia.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement.

*Repères IREM 6*, 132-158.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques 18(2),* 139-190.