A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DAS CONSTANTES TRIGONOMÉTRICAS – SENO, COSSENO E TANGENTE: UMA PROPOSTA DIDÁTICA COM A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA

Claudiomir Feustler Rodrigues de Siqueira, Ricardo Silva Ribeiro, Carina Loureiro Andrade
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, IFRS, Campus Canoas. Brasil
claudiomir.siqueira@canoas.ifrs.edu.br, ricardo.ribeiro@canoas.ifrs.edu.br, carina.andrade@canoas.ifrs.edu.br

Resumo

O presente trabalho consiste numa proposta didática para o ensino dos conceitos seno, cosseno e tangente, no ensino médio, a partir das relações trigonométricas no triângulo retângulo. Para isto é apresentada uma sequência de atividades em que é feita uma consideração histórica, um processo de construção do conceito das relações trigonométricas em um software livre de geometria dinâmica, o GeoGebra, e a aplicação dessas relações em uma situação problema envolvendo distâncias inacessíveis.

Introdução

Este trabalho aborda, utilizando como recurso didático o software GeoGebra, o ensino de relações trigonométricas no triângulo retângulo. E tem por objetivo significar as relações trigonométricas no triângulo retângulo, enquanto razões constantes envolvendo a medida dos lados do triângulo retângulo e relacionar o estudo destes conceitos com a resolução de situações problemas.

Em geral, o ensino das relações trigonométricas é abordado de forma extremamente teórica, com exercícios de fixação repetidos e com pouca ênfase na sua utilização em situações problemas. Dessa maneira, torna-se cansativo e pouco motivador o seu aprendizado. Para alterar esse quadro, temos nos aspectos históricos e na tecnologia uma possibilidade de tornar o ensino-aprendizagem deste conteúdo mais interessante e dinâmico. O que é reforçado por Gravina e Basso (2012, p.12) ao afirmarem que "nossas rotinas de sala de aula também deveriam incorporar, cada vez mais, as tecnologias, pois elas também influenciam nas nossas formas de pensar, de aprender, de produzir".

Nesse sentido, as atividades propostas, apoiam-se no uso do software GeoGebra, uma vez que este programa propicia o dinamismo necessário para que os alunos possam refletir, estabelecer hipóteses, e por fim construir seu conhecimento. E buscam motivar e incitar os participantes a refletirem sobre os resultados obtidos.

Aspectos históricos

Muitos livros didáticos iniciam o capítulo sobre trigonometria no triângulo retângulo com uma figura de um triângulo retângulo e a seguir apresentam as definições:

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}, \cos\alpha = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} \text{ e } tg\ \alpha = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente},$$

às vezes, outras relações e, na sequência uma lista de exercício.

Talvez, essa é a forma com que trigonometria chega (ou) na vida de muitas pessoas, mas nem sempre foi assim. Se retomarmos na história, veremos que em vários povos a trigonometria sempre foi uma atividade muito interessante e desafiadora. Os conhecimentos que chegaram aos nossos dias, destacam que o uso da trigonometria tinha como propósito a medição de distâncias, alturas, questões religiosas, calendário de plantio, construção de astrolábio, estudos de astronomia, etc.

Há registros do surgimento da trigonometria, no seu sentido literal "medidas do triângulo" tanto no Egito quanto na Babilônia, por volta do segundo ou terceiro milênio antes de Cristo. Mais tarde, o seu desenvolvimento é atribuído ao povo grego, que teve acesso ao relógio do sol (usado para determinar os solstícios e equinócio com base na projeção da sombra de uma vareta ao meio dia – a cotangente era relação utilizada), oriundo dos babilônios, instrumento que já era utilizado pelos egípcios antes de 1500 a.C. (Boyer & Merzbach, 2012). Os autores destacam que há evidências de que, por volta de 1.110 a.C, na China havia conhecimento sobre a definição das relações trigonométricas e do conceito de ângulo, bem como a forma medi-lo, mas não ficaram registro de como eram feitas essas aferições.

Thales, Pitágoras, Eratóstenes, Arquimedes, Hiparco, Ptolomeu, entre outros, desenvolveram muito essa área da matemática. Com a influência dos babilônios e pelas facilidades de cálculo, foi utilizado a base 60, a circunferência dividida em 360 partes e o uso de frações sexagesimais, o que permanece na atualidade. Mas para eles, tudo estava relacionado a cordas e aos ângulos centrais (Boyer & Merzbach, 2012).

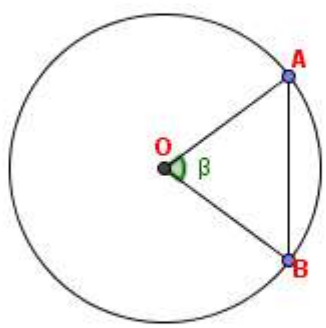

Figura 1. Trigonometria grega - corda e ângulo central

No entanto, os Hindus abriram novas perspectivas para a trigonometria, ao trabalharem com metade da corda e metade do ângulo central. E isso possibilitou a visão de um triângulo retângulo na circunferência (Boyer & Merzbach, 2012).

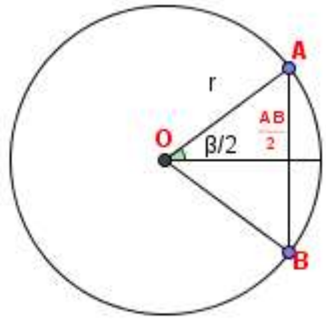

Figura 2. Jiva - Hindu

A relação entre a metade da corda a metade do ângulo central recebeu o nome de *jiva*. O qual era definido como sendo a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.

$$jiva\ de\ \frac{\beta}{2} = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{corda\ A\hat{O}B}{2r}$$

A ascensão árabe trouxe novas contribuições à trigonometria: a utilização de uma circunferência de raio unitário, tabelas de seno mais precisas e a elevaram com ciência própria, desvinculada da Astronomia. (Boyer & Merzbach, 2012). No entanto é a partir deles, que esse conhecimento vai para a Europa e que depois vai chegar até nós.

Uma questão desafiadora é saber *"Como que os Egípcios construíam uma pirâmide regular sem entortar?" (*Ou seja, *como manter a inclinação das faces, constante?)*

A resposta está nos problemas do Papiro de Ahmes, popularmente conhecido por Papiro de Rhind (aproximadamente 1650, a.C). Tem-se que isso devia-se ao *seqt*, razão constante entre o afastamento horizontal e a elevação lateral (Boyer & Merzbach, 2012). Essa razão pode ser observada na figura a seguir.

$$seqt = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$$

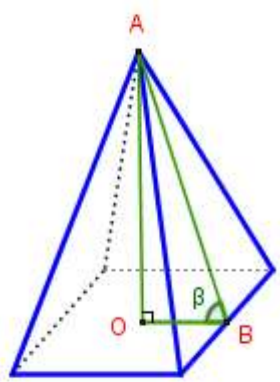

Figura 3. Seqt de uma pirâmide.

Hoje, equivale a calcular a *cotangente* do ângulo $O\hat{B}A$.

Outra questão, que talvez seja uma pergunta dos alunos e que nem sempre é respondida é "*Por que o nome seno, cosseno e tangente?*"

Por problemas de tradução. *Jiva* foi transcrito do hindu para o árabe, como *jiba*, onde era abreviada por *jb*. Aos ser traduzida para o latim foi interpretada como sendo *jaib* que significa "baía" ou "enseada" em árabe, cujo correspondente em latim é *sinus*. E que em português passou a ser seno. O que não tem nada a ver com seu significado matemático. A palavra *cosseno*, surgiu bem mais tarde, no século XVII, e significa o *seno* do complemento de um ângulo. E *tangente* do latim *tangens* o que toca do verbo *tangere* (tocar), terminologia utilizada pela primeira vez no século XVI (Boyer & Merzbach, 2012).

Potencialidades do uso de softwares de geometria dinâmica

Os softwares de geometria dinâmica possibilitam a construção de objetos geométricos de forma rápida e precisa, porém as suas potencialidades vão muito além disso. Estes programas permitem a movimentação das figuras geométricas respeitando suas propriedades de construção. Esse recurso, que é referido como *estabilidade sob ação do movimento*, "propicia explorações que provocam a concretização de ideias matemáticas*"* (Gravina, Barreto, Dias & Meier, 2012, p.39). Os autores ilustram essa característica com um exemplo.

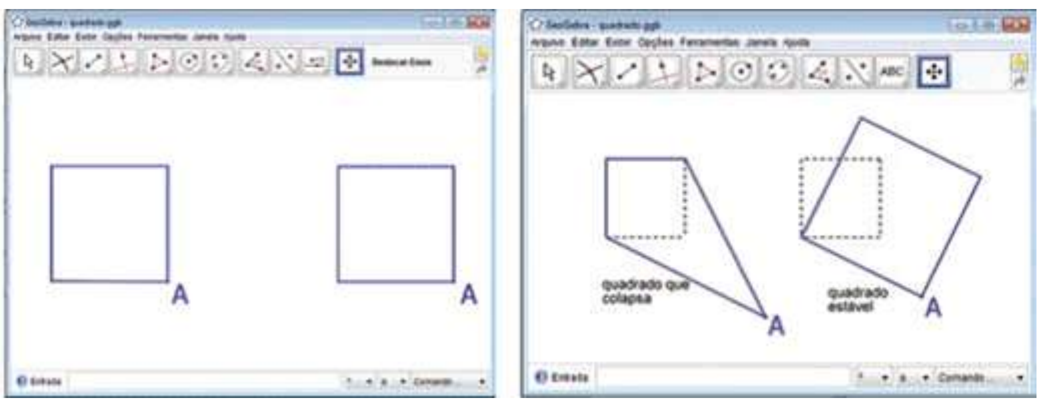

Figura 4. Quadrados à esquerda e movimento nos quadrados, à direita. (Gravina et al, 2012).

Na primeira tela, temos dois quadriláteros que identificamos como "quadrados". Na segunda tela, ao realizar a movimentação do vértice A, obtemos dois quadriláteros com características distintas. O primeiro, "quadrado que colapsa", é resultado de uma construção feita de forma totalmente visual, e por isso ao realizar o movimento se deforma. O segundo, "quadrado estável", mantém as propriedades de um quadrado devido à natureza de sua construção. Utilizando as ferramentas contidas no menu do GeoGebra foi possível obter um quadrilátero com lados congruentes e ângulos internos retos. Esse é um quadrado da geometria dinâmica – sob movimento do vértice A, mantém a forma.

O exemplo apresentado acima, além de ter o propósito de esclarecer como funcionam as figuras da geometria dinâmica, também serve para indicar o quanto o processo de construção dessas figuras pode ser um recurso didático que prepara os alunos para iniciarem suas primeiras argumentações dedutivas (Gravina et al., 2012, p. 42).

Descrição das Atividades

Atividade I

Construir, no GeoGebra, triângulos retângulos com medidas dos ângulos agudos iguais a 30° e 60°, 45° e 45° e, por último, 15° e 75°.

Com o intuito de utilizar o dinamismo do GeoGebra, será proposta a construção de triângulos retângulos com ângulos internos específicos (30°- 60°, 45°-45° e 15°-75°) utilizando apenas as ferramentas básicas do software (retas paralelas, retas perpendiculares, círculos, etc). É importante que as medidas dos lados estejam visíveis, para tanto o participante deverá utilizar a ferramenta *Distância, Comprimento ou Perímetro*. Dessa forma, será solicitada a construção de triângulos cujos ângulos não se alterem com a movimentação de seus vértices, obtendo-se, assim, uma família de triângulos semelhantes.

Triângulo 45°, 45° e 90°

O triângulo *ABC* com ângulos internos medindo 45°, 45° e 90° pode ser obtido através do quadrado *ABCD* (construído utilizando retas perpendiculares e círculo).

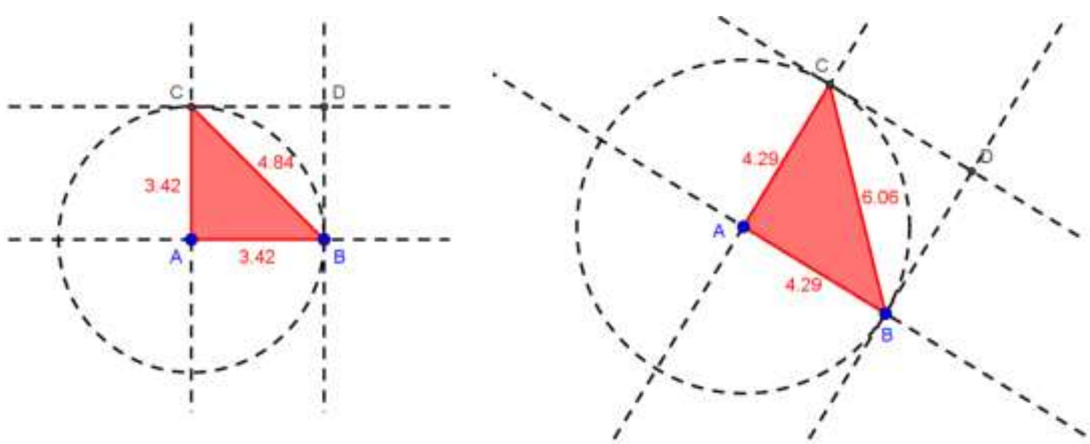

Figura 5. Triângulo 45°, 45° e 90° obtido através da interseção de retas perpendiculares e círculo.

Triângulo 30°, 60° e 90°

O triângulo *ACD* com ângulos internos medindo 30°, 60° e 90° pode ser obtido através do triângulo equilátero *ABC* (construído pela interseção de dois círculos). Divide-se um lado do triangulo em duas partes iguais (utilizando ferramenta *Ponto Médio*) e após obtém-se o triângulo retângulo cujo ângulo interno mede 30°.

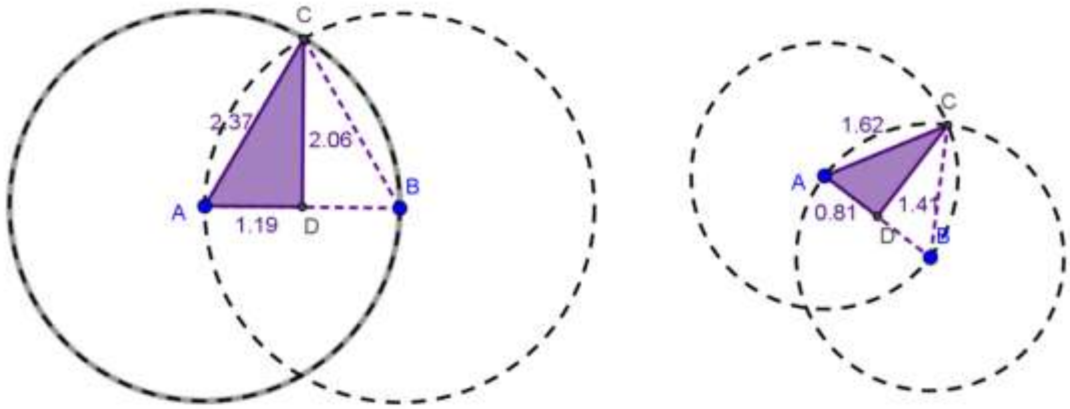

Figura 6. Triângulo 30°, 60° e 90° obtido através do triângulo equilátero.

Triângulo 15°, 75° e 90°

O triângulo *CED* com ângulos internos medindo 15°, 75° e 90° pode ser obtido através do triângulo equilátero *ABC* (construído pela interseção de dois círculos). Divide-se um lado do triangulo em quatro partes iguais (utilizando a ferramenta *Ponto Médio*) e após obtém-se o triângulo retângulo cujo ângulo interno mede 15°.

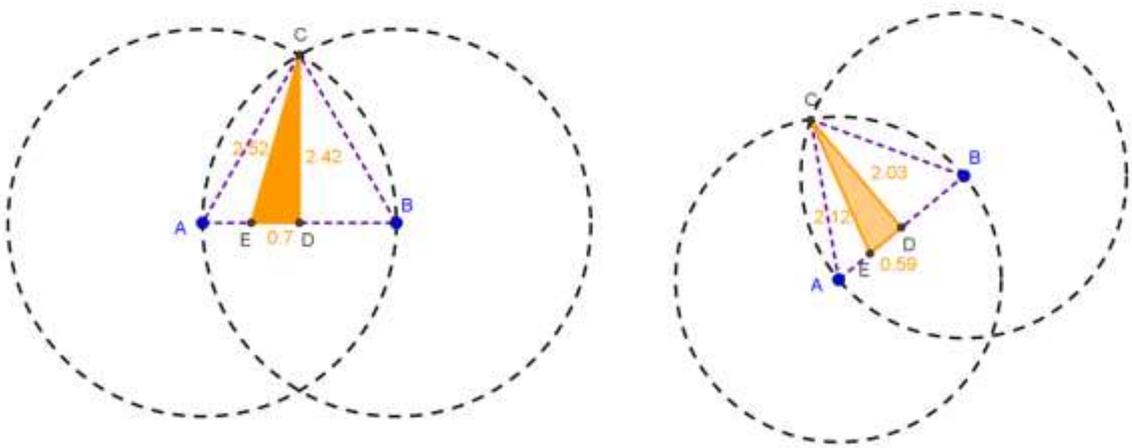

Figura 7. Triângulo 15°, 75° e 90° obtido através do triângulo equilátero.

Atividade II

Após as construções realizadas, os participantes deverão movimentar os triângulos de forma a obter, em cada caso, cinco figuras semelhantes com medidas distintas. Será definido cateto adjacente e oposto a um ângulo interno de um triângulo retângulo, bem como sua hipotenusa. Essas medidas deverão ser anotadas, conforme os itens da Tabela 1.

Tabela 1. Itens a serem completados.

Ângulo	Cateto Adjacente (CA)	Cateto Oposto (CO)	Hipotenusa (HIP)	$\frac{CA}{HIP}$	$\frac{CO}{HIP}$	$\frac{CO}{CA}$

Com a Tabela 1 devidamente preenchida, será feita uma discussão sobre o porquê dos resultados obtidos nas três ultimas colunas (razão entre os lados), nos diversos triângulos semelhantes, serem iguais.

A partir disso, serão definidas as razões seno, cosseno e tangente.

Atividade III

Será proposto aos participantes que resolvam a seguinte situação-problema, utilizando a imagem a seguir e o software GeoGebra:

Torres é uma cidade brasileira localizada no litoral norte do Rio Grande do Sul. Próximo a sua costa existe uma ilha chamada Ilha dos Lobos. Um turista deseja descobrir a distância da ilha até a beira da praia. Ele consegue estimar essa distância? Como ele poderia fazer isso?

Espera-se que o participante utilize os conceitos discutidos nas atividades anteriores para elaborar uma estratégia para descobrir a medida solicitada.

Na sequência, esboçamos uma possibilidade de solução para a questão:

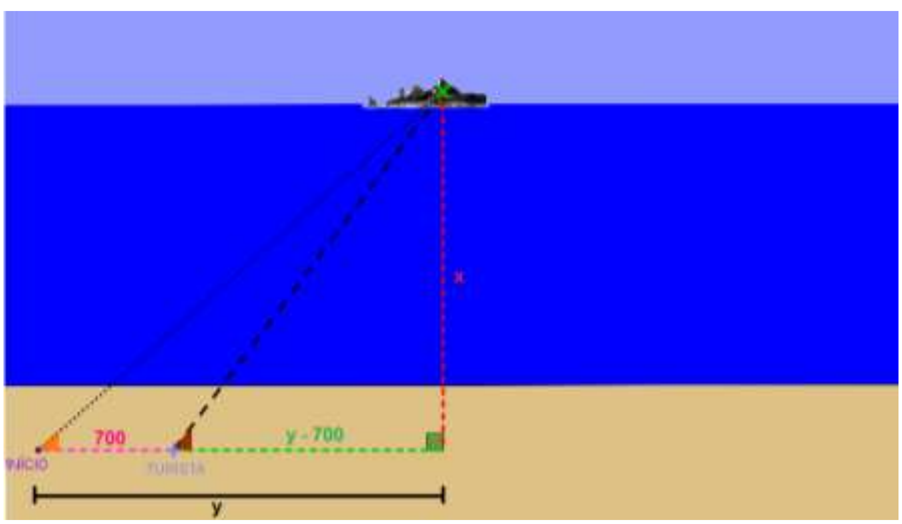

Figura 8. Ilustração da estratégia utilizada para resolver o problema

Para determinar a distância da Ilha dos Lobos à beira mar, representada por x na Figura 5, o turista pode utilizar o conceito de tangente com triângulos em que suas medidas estejam acessíveis. Para tanto, ele, a partir de um ponto inicial, desenha na areia um triângulo retângulo (laranja) de tal forma que sua hipotenusa esteja na direção da ilha, e um de seus catetos seja paralelo à beira mar, formando assim um ângulo α entre a hipotenusa e esse cateto. Ele mede seus catetos e calcula a tangente de α. Após, o turista distancia-se, por exemplo, 700 metros do ponto inicial, e repete o processo, desenhando assim um novo triângulo retângulo (marrom) de ângulo β. Novamente ele calcula a tangente.

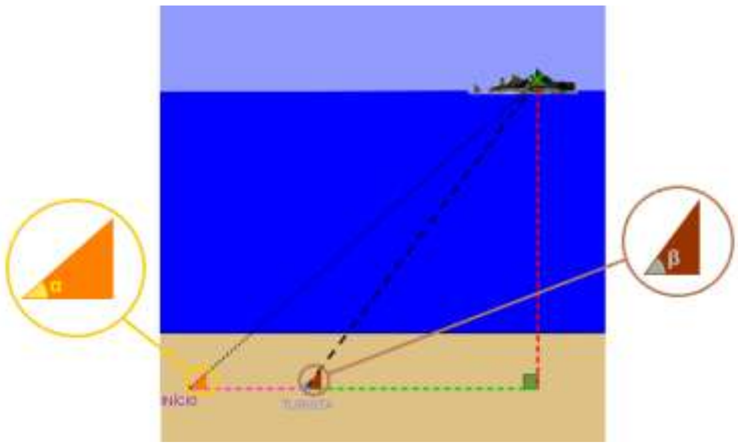

Figura 9. Triângulos com medidas acessíveis

A partir dessas informações o turista consegue determinar a medida x utilizando as seguintes relações trigonométricas:

$$\left.\begin{array}{l} \tan\alpha = \dfrac{x}{y} \Leftrightarrow y = \dfrac{x}{\tan\alpha} \\[2ex] \tan\beta = \dfrac{x}{y-700} \Leftrightarrow y = \dfrac{x}{\tan\beta} + 700 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{\tan\alpha} = \frac{x}{\tan\beta} + 700 \Leftrightarrow x = 700\,\frac{\tan\alpha \cdot \tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha}$$

De posse dos valores das tangentes o turista conseguirá estimar que a distância da Ilha dos Lobos à beira mar é de aproximadamente 1800 metros.

Discutiremos com o grupo as limitações das estratégias devido a erros cometidos nas medições, já que não há instrumentos adequados na situação em que o turista se encontra. Dessa forma, espera-se que a realização da **Atividade III** não só propicie a utilização dos conceitos introduzidos anteriormente, como também levante questões sobre erros, aproximações, unidades de medida e a relação entre a exatidão da matemática e sua aplicação em situações reais.

Por fim, incentivaremos os participantes a construírem o relógio do sol, pesquisarem com calcular a altitude do sol, fases da lua, diâmetro da terra, distância da terra ao sol, e tantos outros problemas que fizeram a trigonometria desenvolver-se enquanto ciência.

Considerações finais

Para tentar contribuir para a melhoria do cenário do ensino e da aprendizagem de trigonometria, foi desenvolvida essa proposta didática, cujo principal objetivo foi o de relacionar o estudo das relações trigonométricas com a resolução de situações problemas. Contudo, espera-se destacar que a utilização de recursos digitais torna o ensino do conteúdo abordado mais dinâmico e mais interessante. Reforçando o quanto uma aula dinâmica que motive o educando, chame sua atenção e seu interesse é primordial para o aprendizado do aluno.

Dessa forma, com o recurso do software GeoGebra, criamos um espaço dinâmico onde o aluno pode, durante a realização das atividades, criar modelos, fazer manipulações, construir conjecturas, testar, refazer e por fim, dar-se conta das propriedades geométricas fundamentais presentes nos triângulo semelhantes. Possibilitando que "as mídias digitais se tornem realmente interessantes quando elas nos ajudam a mudar a dinâmica da sala de aula na direção de valorizar o desenvolvimento de habilidades cognitivas com a concomitante aprendizagem da Matemática." (Gravina e Basso, 2012, p. 34).

Referências bibliográficas

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2012) *História da matemática.* São Paulo: Edgard Blucher, 2012. 504 p.

Gravina, M. A., & Basso, M. V. de A. (2012). Mídias digitais na educação matemática. In Gravina, M. A., Búrigo, E. Z., Basso, M. V. de A., & Garcia, V. C. V. (Eds.). *Matemática, mídias digitais e didática*: tripé para formação de professores de matemática. Porto Alegre: Evangraf.

Gravina, M. A., Barreto, M. M., Dias, M. T., & Meier, M. (2012). Geometria dinâmica na escola. In Gravina, M. A., Búrigo, E. Z., Basso, M. V. de A., & Garcia, V. C. V. (Eds.). *Matemática, mídias digitais e didática*: tripé para formação de professores de matemática. Porto Alegre: Evangraf.