CONTEXTUALIZACIÓN DE LA FUNCION EXPONENCIAL EN CARRERAS DE AGRONOMÍA Y AFINES

Patricia Sastre Vázquez, Néstor Ciappina, Alejandra Cañibano
Facultad de Agronomía. UNCPBA, Azul. Argentina
pasava2001@yahoo.com.ar, mac@faa.unicen.edu.ar, nestorciappina@hotmail.com

Resumen

Este trabajo trata de la contextualización de las funciones exponenciales para la enseñanza y aprendizaje de la matemática en Facultades de Agronomía y afines. A fin de lograr que el alumno se interiorice e interese sobre los temas brindados en los cursos, se debe priorizar la relación interdisciplinaria entre las ciencias que involucre la carrera. Para tal fin se reflexiona acerca del concepto motivación y se ofrecen distintos ejemplos que el docente puede utilizar para incorporar a sus clases; en este trabajo se muestran ejemplos que pueden ser ofrecidos cuando se trabaja con funciones exponenciales.

Introduccion

Con mucha frecuencia los estudiantes conciben a la Matemática como algo tedioso y complicado, y en general esto se debe principalmente a dos factores: 1) no les interesa o no ven la utilidad del contenido que se les presenta y 2) no logran comprender lo que se intenta transmitirles. La consecuencia inmediata de esto que los estudiantes presenten bajo rendimiento y así se desmotiven. Una forma de paliar estos problemas es hacer ver al estudiante las conexiones entre los conocimientos nuevos y las experiencias y conocimientos previos, remarcando su utilidad en el marco de la carrera que ha elegido La forma en cómo se relaciona la teoría con las actividades de la práctica es determínate para lograr el éxito en el proceso de transmisión del conocimiento.

Según Heckman y Weissglass (1994) la inteligencia y la creatividad no son patrimonio de unos pocos que poseen ciertas habilidades y formas de pensar, señalando que el contexto y las circunstancias sociales son variables importantes que interactúan con las características individuales para promover el aprendizaje y el razonamiento.

Ramos, A.B. y Font, V. (2006) señalan que para el término contexto pueden distinguirse los siguientes usos: 1) considerar el contexto como un *ejemplo particular* de un objeto matemático o 2) *enmarcarlo en el entorno*. En este trabajo se adopta la primera perspectiva y se proponen situaciones problema que caen dentro del campo de aplicación de un objeto matemático: la función exponencial.

Es sumamente importante prestar especial atención a la implementación del currículo de matemática ya que el objetivo no es formar matemáticos sino individuos que deberían aprender matemáticas para pensar de manera lógica, tomar decisiones y desarrollar habilidades para la resolución de problemas. Una adecuada contextualización, con aplicaciones que no son artificiales, sino al contrario, son del interés del alumno, puede ayudar a lograr la motivación.

Los cursos de matemática deben brindar a los estudiantes los elementos cognoscitivos y herramientas que utilizarán en las materias específicas de su carrera. Las asignaturas de las ciencias básicas son el cimiento de su carrera, pero no deben ser una meta por sí mismas, aunque se priorice el carácter formativo para el alumno.

Una de las posibles causas de la gran proporción de estudiantes que no aprueban las ciencias básicas, en particular matemática, puede ser el poco interés que tienen los alumnos por estas ramas de la ciencia, ya que no ven de manera inmediata su aplicación, ni el objeto de tener que cursarla.

Para el diccionario de la Real Academia Española, la motivación es el "*conjunto de factores internos o externos que determinan en parte las acciones de una persona*" pero también existen otras definiciones como por ejemplo la de Santrock (2001), que define la motivación como el *"conjunto de razones por las que las personas se comportan de la forma en que lo hacen"*. A su vez Bello (1997), informa que "designa *una construcción teórica para comprender las condiciones que activan una conducta y la dirigen hacia un fin u objetivo determinado" y* Romero (1985), que *"la motivación se refiere, en general, a estados internos que energizan y dirigen la conducta hacia metas específicas"*.

Según lo indicado puede notarse que existen diferencias en el concepto, algunas se asocian a la fuerza o energía y otras a la motivación como un proceso. Por ejemplo Alves Mattos (1963), asociando la motivación con un proceso afirma: *"Motivar es despertar el interés y la atención de los alumnos por los valores contenidos en la* materia, *excitando en ellos el interés de aprenderla, el gusto de estudiarla y la satisfacción de cumplir las tareas que exige"*.

En los procesos de enseñanza-aprendizaje de temas matemáticos en Facultades de Agronomía es esencial que los docentes desarrollen sus actividades de enseñanza mostrando continuamente a los alumnos las relaciones y la aplicabilidad de la Matemática en el resto de las ciencias que estudiarán en su carrera.

Es claro que para poder subsanar cuestiones inherentes a la discusión, es imprescindible que exista una estrecha colaboración interdisciplinaria. Esto implica que los profesores de todas o casi todas las asignaturas deben trabajar juntos. De este modo, el docente responsable de Matemática, puede conocer más claramente los temas básicos que requieren los colegas de Biología, Química, Suelos, Fisiología entre muchos otros y sobre ellos enseñar aplicaciones específicas. Es obvio que no se puede exigir que un estudiante conozca en todos sus detalles los fundamentos de los diversos procedimientos matemáticos pero también es cierto que para superar el empirismo y la vaguedad de muchos razonamientos cualitativos será muy útil la descripción de las relaciones entre distintos fenómenos y procesos biológicos por medio de expresiones matemáticas cuantitativas.

Objetivos

Con la idea central de contribuir al mejoramiento de la calidad de la enseñanza de temas matemáticos en carreras de Agronomía, en este trabajo se proponen ejemplos que muestran la aplicabilidad de algunas funciones logarítmicas en la resolución de problemas que los alumnos y futuros profesionales podrán encontrarse a lo largo de su carrera. Por otro lado se muestran ejemplos de cómo la matemática puede ser abordada desde una forma relacional con otras ciencias.

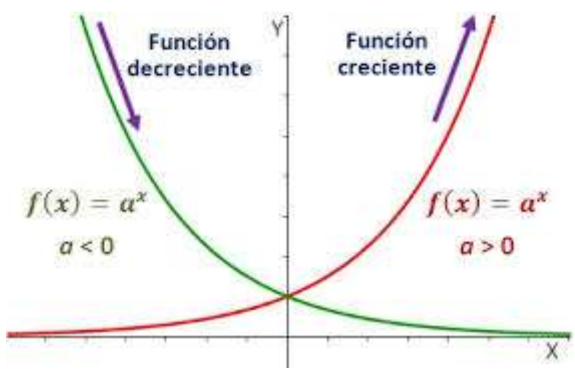
La función exponencial

La función que a cada número real *x* le hace corresponder la potencia a^x se llama función exponencial de base a y exponente *x*.

Entonces la función exponencial tiene la forma $f(x) = a^x$, donde *a* es un número real positivo.

Se trata de una función continua donde el dominio son los números reales y la imagen los reales positivos. Es creciente si $a > 1$ y decreciente si $a < 1$. Es inyectiva para todo $a \neq 1$ y los puntos (0,1) y (1, a) pertenecen a la gráfica.

Su gráfica es:



Propuestas

Como ejemplos de aplicación se presentan: 1) relación entre la producción de un cultivo y los nutrientes aplicados al mismo, 2) comportamiento de una población en función de su edad y 3) elasticidad de *y* respecto de *x*

Relación entre la producción de un cultivo y los nutrientes aplicados al mismo

En numerosas ocasiones se desea describir la respuesta vegetal en función de la provisión de nutrientes lo cual implica establecer relaciones funcionales entre las variables, o sea conocer el efecto de los factores de crecimiento. Un problema de índole agronómico es por ejemplo explicar matemáticamente la relación existente entre la producción de un cultivo cualquiera y los nutrientes aplicados al mismo. Las funciones de producción pueden adoptar diferentes representaciones matemáticamente que permiten determinar cómo varía la variable dependiente al producirse una variación en la variable independiente. Para el caso de fertilizantes, se determinará cómo aumenta o disminuye el rendimiento al aumentar o disminuir la cantidad aplicada de fertilizantes.

Para representar la acción de los nutrientes sobre el cultivo se han propuesto diferentes expresiones matemáticas. Ninguna de ellas es mejor que otra, según las circunstancias y el cultivo, alguna de ellas es más apropiada. La propuesta más difundida es la de Mitscerlich (1909), la cual se fundamenta en la idea de que el aumento del rendimiento debido a aplicaciones iguales de un factor, es proporcional a lo que le queda para conseguir el valor máximo, que es el valor asintótico en la ecuación. La curva de representación de este modelo tiene las siguientes características:

1. No pasa por el cero porque el suelo ya contiene nutrientes
2. Crece solo hasta cierto límite, el cual depende de: 1) rendimiento máximo genético: todos los factores a un nivel óptimos para el crecimiento (difícil de alcanzar) y 2) rendimiento máximo con respecto a un nutriente "*x":* el rendimiento mayor que puede lograrse por el agregado de un nutriente "x" bajo un conjunto determinado de condiciones.

Mitscherlich (1909) fue uno de los primeros investigadores en explicar que la relación entre la producción y los fertilizantes no era lineal sino curvilínea. La primera expresión matemática referida a un solo nutriente es:

$$\frac{dy}{dx} = c(A - y)$$

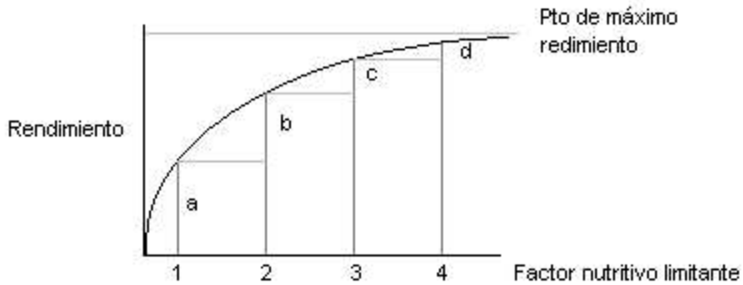
$$\int \frac{dy}{A - y} = c\int dx$$

$$LogA - Log(a - y) = cx$$

$$y = A(1 - e^{cx})$$

Siendo cada uno de sus términos lo siguiente:

y = rendimiento
x = cantidad del factor cuyo efecto se está determinando
A = rendimiento máximo posible
c = constante de proporcionalidad.



Obsérvese que a cada incremento del factor limitante, elemento nutritivo que se encuentra en menor cantidad, corresponden incrementos de rendimientos en las cosechas cada vez menores, hasta llegar a un incremento de rendimiento nulo.

La ecuación fue objetada, sobre todo en lo referente a la constante de proporcionalidad (c) ya que Mitscherlich sostuvo que no variaba para los diferentes cultivos y condiciones ambientales. Además, dicha ecuaci6n alcanzaba el rendimiento máximo A asintóticamente. Estas objeciones hicieron que Mitscherlich desarrollara una nueva expresión:

$$y = A(1-10^{-cx})(10^{-kx^2})$$

Comportamiento de una población en función de su edad

En Biología es frecuente la necesidad de estudiar el comportamiento de una p*oblación*, conjunto genérico de entidades individuales, en función de su edad. Para describir el comportamiento de los individuos de una población a lo largo del tiempo (t), bajo ciertas condiciones controladas, se utilizan las *funciones exponenciales*. Si por ejemplo se mide a intervalos regulares de tiempo el número de bacterias por cm^3 en un caldo de cultivo, se verá que este número aumenta cada vez, en un factor constante igual a 2.
Si se designa como:

N_0 = número de bacterias/cm^3 en t_0 ($t=0$)
N_1=2
N_i = número de bacterias/cm^3 para el tiempo $t_1 = T$

Entonces en el tiempo $t_2 = 2T$, el número de bacterias /cm^3 existentes será:

$$N_2 = 2N_1 = 2^2 N_0$$

Y así sucesivamente. Entonces para un tiempo $t_n = nT$, resulta ser $N_n = 2^n N_0$. La expresión matemática que determina el número de bacterias $N(t)$ presentes en el instante t, viene dada por:

$$N(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}$$

En forma más general, el modelo que representa este tipo de problemas es

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

Tomando logaritmos a ambos miembros de esta ecuación, se obtiene la ecuación de una recta con pendiente k y ordenada al origen $Ln\ N_0$

$$LnN(t) = LnN_0 + kt$$

Graficando $LnN(t)$ contra el tiempo t en un sistema de coordenadas cartesianas, y haciendo la regresión lineal correspondiente, se logra estimar la constante específica k de crecimiento y el número de bacterias iniciales N_0, respectivamente.

Para responder a la pregunta: *para qué valor de x la función exponencial,* $y = 2^x$*, toma un valor determinado y*, es necesario utilizar la función inversa de la exponencial, es decir:

$$y = \log_2 x$$

Y en general, $y = \log_a x$ es la inversa de la función exponencial $y = a^x$

La función exponencial y la función logarítmica tienen las siguientes derivadas:

$$y = e^x \rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x$$

$$y = Lnx \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

Recordando la definición de derivada de una función en un punto es fácil comprobar que:

(a) La pendiente de la recta tangente al gráfico de la función exponencial, coincide con la ordenada del punto de tangencia;
(b) La pendiente de la recta tangente al gráfico de la función logarítmica tiene como pendiente la inversa de la abscisa.

Elasticidad de *y* respecto de *x*

Existen bienes cuya demanda es muy sensible respecto al precio, o sea pequeñas variaciones en su precio provocan grandes variaciones en la cantidad demandada. Se dice de ellos que tienen *demanda elástica*. Si se aplican logaritmos a la función exponencial $y = ax^b$ esta función también puede ser expresada como:

$$Logy = Loga + bLogx$$

Este modelo es particularmente interesante en aplicaciones econométricas, porque el exponente *b* en una función exponencial mide la *elasticidad* de *Y* respecto de *X*. Con los datos de un estudio de la demanda de autos nuevos en los Estados Unidos, publicado en 1958 se puede estimar la siguiente regresión:

$$Logy = -1.5803 - 1.422 Logx_1 + 3.216 Logx_2 - 1.479 Logx_3$$

Siendo las variables consideradas las siguientes:

x_1 = Índice del Precio Real de Automóviles Nuevos
x_2 = Ingreso Disponible Real (en miles de millones de dólares)
x_3 = Automóviles en Circulación al principio de cada año (millones de unidades)
y = Ventas de Automóviles Nuevos (millones de unidades).

Puesto que todas las variables se expresan en términos de logaritmos, los coeficientes de regresión son estimaciones de las elasticidades de *y* respecto de las variables independientes. En base a estos resultados, se puede que la elasticidad-precio de la demanda de automóviles nuevos en este período era de aproximadamente –1.4, con una elasticidad-ingreso de aproximadamente 3.2. (¿Cuál sería la interpretación del coeficiente de la variable x_3?)

Conclusiones

La matemática en contexto resulta no ser tan árida, ni estar aislada de la realidad del estudiante y de hecho facilita el proceso enseñanza aprendizaje.
Por otro lado, si se aspira a mejorar la calidad de la enseñanza de Matemática en Agronomía es necesario que los profesores de Matemática y otras ciencias involucradas en la carrera trabajen juntos. Las propuestas efectuadas son útiles para facilitar a los estudiantes el aprendizaje integral de las funciones logarítmicas y su aplicación en la resolución de problemas prácticos.

Referencias bibliográficas

Alves Mattos, L. (1963). *Compendio de Didáctica General*. Buenos Aires: Ed. Kapelusz.

Bello, P. J. (1997). *Motivación en tu vida*. Venezuela: Editorial Panapo.

Heckmann, P.E.; Weissglass, J. (1994) Contextualized Mathematics Instruction: Moving beyond recent proposals. *For the learning of Mathematics 14, 1*, 29-33.

Mitscherlich, E. (1909). Das del Minimus und das Gesetz des abnehmenden Bodenertrages, *Landw Jahrb, 38*, 537-552.

Ramos, A.B. y Font, V. (2006). Contesto e contestualizzazione nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Una prospettiva ontosemiotica. *La Matematica e la sua didattica, Anno 20, n. 4*, 535-556.

Romero, O. (1985). *Motivando para el trabajo. Cuadernos Lagoven*. Caracas: Serie siglo XXI.

Santrock, J. (2001). *Psicología de la educación. Motivación y Aprendizaje*. México D. F., McGraw-Hill lnteramericana.