MÓDULO 2
ANÁLISIS DE CONTENIDO

María C. Cañadas y Pedro Gómez

El análisis didáctico se ubica en el nivel de la planificación local dentro de la teoría curricular (Gómez, 2007, p. 20). Está compuesto por cuatro análisis: (a) análisis de contenido, (b) análisis cognitivo, (c) análisis de instrucción y (d) análisis de actuación. Cada uno de estos análisis se centra en una de las dimensiones del currículo y todos tienen un objetivo común: contribuir al diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas sobre temas concretos de las matemáticas escolares. En este módulo, abordamos el análisis de contenido, que concierne a la dimensión conceptual de las matemáticas en el nivel de planificación local y proporciona herramientas para analizar los temas de las matemáticas escolares e identificar y organizar su multiplicidad de significados.

Cuando un profesor se dispone a preparar una clase sobre un tema de las matemáticas escolares, es importante profundizar en ciertas características matemáticas que son propias de las estructuras matemáticas. El primer paso es hacer una revisión de ese contenido matemático para conocer sus diferentes significados. No queremos decir que todos los significados identificados desde el análisis de contenido vayan a tratarse en el aula, pero es importante que se tenga en cuenta esa información y se seleccione los que consideren convenientes. Abordaremos el análisis de contenido a través de tres organizadores del currículo: (a) estructura conceptual, (b) sistemas de representación y (c) fenomenología. Además, consideramos la historia como un cuarto organizador del currículo, de tipo transversal, que debe aportar información a los tres organizadores del currículo de este análisis, así como a los otros análisis que conforman el análisis didáctico.

El módulo 2 de MAD 2 tiene como finalidad contribuir al conocimiento teórico y técnico de los profesores en formación sobre el análisis de contenido. Esta finalidad se concreta por medio de cuatro actividades en las que los profesores en formación tienen la oportunidad de dar sentido y utilizar, para el análisis de un tema de las matemáticas escolares, los cuatro organizadores del currículo que acabamos de mencionar. Además, tienen la oportunidad de recolectar y organizar toda la información producida para estos organizadores del currículo en un balance final.

El grado de detalle con el que se especifican los contenidos de las matemáticas escolares puede variar según el contexto y el nivel en el que nos situemos. Por ello, dedicamos el primer apartado de este capítulo a describir diferentes niveles en el contenido de las matemáticas escolares y a presentar una clasificación cognitiva de los contenidos de las matemáticas escolares sobre la que apoyamos el análisis de contenido. Tras un apartado para introducir los tres organizadores del currículo que constituyen el análisis de contenido, nos centramos en cada uno de ellos.

1. CONTENIDO DE LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

La expresión "contenido de las matemáticas escolares" no tiene un único significado. El contenido de las matemáticas escolares puede hacer referencia tanto a los contenidos que se identifican en el currículo oficial de un país, como a lo que recogen los libros de texto o a lo que un profesor determina que va a trabajar con su clase sobre un tema determinado. Es por esto que conviene comenzar por la identificación de diferentes niveles en el contenido de las matemáticas escolares, especificando en el que centramos la atención con el análisis de contenido.

1.1 Niveles en el contenido de las matemáticas escolares

Siguiendo el trabajo de Gómez (2007, pp. 37-40), identificamos diferentes niveles en el contenido de las matemáticas escolares, que van desde el nivel más general al más específico.

Nivel 1. Contenido del programa del currículo oficial

El contenido del programa del currículo oficial es publicado por el gobierno del país o por los organismos con esa competencia educativa. El currículo oficial establece los conceptos y procedimientos que deben constituir la formación matemática básica de los ciudadanos en la sociedad. El contenido del programa hace referencia a estructuras matemáticas generales, secuenciación y ordenación de los contenidos establecidos. En el caso de Colombia, los contenidos se abordan al determinar cinco tipos de pensamiento matemático (numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional) y establecer sus relaciones (Ministerio de Educación Nacional, 2006, pp. 56-70).

Nivel 2. Contenido matemático escolar

Desde el punto de vista del sistema educativo, en este nivel se recogen los contenidos de los programas en términos del conocimiento matemático escolar. Las fuentes que forman parte de este nivel presentan una amplia revisión de contenidos, significados, criterios teóricos para la selección de contenidos, ejemplos de prácticas, etc. Libros de texto, guías didácticas, documentos de profesores y expertos en Educación Matemática son ejemplos de documentos en este nivel.

Nivel 3. Contenido propuesto para una asignatura

El contenido del tercer nivel es propuesto por parte de profesores, expertos educativos o editoriales. Proponen contenidos que deben ser objeto de actividades enseñanza-aprendizaje de una asignatura y establecen sus significados.

Nivel 4. Estructura matemática
El profesor es el responsable de seleccionar el contenido y desarrollar los documentos que hacen referencia a este nivel. Para llevar a cabo este trabajo, él debe identificar y organizar los significados de la estructura matemática en cuestión. Las estructuras matemáticas organizan el contenido de una asignatura. Por ejemplo, las isometrías, los polígonos o las ecuaciones lineales se pueden considerar estructuras de las matemáticas escolares.

Nivel 5. Foco de contenido
Los focos de contenido son "agrupaciones específicas de conceptos, procedimientos y relaciones, que adquieren importancia especial, ya que expresan, organizan y resumen agrupamientos coherentes de los contenidos" (Lupiáñez, 2009, p. 43). Por ejemplo, las simetrías se pueden considerar un foco de contenido dentro del tema de isometrías y los triángulos pueden serlo de los polígonos.

Dado el objetivo que persigue el análisis de contenido y que cada grupo ha elegido una parcela concreta de una estructura de las matemáticas escolares, partimos de que el análisis de contenido se centra en este quinto y último nivel. Realizaremos el análisis de contenido sobre un foco de contenido al que también haremos referencia como tema de las matemáticas escolares.

2. Organizadores del currículo en el análisis de contenido

Como se mencionó en el módulo 1, "cada uno de los análisis [que constituyen el análisis didáctico] se articula alrededor de unos organizadores del currículo" (Gómez, 2012). La estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología son los organizadores del currículo que conforman el análisis de contenido y están estrechamente relacionados entre sí. En ocasiones, resulta difícil hacer mención a uno sin hacer uso de otro, como se observa en el caso de los organizadores del currículo estructura conceptual y sistemas de representación. Por un lado, es difícil hablar de la estructura conceptual sin hacer referencia a su representación (es necesario hacer una representación para hablar de algún elemento de la estructura conceptual). Por otro lado, es difícil hablar de sistema de representación si no hay "algo" que representar. Por ejemplo, es difícil referirse al concepto de cuadrado sin tener en mente una representación gráfica del mismo, y viceversa. Es importante que la relación entre los tres organizadores del currículo, que se establece desde un punto de vista teórico, quede recogida en el trabajo que se lleva a cabo sobre un tema matemático específico.

En la tabla 1 presentamos los objetivos de los tres organizadores del currículo del análisis de contenido.

Tabla 1
Objetivos de los organizadores del currículo del análisis de contenido

Organizador del currículo	Objetivo
Estructura conceptual	Identificar los conceptos y procedimientos que caracterizan el tema y las relaciones entre ellos
Sistemas de representación	Establecer los sistemas de representación asociados al tema y las relaciones entre ellos
Fenomenología	Identificar los fenómenos que dan sentido al tema y los contextos, las subestructuras y las situaciones que permiten organizan dichos fenómenos

Dedicaremos los siguientes apartados a cada uno de los tres organizadores. Seguiremos un orden que nos parece, según nuestra experiencia previa, más comprensible y motivador para los profesores, comenzando por la estructura conceptual, siguiendo por los sistemas de representación, y terminando con la fenomenología.

3. ESTRUCTURA CONCEPTUAL

El organizador del currículo estructura conceptual permite que el profesor dé respuesta a las siguientes cuestiones:

- ¿Cuáles son los conceptos que caracterizan el tema?
- ¿Qué procedimientos están implicados en el tema?
- ¿Cómo se relacionan esos conceptos entre sí?
- ¿Cómo se relacionan esos procedimientos entre sí?
- ¿Cómo se relacionan esos conceptos y esos procedimientos?

Los conceptos, los procedimientos y las relaciones entre ellos son las ideas clave de este organizador del currículo. Una forma de dar respuesta al listado de preguntas anterior es comenzar por identificar elementos del campo conceptual del tema matemático que abordemos, considerando tanto la estructura del propio concepto como la estructura de la que el concepto forma parte. A partir de ellos, es posible detectar los procedimientos que se ejecutan sobre esos elementos del campo conceptual. Por último, se pueden establecer las relaciones entre los conceptos y los procedimientos identificados. La estructura conceptual de un tema de las matemáticas escolares recoge y organiza estos elementos y relaciones.

3.1 Clasificación cognitiva de los contenidos

Atendemos a una clasificación cognitiva de los contenidos de las matemáticas escolares y consideramos una primera distinción entre el campo conceptual y el campo procedimental (Rico, 1997).

Campo conceptual

El campo conceptual hace referencia a la sustancia del conocimiento: qué es lo que lo compone. En él, se pueden identificar diferentes niveles, considerando que se puede pasar de un nivel inferior a un nivel superior cuando se añaden otros elementos y relaciones: (a) hechos, (b) conceptos y (c) estructuras conceptuales (Rico, 1997). Los hechos son las unidades más pequeñas de información dentro de un tema matemático. Estos elementos son de diferentes tipos. Usualmente, en los hechos se suele distinguir entre: (a) términos, (b) notaciones, (c) convenios y (d) resultados. Los conceptos son conjuntos de hechos y relaciones entre ellos. Se presentan organizados en sistemas. Las estructuras conceptuales son sistemas de conceptos relacionados entre sí.

Tomando las razones trigonométricas como tema de las matemáticas escolares, los diferentes tipos de ángulos (agudos, rectos, obtusos, llanos, complementarios, suplementarios, etc.), la circunferencia goniométrica, el seno, el coseno y la tangente son términos. Las expresiones º, rad, sen, cos, tan, $(sen\alpha)^2 = sen^2\alpha$, α y β son notaciones. Que los ángulos positivos se midan en sentido anti-horario es un convenio. Que la tangente sea el cociente entre seno y coseno y que $sen\alpha = sen(\alpha + 360)$ son resultados. Las relaciones fundamentales entre razones trigonométricas, los teoremas del seno o del coseno, o la periodicidad del seno y del coseno son conceptos. Las funciones trigonométricas, que son estructuras, se definen a partir de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo. Las funciones seno y coseno son la base de las funciones trigonométricas.

Campo procedimental

El campo procedimental incluye los procedimientos y modos de actuación con respecto al conocimiento. Rico (1997) distingue entre (a) destrezas, (b) razonamientos y (c) estrategias. Las destrezas se ejecutan procesando hechos. Se produce una manipulación de símbolos y transformaciones. Los razonamientos se ejecutan sobre conceptos. Las estrategias se ejecutan sobre estructuras conceptuales. Se manipulan diferentes sistemas de representación. En el tema de trigonometría, identificar los cuadrantes, indicar los ángulos suplementarios o complementarios, o construir un triángulo rectángulo del que se conocen las razones trigonométricas de sus ángulos son destrezas.

Los razonamientos en trigonometría, que se ejecutan sobre los conceptos que se han mencionado previamente, pueden ser de diferentes tipos. Comprobar la validez de las relaciones fundamentales con distintos ángulos es un razonamiento deductivo. Reconocer fórmulas por el método de ensayo-error es un razonamiento inductivo. Obtener la fórmula del coseno del ángulo doble/mitad, a partir de la fórmula del seno del ángulo doble/mitad, se lleva a cabo mediante un razonamiento analógico. Estimar el valor de un ángulo y de sus razones trigonométricas a partir de su representación gráfica se realiza mediante razonamiento figurativo.

La resolución de triángulos rectángulos o de diferentes problemas geométricos utilizando los resultados teóricos conocidos son estrategias en el tema de trigonometría.

Distinción de tipos de elementos

No suele resultar complicado distinguir los elementos del campo conceptual de los del campo procedimental por ser de diferente naturaleza. Sin embargo, el límite no es siempre claro entre los niveles de los elementos del mismo campo. Por ejemplo, por un lado, el teorema de Pitágoras es un hecho para el tema de trigonometría. Por otro lado, el teorema de Pitágoras se puede considerar un tema de las matemáticas escolares. En función de donde ubiquemos el contenido en el que nos vamos a centrar, el resto de los elementos se situarán en uno u otro nivel.

Identificar los elementos de un tema es tan importante como distinguir cuáles no son elementos de un tema. Por ejemplo, $f(x) = 2x^2 + 1$ no es una notación de una función afín y sí de una función cuadrática.

Como se observa en los ejemplos propuestos en este apartado, la indagación sobre los elementos de los dos campos del conocimiento de un tema de las matemáticas escolares permite realizar una primera aproximación al contenido de ese tema.

3.2 Listado de elementos

Como primera aproximación a un tema, consideramos conveniente recurrir a diferentes fuentes que proporcionen al profesor la información más rica posible sobre el tema en diferentes contextos y desde diferentes perspectivas como son

- el propio conocimiento del profesor,
- documentos curriculares,
- libros de texto,
- internet (recomendamos buscadores como Google como primera aproximación para identificar fuentes de información en la red),
- literatura en Educación Matemática y
- libros de texto de matemática avanzada.

Como primer paso, el profesor puede preguntarse por los elementos que se relacionan con el tema. Así se puede obtener un listado de elementos que permite hacer una primera aproximación al tema pero que no sigue ninguna estructura. No existe un orden establecido para comenzar por un tipo de elementos u otros, aunque es conveniente ser sistemático y no perder de vista el objetivo de la estructura conceptual como organizador del currículo. Suele resultar más sencillo comenzar por las unidades más simples del campo conceptual e ir ampliando a los elementos que incluyen relaciones entre los anteriores y posteriormente tener en cuenta sobre qué elementos del campo conceptual actúan los elementos del campo procedimental.

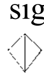
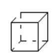
Por ejemplo, para el caso de los números naturales, podemos obtener un listado de elementos como el siguiente: cero, uno, dos,…; igual, mayor que,…; suma, resta, producto, división; siguiente a, anterior a…; decena, unidad de millar,…; 0, 1, 2,…; =, >, +, $-$, $\times$, :,…; 10, 100, 1000,…; 10^2, 10^3,…; los naturales comienzan en 0; periodicidad de los órdenes del sistema, valor posicional de las cifras en un número; lectura y escritura de un número; colocación de términos para realizar operaciones aritméticas con números naturales; cada 10 unidades de un orden forman una unidad de orden superior; comparación de naturales por su tamaño y, en igualdad de tamaño, por la cifra de mayor orden que sea distinta; todo número n tiene un siguiente $n+1$ y, excepto 0, un anterior $n-1$; tablas de operaciones aritméticas; descomposición polinómica de un número; uso del paréntesis y jerarquía de las operaciones; algoritmos de las operaciones aritméticas con números naturales; usos básicos de la calculadora con números naturales; secuencia numérica; recta numérica; sistema decimal de numeración; divisibilidad; propiedades de las operaciones numéricas; identificación de regularidades numéricas; argumentos para justificar propiedades numéricas; (N, +) semigrupo conmutativo; (N, $\times$) semigrupo conmutativo.

La clasificación de los elementos del listado según los campos conceptual y procedimental y los niveles establecidos para cada uno de ellos permiten tener una descripción más sistemática y analítica del tema en términos de los elementos involucrados. A continuación presentamos un ejemplo con base en el teorema de Pitágoras como tema de las matemáticas escolares. Utilizamos como fuentes de información los trabajos de Guardia, Montes, Páez y Schmidt-Kortenbusch (2009), estudiantes de la asignatura de Didáctica de la Matemática de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Granada; y de Marín (2011), estudiante del Máster de Formación de Profesorado de la Especialidad de Matemáticas de dicha universidad[1].

Listado de elementos del campo conceptual

A continuación mostramos listados de algunos hechos del campo conceptual del teorema de Pitágoras, organizados según los tipos (términos, notaciones, convenios y resultados) considerados anteriormente.

Términos. Se incluyen los siguientes términos: ángulo, grado sexagesimal; triángulo rectángulo, cateto, hipotenusa; triángulo acutángulo, triángulo obtusángulo; triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono; prisma, pirámide; longitud, distancia, área, volumen; raíz cuadrada, potencias; altura, perpendicular.

Notaciones. Se consideran las siguientes notaciones: α, β, γ, º; $\alpha = 90^\circ$, $\alpha < 90^\circ$, $\beta < 90^\circ$, $\gamma < 90^\circ$, a, b, c; $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;  …; L, D, A, V; $\sqrt{a}$, a^2; h, 

Convenios. Se identifican los siguientes convenios: ángulo: región del plano comprendida entre dos rectas que se cortan en un punto; ángulo agudo: ángulo menor de 90º; triángulo: conjunto de tres puntos [a, b, c] no alineados en el plano triangulo, polígono determinado por tres rectas que se cortan dos a dos en tres puntos; triángulo rectángulo: triángulo que tiene dos ángulos agudos y uno recto; cateto: lados del triángulo rectángulo que forman el ángulo recto; hipotenusa: lado del triángulo rectángulo opuesto al ángulo recto; altura de un triángulo respecto a un lado del mismo: distancia entre la recta que contiene al lado y el vértice opuesto.

Resultados. Se incluyen los siguientes resultados: los ángulos de un triángulo suman 180º; en un triángulo la longitud de cada lado es menor que la suma de los otros dos; el triángulo es rígido, de hecho, es el único polígono indeformable; un triángulo rectángulo será isósceles si dos ángulos son de 45º; un triángulo rectángulo será isósceles si sus catetos son iguales; en un triángulo rectángulo, si α y β son los ángulos no rectángulos, entonces $\alpha + \beta = 90^o$, es decir, α y β son complementarios; cualquier triángulo puede dividirse en dos triángulos rectángulos, siendo su altura uno de los catetos; cualquier figura poligonal puede descomponerse en triángulos; el área de un triángulo es la mitad del producto de uno de sus lados por la altura respecto a ese lado.

Recogemos los conceptos y las estructuras en los siguientes niveles del campo conceptual.

[1] La utilización de esta información no supone que la consideremos válida y completa.

Conceptos. Se incluyen: terna pitagórica, teorema del cateto, teorema de la altura y aplicación vectorial del teorema de Pitágoras.

Estructuras. Se consideran el recíproco y la generalización del teorema de Pitágoras.

Listado de elementos del campo procedimental

A continuación recogemos listados de elementos del campo procedimental del teorema de Pitágoras para los tres niveles considerados: (a) destrezas, (b) razonamientos y (c) estrategias.

Destrezas. Se incluyen las siguientes destrezas: reconocer y construir triángulos rectángulos (con instrumentos de dibujo y TIC —Tecnologías de la Información y de la Comunicación—); dibujar áreas de cuadrados (con instrumentos de dibujo y TIC); aplicar el concepto de ángulo y manejar el sistema sexagesimal para la medida de ángulos; reconocer, construir y dibujar triángulos rectángulos usando los instrumentos de dibujo; y manejar el cálculo de raíces y potencias, así como la calculadora para operar con ellas.

Razonamientos. Se identifican los siguientes razonamientos: demostrar el teorema de Pitágoras a partir de los teoremas del cateto y de la altura o gráficamente (deductivo); comprobar que el teorema de Pitágoras es válido para los triángulos rectángulos (deductivo); generalizar el teorema de Pitágoras a otras figuras diferentes del triángulo rectángulo (inductivo); comprobar el teorema de Pitágoras mediante las áreas de los cuadrados que se pueden construir sobre los lados de un triángulo rectángulo, utilizando para ello cuadrados más pequeños (geométrico).

Estrategias. Se consideran las siguientes estrategias: resolver triángulos rectángulos conocidos algunos datos (lados y/o ángulos); trazar rectas perpendiculares empleando el teorema de Pitágoras; calcular longitudes, áreas y volúmenes usando el teorema de Pitágoras.

A pesar de obtener unos listados que puedan parecer, a priori, bastante completos, conviene no perder de vista que los elementos de los listados se deben ir ampliando según vamos profundizando en el análisis del tema. Esta ampliación se debe ir haciendo conforme vayamos analizando el tema con otros organizadores del currículo del análisis de contenido y también cuando avancemos en los otros análisis del análisis didáctico. Recordemos que el análisis didáctico es un procedimiento cíclico y que todos los análisis se realimentan entre sí. El organizador del currículo historia es de tipo transversal y también puede ayudar a ampliar este listado de elementos.

Aunque la organización de los elementos según los campos y niveles considerados arroja claridad en la estructura del tema, sigue siendo un listado y, como tal, tiene también ciertos inconvenientes. Entre ellos, destacamos el hecho de que el profesor no sepa cuándo debe dar por finalizado un listado: ¿hasta dónde llegar con el listado?, ¿cuándo parar de identificar elementos?, ¿a qué grado de precisión debe llegar en cada lista?, ¿hasta dónde llega una lista y comienza otra? Además, independientemente de la extensión de los listados, hay un problema común que hace referencia a cómo establecer relaciones entre los elementos del listado o entre los elementos de un listado con los elementos de otro. Pueden surgir otros inconvenientes, pero consideramos que estos son suficientes como para plantearse otra forma de presentar la información.

3.3 Utilización de los mapas conceptuales para representar la estructura conceptual

Nuestra propuesta, aunque somos conscientes de que no es la única, es utilizar los mapas conceptuales como herramienta para representar los elementos del campo conceptual y del campo procedimental. Esto evita los inconvenientes presentados para los listados de elementos. El mapa conceptual se puede elaborar a partir de los diferentes elementos identificados, tratando de establecer relaciones entre los elementos del campo conceptual, entre los elementos del campo procedimental, y entre unos y otros. Además, este trabajo puede ayudar a identificar nuevos elementos relacionados con el tema con motivo del esfuerzo que se realiza para organizar la información. La descripción de una estructura conceptual en uno o más mapas conceptuales implica tomar decisiones sobre los elementos de los listados que se incluyen en él. Por razones de espacio, usualmente nos centramos en establecer los conceptos y procedimientos más relevantes y relacionarlos entre sí. Los hechos, al ser casos o aspectos particulares de los conceptos, no se representan usualmente dentro de los mapas conceptuales. En algunas ocasiones los incluimos como ejemplos de lo que queremos representar. Por otro lado, la representación de la estructura conceptual en los mapas conceptuales no debe restringirse únicamente a los conceptos y sus relaciones. Debemos identificar también los procedimientos, como representación de esas relaciones entre los conceptos.

Estructura conceptual de los números naturales

En la figura 1 recogemos un ejemplo de mapa conceptual del sistema métrico decimal, perteneciente a los números naturales. Este es el mismo tema del que hemos presentado un listado de elementos anteriormente. Este mapa conceptual representa, en realidad, una estructura matemática y en él se han establecido relaciones entre algunos de los elementos de los listados producidos anteriormente. Como lo mencionamos en el párrafo anterior, con el propósito de mantener un tamaño del mapa conceptual que se pueda presentar en una página, no se incluyen la mayoría de los términos, notaciones y convenios propuestos. Al buscar representar el tema, este ejemplo de mapa conceptual se centra en los conceptos y en las relaciones entre los conceptos. Por esa misma razón, solamente aparecen algunos de los múltiples procedimientos que están involucrados en el tema.

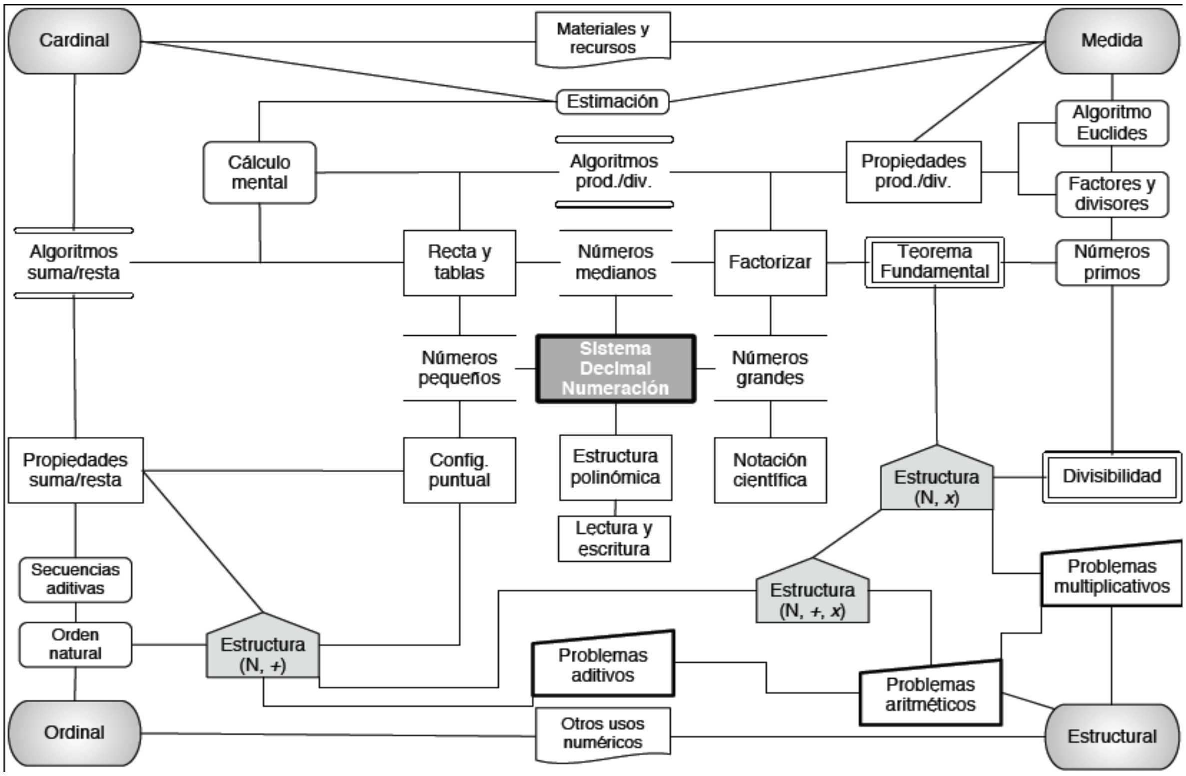


Figura 1. Mapa conceptual del sistema decimal de numeración
(Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008, p. 7)

Estructura conceptual del teorema de Pitágoras

A modo de ejemplo, recogemos en la figura 2 un mapa conceptual para el teorema de Pitágoras. En este mapa conceptual, hay elementos del campo conceptual y procedimental que no se habían considerado inicialmente en la organización de los listados de elementos por niveles. Es frecuente que, en el esfuerzo por establecer relaciones entre elementos del campo conceptual, surjan nuevos elementos del campo procedimental. Esto hace que hayan enriquecido la estructura conceptual del teorema de Pitágoras con motivo de las relaciones que han establecido entre los elementos para la elaboración del mapa conceptual. Marín (2011) presenta otro mapa conceptual de la estructura conceptual del mismo tema. Podemos tener diferentes mapas conceptuales del mismo tema, a pesar de haber partido de un listado de elementos similar. Esto refleja la posibilidad de organizar de distintas formas válidas la información de la que se dispone. Lo importante es recoger los elementos (tanto del campo conceptual como del procedimental) que se consideren más relevantes para el tema y que se establezcan las relaciones entre ellos de forma adecuada.

Guardia et al. (2009) recogen en un mapa conceptual (ver figura 2) la estructura conceptual del teorema de Pitágoras, con el nivel de detalle que permite el tamaño de la página. A medida que vayamos profundizando en el análisis del tema, tendremos la necesidad de incluir más información en el mapa conceptual. Este será el caso, por ejemplo, cuando busquemos ubicar más procedimientos o mayor detalle en la descripción de los conceptos. Utilizamos varios mapas conceptuales para representar mayor cantidad de información que conectamos entre sí, de tal forma que podamos presentar la información en un documento. Se puede ver un ejemplo de este esquema de presentación en Gómez y Carulla (2001). Se pueden ver otros ejemplos de mapas conceptuales en los informes finales de MAD 1 (Gómez, en prensa).

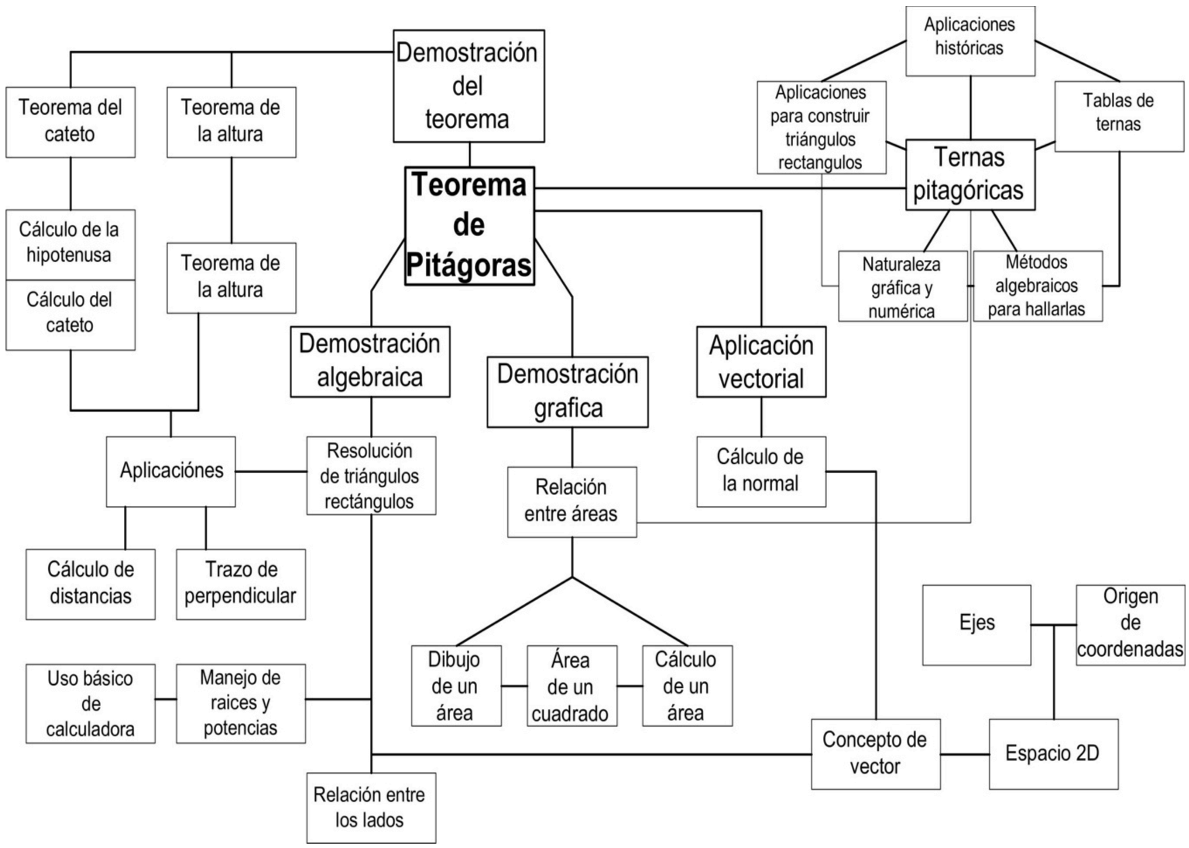


Figura 2. Mapa conceptual de la estructura conceptual del teorema de Pitágoras (Guardia et. al., 2009)

3.4 Procedimientos en la estructura conceptual

Los procedimientos son elementos tan importantes como los conceptos en la estructura conceptual. En ocasiones, los mapas conceptuales no permiten recoger todos los procedimientos que se identifican y que resultan relevantes para un tema de las matemáticas escolares. Es importante resaltar ciertos procedimientos por su trascendencia para el trabajo de un tema. Más adelante se verá que estos procedimientos son claves para otras componentes del análisis didáctico (por ejemplo, para el análisis cognitivo). Algunos de los procedimientos más importantes surgirán una vez que analicemos el tema desde la perspectiva de los sistemas de representación y la fenomenología. Por esa razón, es importante mejorar y complementar nuestra estructura conceptual original una vez se hayan hecho los análisis con los otros organizadores del currículo del análisis de contenido.

En el ejemplo del teorema de Pitágoras, podemos considerar varios procedimientos que no aparecen en el mapa conceptual de la estructura conceptual (figura 1). Marín (2011) menciona, por ejemplo, el procedimiento para trazar perpendiculares (a partir de las ternas pitagóricas y en relación con la construcción de triángulos rectángulos, ver figura 2), y el uso del teorema de Pitágoras para el cálculo de áreas, el cálculo de longitudes y volúmenes, o para la resolución de triángulos rectángulos.

3.5 Contraejemplos de elementos de la estructura conceptual

No es fácil determinar el campo al que pertenece un determinado elemento y el nivel dentro de ese campo en el que se debe ubicar. Presentamos a continuación algunos ejemplos de elementos del teorema de Pitágoras que algunos estudiantes que abordaron este tema no ubicaron en el lugar que les correspondía.

Un primer ejemplo lo constituyen las ternas pitagóricas, que fueron consideradas como hechos. Sin embargo, entendidas como el conjunto de las ternas constituidas por números cuya relación numérica verifica el teorema de Pitágoras, sería más adecuado considerarlo como concepto, ya que no se corresponden con las unidades básicas de información. Ejemplos específicos de ternas como (3, 4, 5) son hechos.

La construcción de ternas pitagóricas no es un concepto, tal y como se consideró en un trabajo anterior y debe ser parte del campo procedimental. Dado un número *a*, se puede construir la terna pitagórica considerando $\frac{1}{2}(a^2-1)$ y $\frac{1}{2}(a^2+1)$ como segundo y tercer términos de la terna. Aunque la construcción de la terna se basa en las relaciones numéricas entre los elementos de la terna, es un elemento del campo procedimental. Igualmente, demostrar gráfica o algebraicamente diferentes propiedades asociadas al teorema de Pitágoras son parte del campo procedimental (razonamientos) y no del conceptual.

3.6 Identificación de focos de contenido

En el análisis de contenido se pueden dar dos situaciones: (a) que se haya identificado un foco de contenido desde un comienzo, en cuyo caso es importante comenzar por una descripción de la estructura matemática en la que se incluye, a través de una descripción de la estructura conceptual más general; o (b) que tengamos una estructura matemática, dentro de la que haya que identificar focos de contenido para realizar el análisis de contenido. En este sub-apartado abordamos la primera situación; y, en el siguiente, la segunda situación.

Como identificamos en el sub-apartado 1.1 de estos apuntes, los focos de contenido constituyen el nivel más específico de los contenidos. Los definimos como agrupaciones de elementos de los campos conceptual y procedimental.

El análisis de contenido proporciona información útil para el análisis didáctico si se realiza sobre focos de contenido. En algunas ocasiones, se realizan análisis de contenido de estructuras matemáticas, como es el caso de los números naturales, presentado anteriormente. En ese caso, la estructura conceptual corresponde a esa estructura matemática y, dentro de ella, se ubican los focos de contenido. En MAD 2, nos centramos en el análisis de contenido de un foco de contenido. Tendremos entonces que describir en un mapa conceptual la estructura matemática de la que ese foco de contenido forma parte.

La identificación de focos de contenido puede partir de considerar una estructura matemática amplia dentro de la que focalizamos la atención en alguna de sus parcelas. La concreción de un foco de contenido debe tener en cuenta el currículo del nivel educativo en el que se vaya a implementar la unidad didáctica. Esto hace que centremos la atención en los elementos de la estructura matemática que se han de considerar e identifiquemos aquellos que quedarán fuera del tratamiento que se hace del tema en ese nivel educativo.

A continuación presentamos dos ejemplos de focos de contenido en dos temas, a los que se ha llegado a través de las dos aproximaciones presentadas: (a) a partir de la detección de núcleos importantes de relaciones en el mapa conceptual de la estructura matemática —números naturales— y (b) a través de los contenidos curriculares del nivel educativo en el que se va a implantar la unidad didáctica —teorema de Pitágoras—. Estas técnicas no son excluyentes, por lo que su consideración conjunta puede aportar riqueza al análisis y permitir justificar la toma de decisiones en la identificación de focos de contenido.

Focos de contenido de los números naturales

En la figura 3 se delimitan con diferentes tipos de líneas, diversos focos de contenido a partir del mapa conceptual de la figura 1. Por ejemplo, el sistema decimal de numeración se considera un foco de contenido de los números naturales porque agrupa elementos de los campos conceptual y procedimental relacionados entre sí, y constituye una parte coherente de la estructura matemática.

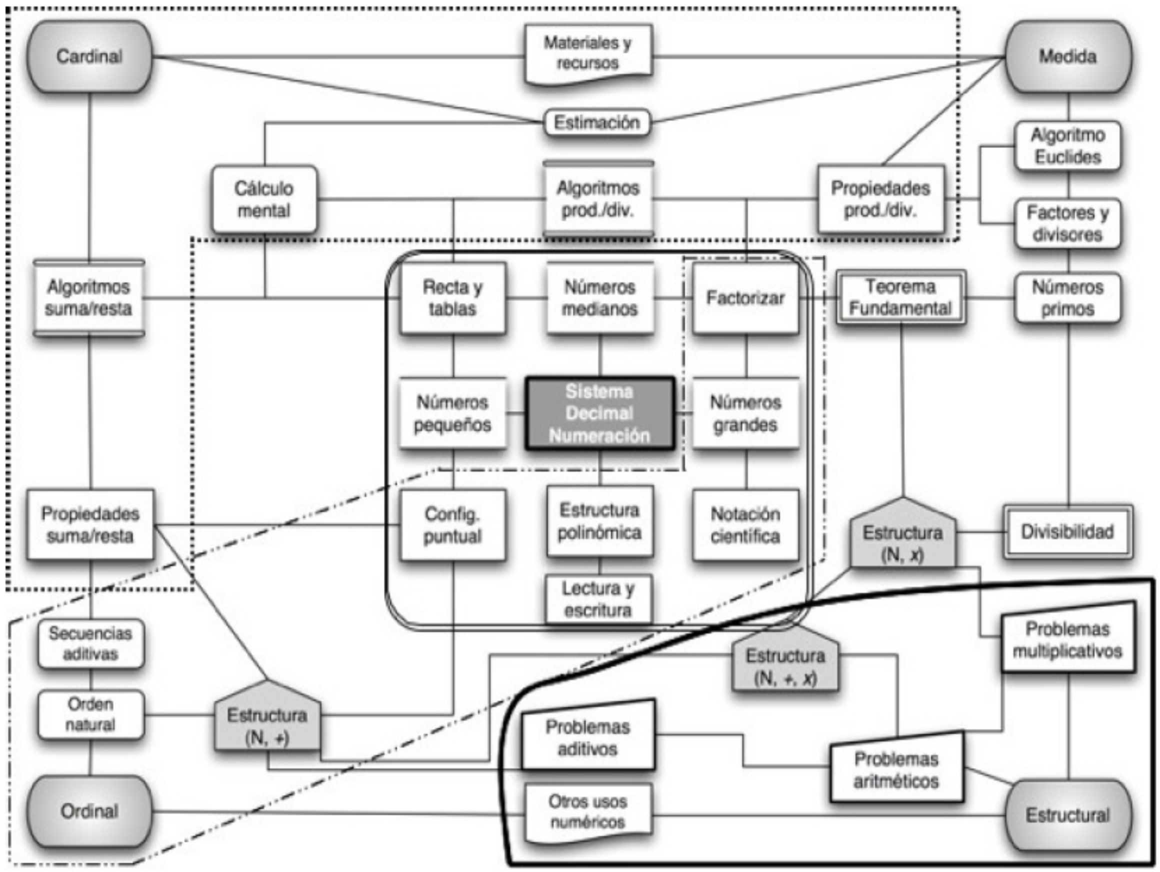


Figura 3. Focos de contenido de los números naturales

Focos de contenido de los sistemas de ecuaciones con dos incógnitas
En el trabajo de Bernal, Castro, Pinzón, Torres y Romero (en prensa) encontramos un mapa conceptual de la estructura matemática —sistemas de ecuaciones con dos incógnitas— en la que se ubica su foco de contenido —método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos variables— (ver figura 4).

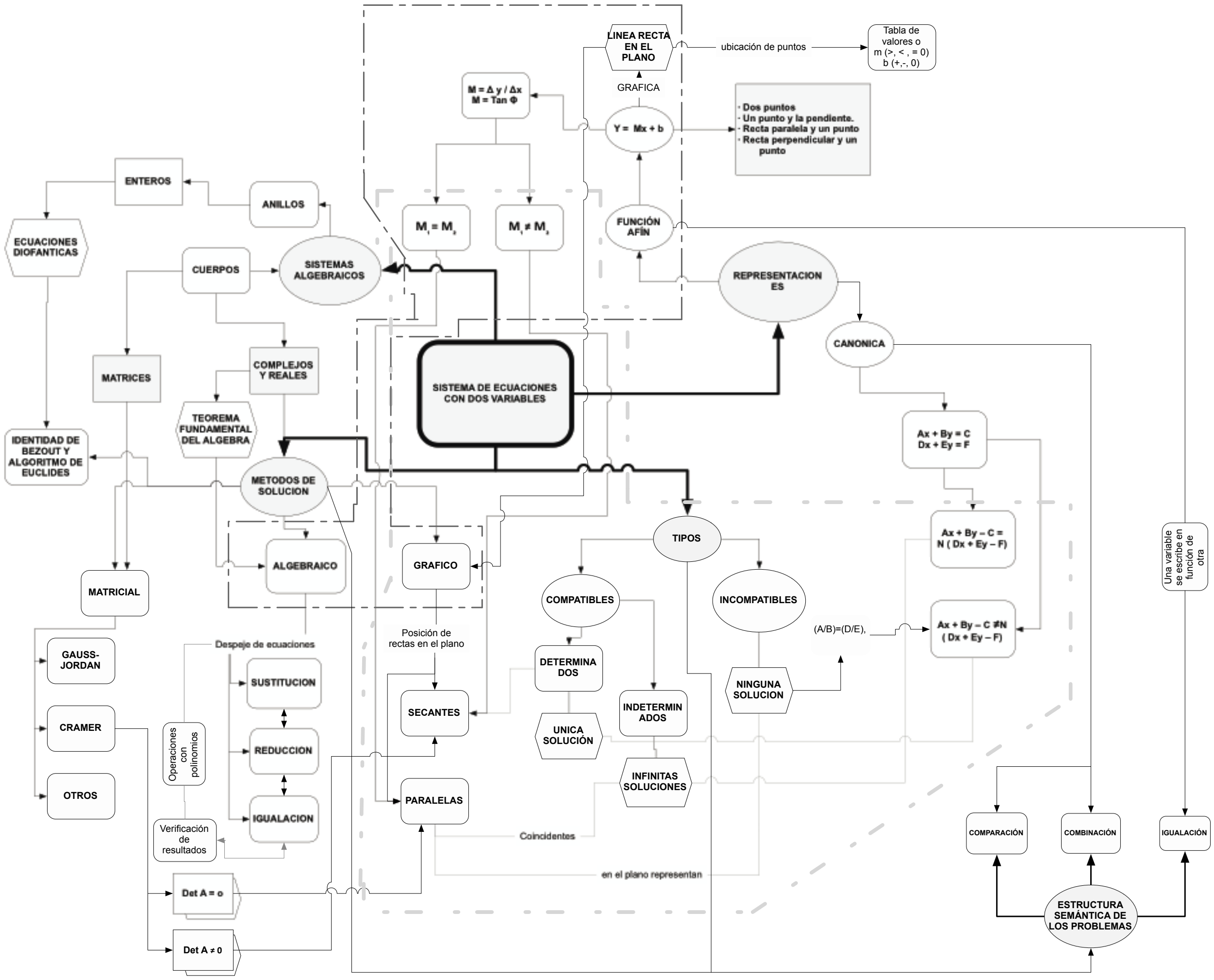


Figura 4. Mapa conceptual de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas

Los autores identifican diferentes focos de contenido de esta estructura matemática y abordan uno de ellos: el método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos variables (ver figura 5).

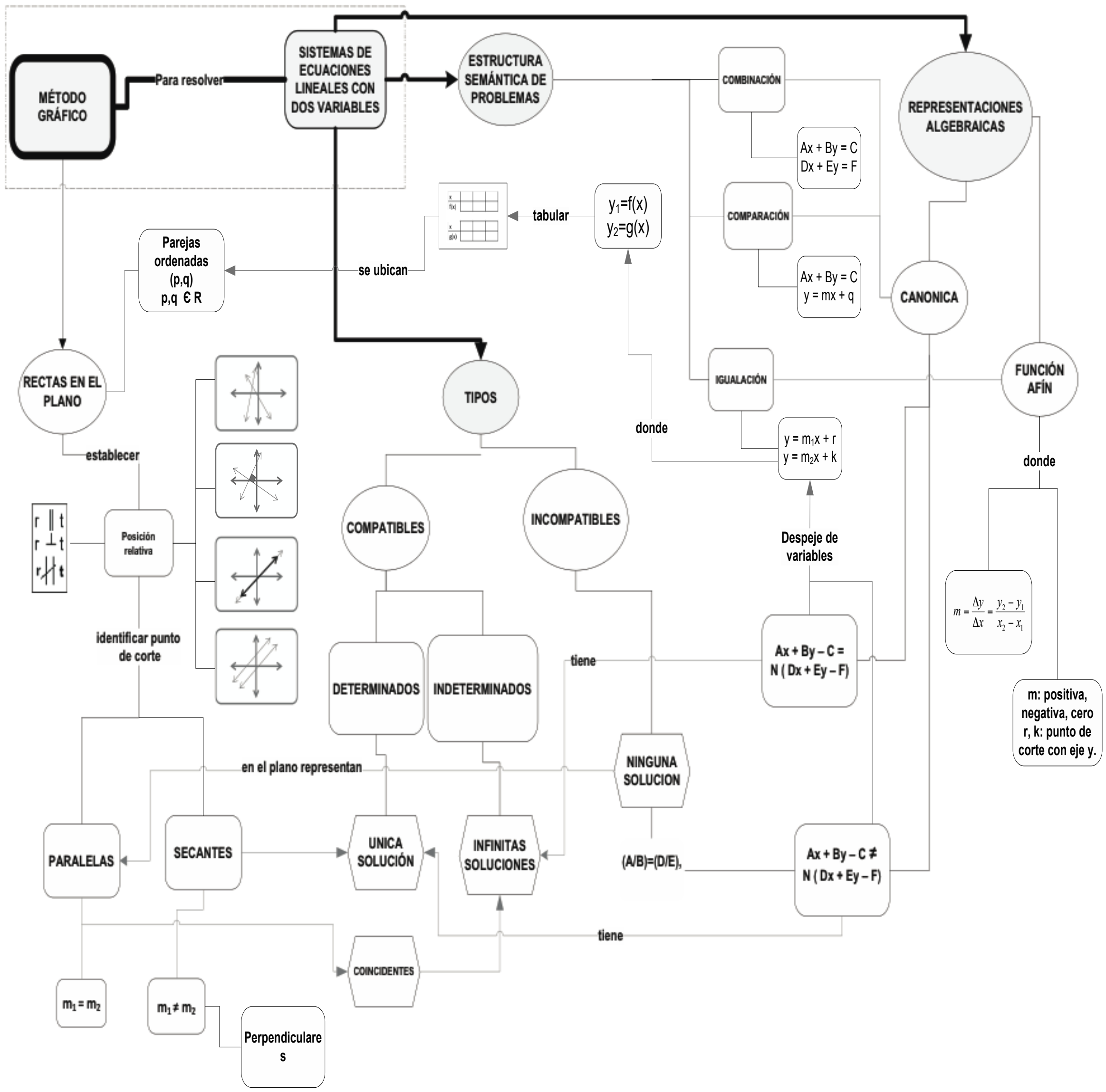


Figura 5. Mapa conceptual del método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos variables

3.7 De un foco de contenido a la estructura matemática

Cuando abordamos el análisis de contenido partiendo de un foco de contenido, como es el caso en MAD 2, entonces el análisis con el organizador del currículo estructura conceptual implica los dos pasos que acabamos de presentar, pero en sentido inverso. Debemos (a) construir la estructura conceptual de la estructura matemática de la cual el foco de contenido forma parte y (b) construir la estructura conceptual del foco de contenido. Con la primera estructura conceptual, identificaremos los principales conceptos involucrados y ubicamos el foco de contenido como parte coherente de la estructura matemática analizada. Esta primera estructura conceptual nos puede proporcionar información relevante, por ejemplo, de cara a identificar conocimientos previos de los estudiantes o temas para los que el foco de contenido será relevante posteriormente. En la segunda estructura conceptual, podremos describir en detalle los conceptos, procedimientos y sus relaciones del foco de contenido, de cara a los análisis posteriores del análisis didáctico.

4. Sistemas de representación

Los sistemas de representación constituyen el segundo de los organizadores del currículo que vertebran el análisis de contenido. Una de las tradiciones en Educación Matemática es hablar de sistemas de representación para hacer referencia a los sistemas de signos que permiten designar un concepto. Seguimos el trabajo de Kaput (1992) y consideramos que un sistema de representación es "un sistema de reglas para (i) identificar o crear signos, (ii) operar sobre y con ellos y (iii) determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia)" (p. 523). Las reglas a las que hace referencia Kaput determinan cómo crear un signo que pertenezca al sistema, cómo reconocer si un signo dado pertenece a él, y cómo transformar unos signos en otros, estableciendo relaciones entre ellos.

La definición de Kaput enfatiza el carácter sistémico de la noción[2]. Un sistema de representación está compuesto por signos que se ciñen a unas reglas. Estas reglas determinan cómo crear un signo que pertenezca al sistema, cómo reconocer si un signo dado pertenece a él, y cómo transformar unos signos en otros, estableciendo relaciones entre ellos. Para que las reglas y signos que caracterizan a un sistema de representación adquieran un sentido concreto, deben referirse a una estructura matemática particular. Por ejemplo, podemos considerar el plano cartesiano como un sistema de representación. Su utilización implica una reglas básicas que incluyen, por ejemplo, la disposición de unos ejes, la determinación de unas unidades de medida para ellos y el procedimiento para identificar y caracterizar un punto del plano en función de su posición con respecto a los ejes. Pero, las reglas que determinan qué signos pertenecen a dicho sistema dependen de qué estructura matemática pretendamos representar en él, dado que nuestro propósito es representar los objetos matemáticos que configuran dicha estructura matemática. Por lo tanto, el sistema de representación gráfico de las funciones en el plano cartesiano implica un conjunto de reglas (para la creación y operación de signos en él) que es diferente del sistema de representación gráfico de los números complejos en el plano cartesiano.

Dado que un mismo concepto o estructura matemática se puede representar en diferentes sistemas de representación, es posible agrupar y caracterizar, en cuatro categorías, las operaciones que se pueden realizar sobre los signos que pertenecen a esos sistemas de representación:

1. *Creación y presentación de signos o expresiones*. Esta operación permite determinar expresiones válidas e inválidas. Por ejemplo, las expresiones $f(x) = x^2 + 2x + 1$ y $f(x) = (x+1)^2$ son signos de una misma función dentro del sistema de representación simbólico, mientras que $(x)f = 3x^2 + 2$ es un ejemplo de una expresión inválida en el sistema de representación simbólico para las funciones.

[2] Los siguientes párrafos, hasta la figura 7, han sido tomados literalmente de Gómez (2007, pp. 43-44).

2. *Transformación sintáctica invariante*. Esta operación se refiere a la transformación de un signo en otro, dentro de un mismo sistema de representación, sin que el objeto matemático designado por esos signos cambie. Es el caso, por ejemplo, de los procedimientos de completación de cuadrados, expansión y factorización que se muestran en la figura 7.
3. *Transformación sintáctica variante*. Esta operación se refiere a la transformación de un signo en otro, dentro de un mismo sistema de representación, en la que el objeto matemático designado cambia. Es el caso, por ejemplo, de las traslaciones horizontal y vertical que se muestran en la figura 7.
4. *Traducción entre sistemas de representación*. Esta operación se refiere al procedimiento en virtud del cual se establece la relación entre dos signos que designan un mismo objeto pero que pertenecen a diferentes sistemas de representación. Por ejemplo, $f(x)=(x+1)^2$ y la representación de la figura 6 son representaciones del mismo objeto en diferentes sistemas de representación (simbólico y gráfico, respectivamente).

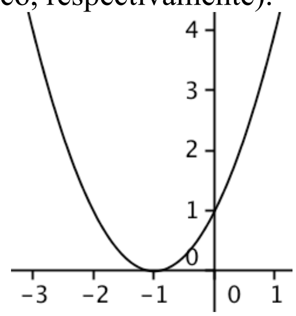


Figura 6. Representación gráfica de $f(x)=(x+1)^2$

Las relaciones entre los parámetros de las formas simbólicas de la función cuadrática y sus representaciones gráficas en la parábola de la figura 7 ponen también de manifiesto esta cuarta operación.

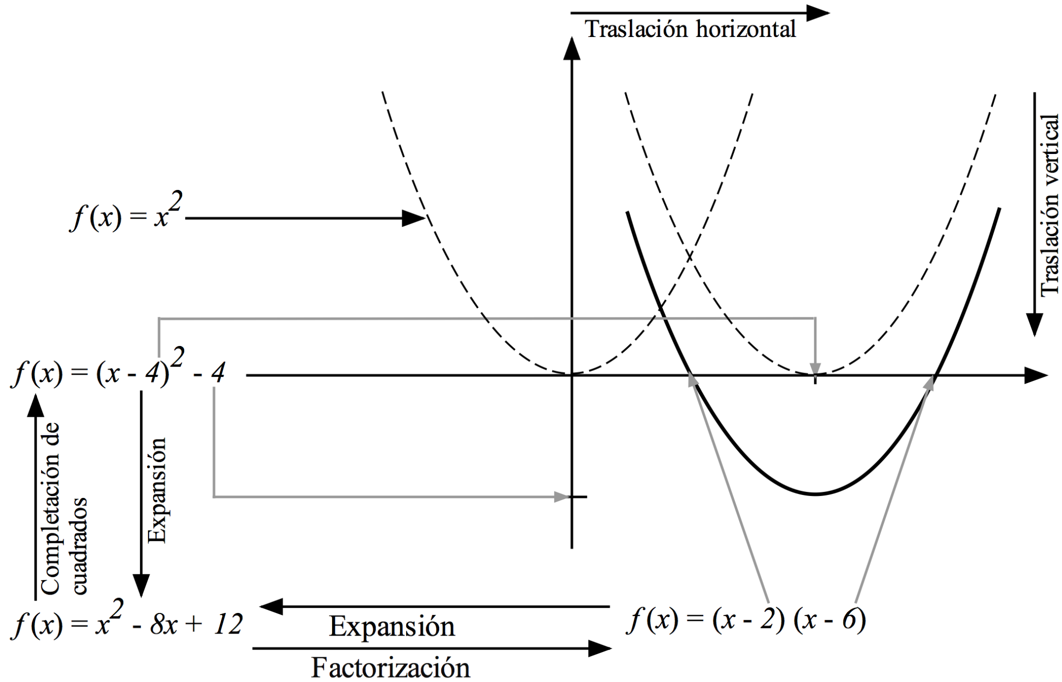


Figura 7. Operaciones en los sistemas de representación

4.2 Papel de los sistemas de representación en el análisis de contenido

Dentro del análisis de contenido, los sistemas de representación como organizador del currículo, permiten dar respuestas a las siguientes cuestiones.

- ¿Qué representaciones hay asociadas al tema?
- ¿Qué relaciones se pueden establecer entre esas representaciones?

Para dar respuestas a estas preguntas, el profesor puede

- determinar los diferentes sistemas de representación en los que se puede representar el tema e
- identificar las relaciones entre esos sistemas de representación (que, en algunos casos, serán procedimientos).

Analizar cómo se expresan los elementos de la estructura conceptual y cuáles de esas formas de expresión constituyen sistemas de representación puede ayudar a conocer los significados del tema desde la perspectiva de los sistemas de representación. En los siguientes sub-apartados presentamos algunos ejemplos de los sistemas de representación de diferentes temas de las matemáticas escolares.

Aunque los sistemas de representación permiten "identificar los modos en que el concepto se presenta" (Gómez, 2007), es importante ser cuidadosos al identificar los sistemas de representación de un tema de las matemáticas escolares porque cualquier modo de expresar un concepto no es un sistema de representación. Se deben cumplir las condiciones indicadas anteriormente. Usualmente se consideran los siguientes sistemas de representación: (a) numérico, (b) simbólico,

(c) tabular, (d) gráfico, (e) geométrico, (f) pictórico, (g) verbal, (h) manipulativo, (i) tabular y (j) ejecutable (relacionado con las TIC).

Dado que los temas matemáticos tienen sus propias características, no todos los sistemas de representación juegan el mismo papel en todos los temas. Por ejemplo, el sistema de representación gráfico juega un papel importante en el tema de la función cuadrática (ver Gómez, 2002). Sin embargo, este sistema de representación no tiene la misma relevancia en temas como el teorema de Pitágoras. A continuación, presentamos algunos sistemas de representación utilizados para diferentes temas en los que tienen sentido.

4.3 Sistema de representación numérico

El sistema de numeración decimal está compuesto por los símbolos llamados números cuya representación numérica es 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Las expresiones 9, $3+4+2$, $\frac{27}{3}$, 3^2 o $\sqrt{81}$ son representaciones numéricas del mismo número.

Para el caso de las funciones, dando valores a la variable independiente, podemos obtener pares ordenados. Para la función $f(x)=(x+1)^2$, (0,1), (1,4) o (3,16) son ejemplos de pares ordenados. En este caso, los signos son las parejas de valores numéricos que toman las variables (independiente y dependiente). Existe un convenio por el que el primer valor del par es el valor de la variable independiente y el segundo es el valor de la variable dependiente.

4.4 Sistema de representación simbólico

Las expresiones $f(x)=(x+1)^2$ y $f(x)=x^2+2x+1$ pertenecen al sistema de representación simbólico. Se puede considerar un sistema de representación específico porque tiene sus propios signos (números, letras y símbolos de las operaciones aritméticas), se puede operar con ellos y existe una relación entre ellos. Por ejemplo, se puede comprobar que las dos expresiones son equivalentes (representan la misma función) utilizando transformaciones sintácticas invariantes: $(x+1)^2=(x+1)(x+1)=x^2+x+x+1=x^2+2x+1$.

4.5 Sistema de representación tabular

El sistema de representación tabular está estrechamente ligado al sistema de representación numérico pero tiene sus propios signos y reglas de combinación de los mismos. En la tabla 2 recogemos un ejemplo para el caso de la función expresada algebraicamente como $f(x)=y=(x+1)^2$.

Tabla 2

Valores de $f(x)=(x+1)^2$ en el sistema de representación tabular

x	$y=f(x)$
-3	4
-2	1

Tabla 2

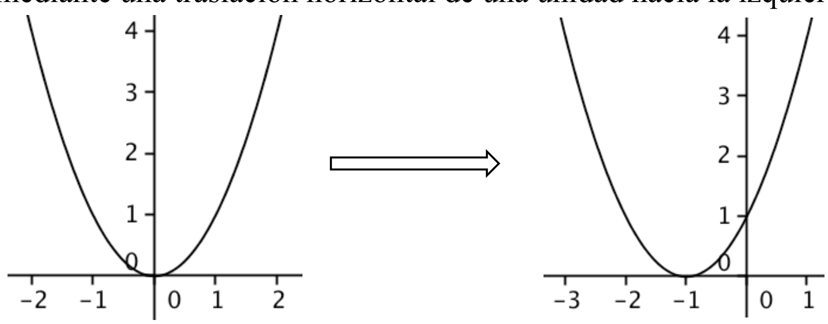
Valores de $f(x)=(x+1)^2$ en el sistema de representación tabular

x	$y = f(x)$
-1	0
0	1
1	4

Las variables (x e y) se sitúan como títulos de las columnas, siendo la variable independiente la que se ubica a la izquierda. Los valores numéricos de ambas variables se ponen de forma que el valor de la variable independiente está en la misma fila del valor de la variable dependiente que se corresponde con él. Por tanto, la información que se presenta en las filas y las columnas de la tabla es clave y forma parte de las normas de este sistema de representación.

4.6 Sistema de representación gráfico

En la figura 8 hemos presentado una representación gráfica de la función $f(x)=(x+1)^2$. En este caso —el gráfico cartesiano— los valores y las escalas empleadas en los ejes del diagrama y el trazado de la función constituyen los signos y existe una serie de reglas que permiten relacionarlos entre sí. Una forma de llegar a esa representación gráfica es dar valores en la propia función a la variable independiente (pasando ya sea por el sistema de representación numérico o el sistema de representación tabular). Otra manera es partir de la representación gráfica de la parábola principal $f(x)=x^2$ y, a partir de ella, aplicar las reglas para llegar a la representación gráfica de $f(x)=(x+1)^2$, mediante una traslación horizontal de una unidad hacia la izquierda (figura 8).



$f(x)=x^2$ $\qquad$ $f(x)=(x+1)^2$

Figura 8. Traslación horizontal de una parábola

4.7 Sistema de representación verbal

El sistema de representación verbal genera controversias porque no se reduce a la lectura de lo que se expresa de otro modo mediante otros sistemas de representación. Por ejemplo, las expresiones verbales "un número por la mitad de ese número" y "equis por equis medios" son equivalentes pero, sin embargo, ponen de manifiesto diferentes propiedades de los elementos matemáticos involucrados. En este caso, la segunda expresión se corresponde con la lectura literal de la expresión algebraica $x \times \frac{x}{2}$. El sistema de representación verbal tiene sentido, por lo tanto, cuando el lenguaje nos permite referirnos a los conceptos y procedimientos matemáticos que queremos representar. Es el caso, por ejemplo, de los números naturales para los que el lenguaje natural incluye términos y convenios que nos permiten referirnos a ellos. Hay temas de las matemáticas escolares a los que no nos podemos referir con el lenguaje natural.

4.8 Sistema de representación geométrico

El sistema de representación geométrico es útil para representar la multiplicación de números naturales y su resultado. Por ejemplo, para representar la multiplicación de 4×3, se puede construir un rectángulo con cuatro unidades de largo y tres de ancho (ver figura 9). Contando el número total de cuadrados, se tiene el resultado de la multiplicación.

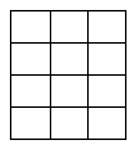


Figura 9. Representación geométrica para la multiplicación 4×3

4.9 Sistema de representación pictórico

En la figura 10 utilizamos el sistema de representación pictórico para expresar el cardinal de un número de elementos (círculos) y cómo se utiliza la agrupación para determinar la cardinalidad de un conjunto de 23 círculos. Cada círculo representa cada uno de los elementos del conjunto. Se hacen tantos grupos de diez como se pueda y finalmente se cuentan el número de círculos sueltos y el número de grupos de 10 círculos. En el ejemplo serían 23 círculos.

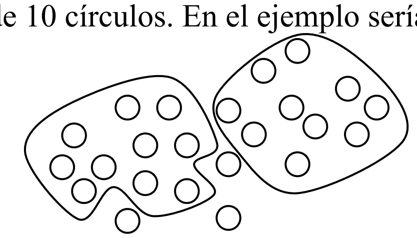


Figura 10. Determinar la cardinalidad por agrupación

Una forma de contar de cinco en cinco un determinado número de palotes es representar cada número por un palote y se hacen bloques de cinco mediante la representación de cuatro palotes y un quinto que los tacha. Finalmente, el cardinal del conjunto de palotes es la cantidad del número de bloques de cinco palotes más lo que haya sueltos. En la figura 11 representamos el número $13\ (5x2+3)$ mediante esta representación pictórica.

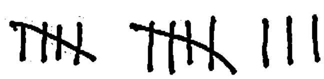


Figura 11. Contar de cinco en cinco

4.10 Sistema de representación manipulativo

El sistema de representación manipulativo presenta dificultades porque, en ocasiones, se confunde con los recursos o materiales didácticos. Conviene ser cautos porque son pocos los recursos que se constituyen como verdaderos sistemas de representación manipulativos. Como siempre, debemos comprobar que cumplen las características para ser un sistema de representación. Por ejemplo, el ábaco sí es un sistema de representación para los números naturales porque tiene sus propios elementos (bolitas y varillas) y sus propias reglas para la construcción de números. Estas reglas son diferentes de las del sistema de representación simbólico, porque el ábaco es aditivo y posicional, pero no es multiplicativo. Otros recursos como el papel, el lápiz, la pizarra y la tiza no son sistemas de representación. Se trata de recursos y medios para representar determinados elementos. La tabla 2 es un ejemplo del sistema de representación tabular. Esto no implica que cuando la representemos en el papel va a ser un sistema de representación y si lo hacemos en la pizarra va a ser otro, puesto que sus elementos y sus reglas de combinación son las mismas. Lo único que hacemos es variar el medio en el que la representamos.

4.11 Sistema de representación ejecutable (relacionado con las TIC)

Este tipo de sistemas de representación están asociados a programas o applets que cumplen las características requeridas para cualquier sistema de representación para un tema determinado de las matemáticas escolares. Existen materiales virtuales que imitan a los materiales manipulativos. Si la virtualización cumple con la existencia de elementos específicos, con unas reglas para combinarlos y operar con ellos, se puede considerar un sistema de representación; no, en otro caso. Programas de geometría dinámica como el Cabri o el Geogebra se consideran sistemas de representación para diversos temas de la geometría o el álgebra porque tienen elementos propios y sus propias reglas para representar, combinar y operar con esos elementos. Por ejemplo, una representación gráfica en Geogebra de la función $f(x)=(x+1)^2$ tiene sus propios elementos en el programa y, una vez conseguida esa representación gráfica, tiene unas características diferentes de las del sistema de representación gráfico.

4.12 Sistemas de representación de los números naturales

Siguiendo el trabajo presentado en la estructura conceptual y haciendo una revisión histórica (Ifrah, 1997), consideramos cuatro tipos de sistemas de representación para los números naturales: (a) simbólico, (b) verbal, (c) gráfico y (d) los que suministran los materiales manipulativos.

Sistema de representación numérico

En la cultura occidental, los números naturales se representan mediante los signos del 0 al 9. Existen además unas reglas para combinar estos signos y para establecer relaciones entre ellos, por lo que podemos considerar que esa forma de representación constituye un sistema de representación. En nuestro sistema de numeración, el número representado se obtiene multiplicando cada potencia de la base por el valor del símbolo que la precede y sumando los resultados junto con las unidades. Por ejemplo, $461=1\times10^0+6\times10^1+4\times10^2$. Por lo tanto, se trata de un sistema de numeración posicional. En otras culturas, como la egipcia, la romana, la babilónica o la china, los números naturales se representan de otro modo. No entraremos aquí en ese detalle. En general, se suele distinguir entre las siguientes características en los sistemas de numeración:

- Simple
- Aditivo
- Multiplicativo
- Posicional

Además, dentro de los tres últimos tipos, se pueden establecer diferencias atendiendo a la base de cada sistema de numeración, siendo la base 10 la que cobra mayor importancia. Esta base está presente en diferentes sistemas de numeración, entre los que se encuentra el sistema de numeración decimal. Como afirmamos con anterioridad, el análisis de contenido se nutre constantemente del trabajo que se va realizando. Así, en caso de que no se haya considerado, la base sería un elemento del campo conceptual que hay que considerar.

El hecho de expresar un número natural como resultado de operaciones con otros números constituye otra forma de representar ese número y hace necesario mencionar las relaciones aritméticas entre números. En el caso de la estructura multiplicativa, el Teorema Fundamental de la Aritmética asegura que existe una única forma de expresar un número en función de sus factores y algunas propiedades multiplicativas. Esto también requiere de una revisión de la estructura conceptual.

Sistema de representación verbal

En los números naturales, distinguimos la terminología que se emplea para representar los números naturales pequeños y los convenios que existen para combinar estos para formar números medianos, y números grandes. Así, leemos 101 como "cientouno" (y no de otras formas que se nos podrían ocurrir por la forma de descomponerse). Para números grandes, utilizamos términos como "billón", "trillón", "mega" o "tera". Teniendo en cuenta las reglas y los convenios que se establecen entre los cardinales y los ordinales, también se puede hablar de un sistema de representación verbal para el caso de los ordinales. Este sistema de representación hace que, por ejemplo, expresemos el lugar 42 como "cuadragésimo-segundo".

Sistema de representación pictórico

Las configuraciones puntuales constituyen un ejemplo de sistema de representación pictórico para algunas relaciones entre números naturales. En la figura 12 recogemos los números poligonales de diferente orden.

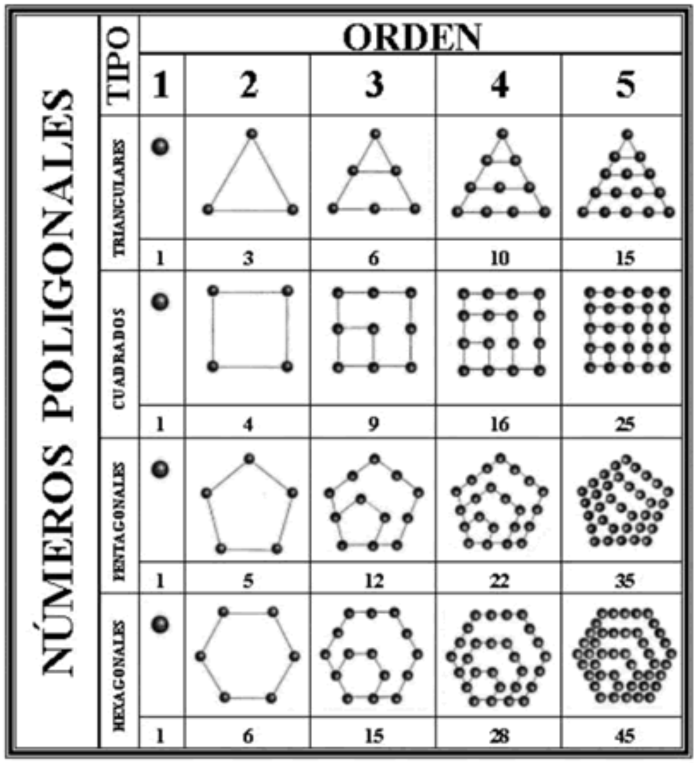


Figura 12. Números poligonales

Estas representaciones permiten observar propiedades que no son perceptibles en su expresión simbólica decimal. Por ejemplo, todo número cuadrado es suma de números impares consecutivos, o todo número triangular es la mitad del producto de números consecutivos. Estas propiedades, se expresarían simbólicamente como $n+n+1$ y $\frac{n(n+1)}{2}$, respectivamente. Para un estudio más detenido de los números poligonales, se pueden consultar los trabajos de la doctora Castro (Castro, 1995; Castro, Rico y Castro, 1995).

Sistema de representación tabular

La representación tabular permite establecer las relaciones numéricas que se observan en los números triangulares mostrados en la figura 13 (ver tabla 3).

Tabla 3

Números triangulares

n	Puntos
1	1
2	3
3	6
4	10
…	…

Las tablas numéricas constituyen otro sistema de representación para los números naturales. Nos centraremos en la tabla 100 (figura 13).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 13. Tabla 100

Dentro de esa tabla, podemos trazar una serie de cuadrados y de otros polígonos que ponen de manifiesto diferentes propiedades aritméticas entre los números que hay en el interior de esos cuadrados. En la figura 14 mostramos un ejemplo.

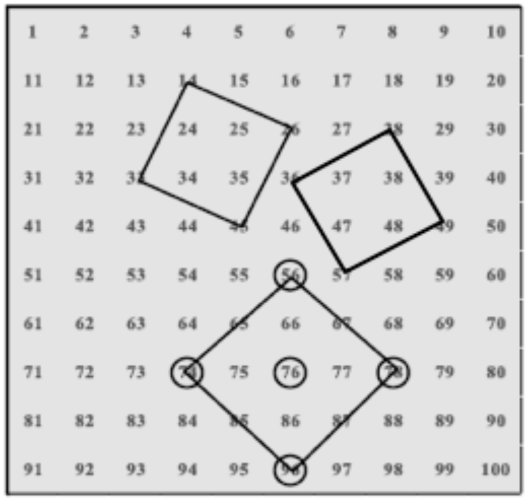


Figura 14. Cuadrados apoyados sobre un vértice en la tabla 100

En los cuadrados superiores de la figura 14, observamos que la suma de los números que se encuentran en la línea que delimita el polígono es igual a la suma de los números internos del polígono. En el cuadrado inferior, la suma de los números que hay en los vértices es igual a la suma de los números interiores excepto el central ($56+78+96+74=66+75+77+86$). Se trata de relaciones numéricas que se observan en la tabla 100 y no en el sistema decimal de numeración.

Sistema de representación gráfico

Los valores recogidos en la tabla 3 pueden ser expresados a través de un gráfico cartesiano, como se muestra en la figura 15.

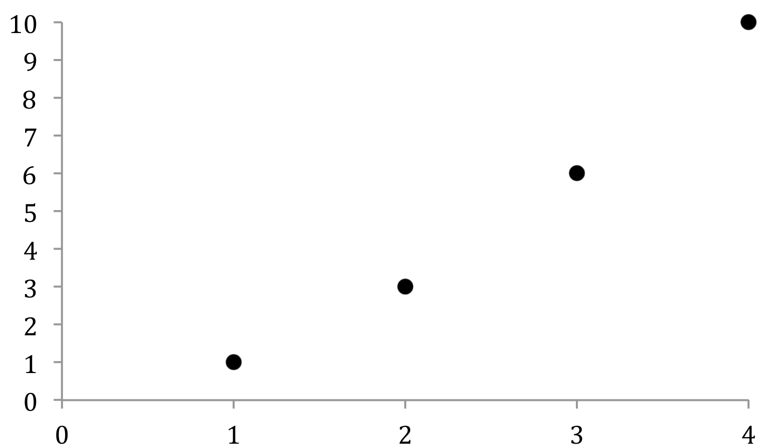


Figura 15. Representación gráfica de los números triangulares de la tabla 3

La recta numérica constituye un sistema de representación gráfico para los números naturales. Podemos partir de una semirrecta y un segmento unidad y, tomando el extremo de la semirrecta como origen (O), por reiteración del segmento unidad, se pueden formar las representaciones de los restantes números naturales (figura 16).

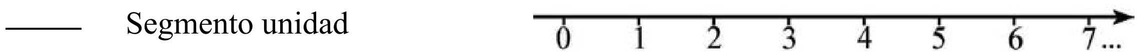


Figura 16. Recta numérica

La relación entre este sistema de representación y el simbólico es claro, ya que se puede deducir que el punto 3 resulta como consecuencia de haber unido por los extremos tres segmentos unidad. Simbólicamente, esto es equivalente a expresar $3 = 1 + 1 + 1$.

Sistema de representación asociados a materiales manipulativos

Los siguientes son materiales que se pueden considerar sistemas de representación para los números naturales, porque cumplen con las condiciones establecidas por (Kaput, 1992):

- Ábaco
- Regletas Cuissenaire
- Material del sistema decimal de numeración y bloques multibase
- Plaquetas de Herbiniére-Lèbert

En el esquema de la figura 17 recogemos los diferentes sistemas de representación para los números naturales que hemos presentado en los sub-apartados previos.

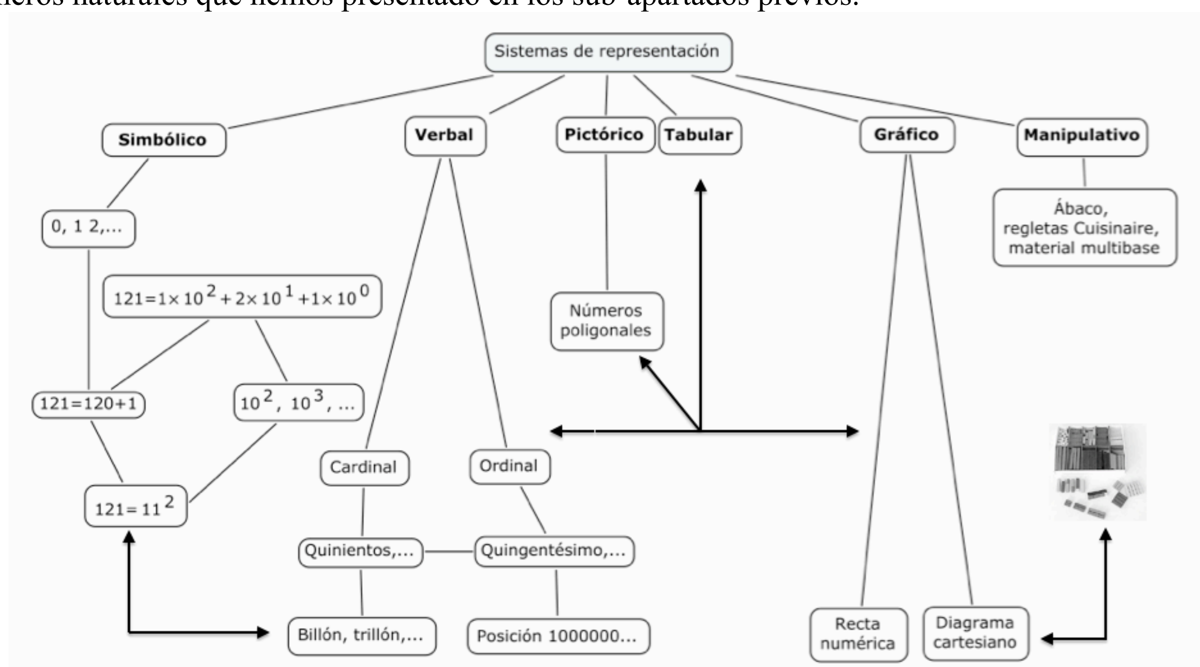


Figura 17. Sistemas de representación de los números naturales

4.13 Sistemas de representación del teorema de Pitágoras

Consideramos los sistemas de representación simbólico, tabular, verbal, ejecutable (TIC), geométrico y manipulativo.

Sistema de representación simbólico
Usualmente se suele distinguir entre los enunciados simbólico y geométrico del teorema de Pitágoras. En el sistema de representación simbólico, si a y b representan las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo y h su hipotenusa, se cumple que: $a^2 + b^2 = h^2$. Con las relaciones entre a, b y h presentadas, (a, b, h) constituye una representación simbólica de las ternas pitagóricas. La generalización del teorema y el contra-recíproco del mismo también se suelen expresar simbólicamente.

Sistema de representación numérico
Los ejemplos de ternas pitagóricas se pueden expresar numéricamente: (1, 3, 10), (2, 5, 29) o (4, 4, 32) son algunas de ellas.

Sistema de representación tabular
Las ternas pitagóricas presentadas como ejemplos en el sistema de representación simbólico (numérico) se pueden expresar de forma tabular como mostramos en la tabla 4.

Tabla 4
Ejemplos de ternas pitagóricas en el sistema de representación tabular

a	b	$a^2 + b^2$
1	3	10
2	5	29
4	4	32

Sistema de representación verbal
"La suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa" es el enunciado verbal del propio teorema de Pitágoras. Términos como "catetos" o "hipotenusa" cobran una importancia destacada para expresar unos elementos determinados dentro del teorema.

Si consideramos la aproximación geométrica del teorema, que se refiere a la relación existente entre las áreas de los cuadrados que se pueden construir sobre los lados de un triángulo rectángulo, de forma equivalente a lo que afirma el enunciado algebraico, se afirma que "la suma de las áreas de los cuadrados que se pueden construir tomando como lados los catetos de un triángulo rectángulo es igual al área del cuadrado que se puede construir tomando como lado la hipotenusa".

Sistema de representación geométrico
La expresión geométrica del teorema de Pitágoras queda expresada en el sistema de representación geométrico como mostramos en la figura 18.

Figura 18. Representación geométrica del teorema

El teorema de Pitágoras tiene muchas demostraciones. Algunas de ellas se expresan en el sistema de representación geométrico. Desde la matemática formal, algunas de estas argumentaciones no son consideradas demostraciones, por lo que podríamos hablar de justificaciones, ya que no se observa la posibilidad de generalizar el caso particular que representa el dibujo. En las imágenes de la figura 19 presentamos una de ellas.

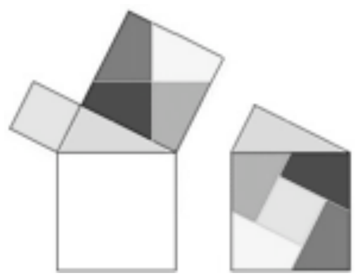


Figura 19. Demostración geométrica del teorema

Sistemas de representación manipulativos

Las regletas Cuissenaire, los geoplanos o los tangrams son puzles que constituyen un sistema de representación específico porque tienen sus elementos propios y sus reglas para la combinación de los mismos. En la figura 20 mostramos un caso de expresión del teorema mediante el tangram chino.

Figura 20. Justificación[3] con tangram chino

[3] En este caso, por las características del tangram chino, esta justificación es válida para triángulos rectángulos isósceles.

Sistemas de representación ejecutables (TIC)
La representación en programas de geometría dinámica como el Cabri o el Geogebra de un triángulo rectángulo y de los cuadrados que se pueden construir sobre sus tres lados permite obtener una figura dinámica. Si fijamos los vértices de los cuadrados a los vértices del triángulo rectángulo, se observa que las relaciones entre las figuras se mantienen aunque se varíen las longitudes del triángulo rectángulo del que partimos. En la figura 21 presentamos un mapa conceptual general para los sistemas de representación del teorema de Pitágoras.

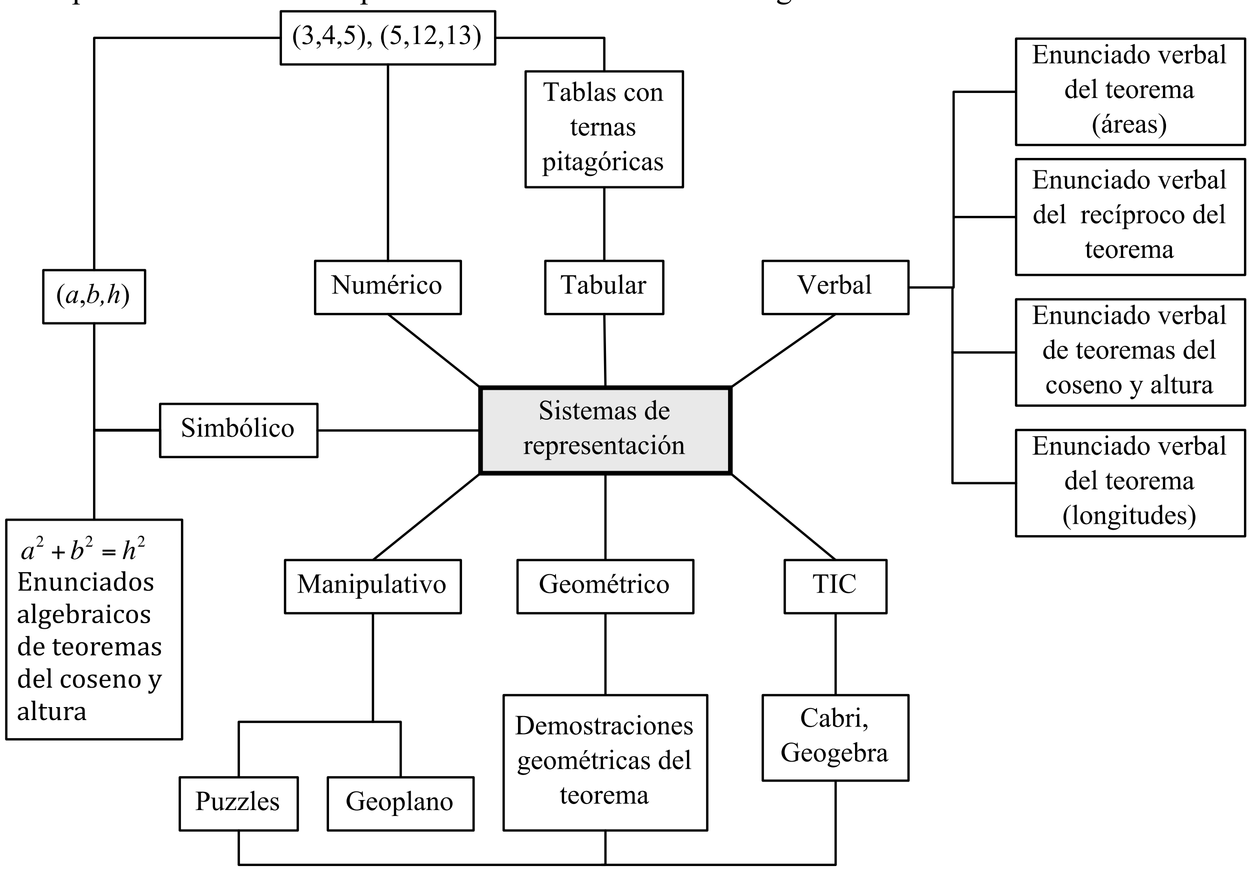


Figura 21. Sistemas de representación del teorema de Pitágoras

De nuevo insistimos en la importancia de establecer relaciones entre las diferentes formas de expresar los elementos mostrados en los ejemplos en diferentes sistemas de representación. Aunque en la figura 21 no se han trazado todas las líneas que pueden relacionar los siete sistemas de representación considerados para el teorema de Pitágoras, están relacionados a través de la caja central (sistemas de representación). Por ejemplo, se pueden utilizar los puzles para demostrar el teorema de Pitágoras expresado verbalmente según áreas, o expresar las ternas pitagóricas mediante el geoplano. Estos dos procedimientos surgen de las relaciones que se establecen entre sistemas de representación. Es importante establecer las relaciones entre los diferentes sistemas de representación o las transformaciones dentro de un mismo sistema de representación porque pueden ayudar a enriquecer la estructura conceptual y poner de manifiesto o sacar a la luz elementos del campo procedimental. En el caso del teorema de Pitágoras, el cálculo de áreas implica, por un lado, procedimientos gráficos de transformación que permiten establecer los triángulos rectángulos implicados y las medidas de sus lados. Por el otro lado, también implica procedimientos de traducción entre sistemas de representación al expresar simbólicamente la relación entre esas medidas con base en el teorema de Pitágoras. Estas expresiones simbólicas se transforman dentro del sistema de representación simbólica de cara a obtener las medidas de las áreas.

4.14 Contraejemplos en sistemas de representación

Como hemos apuntado anteriormente, la distinción entre sistema de representación y el modo en que se expresa un determinado elemento genera dificultades. Presentamos a continuación algunos ejemplos de propuestas hechas por estudiantes para diversos temas y que no son sistemas de representación.

Editor de ecuaciones como sistema de representación de las ecuaciones lineales. El editor de ecuaciones no es un sistema de representación porque no existe un conjunto de reglas que establezcan cómo se transforman unos elementos en otros. La transformación de una expresión en otra equivalente en el editor de ecuaciones se rige por las reglas algebraicas, las mismas que seguimos cuando resolvemos una ecuación lineal con lápiz y papel. Por tanto, como no existen unas normas propias del editor de ecuaciones para estas transformaciones, no se puede considerar un sistema de representación.

Cinta métrica como sistema de representación de los números naturales. La cinta métrica no es un sistema de representación, pues se sirve de los elementos existentes para la recta numérica. En este caso, se trata de un instrumento para medir longitudes expresadas en números naturales pero no de un sistema de representación.

Semicírculo graduado como sistema de representación de los triángulos. El semicírculo no es un sistema de representación, si no una herramienta para medir ángulos. Al igual que en los ejemplos anteriores, no existen unos elementos y unas reglas propias para la relación entre los elementos.

El goniómetro como sistema de representación en trigonometría. El razonamiento es análogo al anterior, tratándose de un instrumento de medida de ángulos.

4.15 Procedimientos relacionados con los sistemas de representación

En los ejemplos que hemos presentado en este apartado hay casos en los que se observan transformaciones dentro de un mismo sistema de representación de un mismo elemento (transformaciones sintácticas invariantes), transformaciones dentro de un mismo sistema de representación de diferentes elementos (transformaciones sintácticas variantes) y traducciones que se producen entre diferentes sistemas de representación utilizados para representar un mismo elemento.

Por ejemplo, las transformaciones presentadas anteriormente para un mismo elemento expresado algebraicamente, $(x+1)^2 = (x+1)(x+1) = x^2 + x + x + 1 = x^2 + 2x + 1$, se producen en el sistema de representación algebraico y se consideran transformaciones sintácticas. La traslación horizontal presentada en la figura 8 de estos apuntes se corresponde con una transformación sintáctica variante. Por otro lado, si de la expresión $f(x) = (x+1)^2$ pasamos a su representación gráfica (figura 6), estamos realizando una traducción entre dos sistemas de representación de un mismo elemento.

Es importante analizar las posibles transformaciones sintácticas en los diferentes sistemas de representación y las traducciones entre sistemas de representación para identificar procedimientos relacionados con el foco de contenido que estemos trabajando. Esta información se debe incluir en la estructura conceptual y se utilizará posteriormente, por ejemplo, en el análisis cognitivo.

5. Fenomenología

La fenomenología es el tercer organizador del currículo del análisis de contenido. Este organizador del currículo se apoya en la información proveniente de la estructura conceptual y los sistemas de representación. Podemos encontrar más información sobre este organizador del currículo y sobre su aprendizaje por parte de profesores en formación en Gómez y Cañadas (2011, 2012, en revisión).

Diferentes países, entre los que se encuentra Colombia (MEN, 2006), están promoviendo una formación matemática en los escolares que desarrolle sus capacidades para enunciar y abordar problemas expuestos en contextos no matemáticos y resolverlos con el uso de las herramientas matemáticas que correspondan. Para ello, los profesores deben "diseñar, analizar y seleccionar tareas que necesiten el uso de conceptos y procedimientos de las matemáticas escolares como herramientas para resolver los problemas que se presentan en diferentes contextos y situaciones" (Gómez y Cañadas, 2011, p. 78). Utilizamos el trabajo de estos autores como base para los apuntes sobre este organizador del currículo.

En Educación Matemática, la noción de fenomenología adquirió una particular relevancia con motivo de los trabajos de Freudenthal (1973, 1983). No obstante, y como lo señala Puig (1997, pp. 62-63), la relación entre las ideas de Freudenthal y la tradición filosófica correspondiente es débil. Puig llama análisis fenomenológico, en el contexto del análisis didáctico de un concepto o estructura matemática, a la descripción de los fenómenos para los que es el medio de organización y de la relación que el concepto o la estructura tiene con esos fenómenos (p. 63). Consideramos que la fenomenología es un "elemento constitutivo del significado de un concepto [que surge] de una visión funcional del currículo, en virtud de la cual los sentidos en los que se usa un término conceptual matemático también incluyen los fenómenos que sustentan el concepto" (Gómez, 2007, p. 50).

Desde la perspectiva de la planificación local, el problema se centra en dar un sentido práctico al propósito de establecer una relación entre una estructura matemática y los grupos de fenómenos asociados a ella. Estas relaciones entre estructura matemática y fenómenos se expresan, por parte de los escolares y a la hora de abordar una tarea, en el proceso de modelización y en las destrezas, los razonamientos y las estrategias que ellos deben desarrollar para identificar el modelo matemático que corresponde a un fenómeno (o a un problema que se refiere a un fenómeno). Este procedimiento implica expresar ese fenómeno o problema en términos de uno o más sistemas de representación, resolver el problema o interpretar el fenómeno dentro de esos sistemas de representación, traducir la solución o la interpretación en términos del fenómeno, y verificar esa solución o interpretación (Gómez, 2007, pp. 87-88).

La fenomenología, como organizador del currículo, permite dar respuesta a las siguientes cuestiones.

- ¿Qué fenómenos dan sentido a mi tema? (Fenómenos)
- ¿Qué subestructuras permiten organizar los fenómenos que dan sentido a mi tema? (Subestructuras)
- ¿Para qué se utiliza mi tema? ¿A qué problemas da respuesta? (Contextos)
- ¿Qué características comparten los fenómenos que dan sentido al tema? ¿Qué subestructuras se relacionan con qué contextos? (Características estructurales y relación entre subestructuras y contextos)
- ¿En qué situaciones está presente mi tema? (Situaciones)

Como hemos recogido entre paréntesis, las subestructuras, los contextos, las características estructurales y las situaciones se suman a los fenómenos como ideas clave de la fenomenología como organizador del currículo. Introducimos estas ideas en los siguientes sub-apartados.

5.1 Fenómenos

La identificación de fenómenos adecuados para un tema constituye el primer paso del análisis fenomenológico. Suele resultar útil comenzar por la elaboración de un listado de fenómenos. En ocasiones, preguntarse sobre los usos del tema y problemas donde se utiliza el tema contribuye a la elaboración del listado. Estos fenómenos, a través del análisis fenomenológico, se podrán organizar según diferentes criterios: (a) contextos, (b) subestructuras y (c) situaciones.

5.2 Contextos

Siguiendo la propuesta de Rico et al. (2008, p. 11), consideramos que

> *Un contexto matemático es un marco en el cual conceptos y estructuras atienden unas funciones, responden a unas necesidades como instrumentos de conocimiento. Los contextos de una determinada estructura se reconocen porque muestran posibles respuestas a la pregunta ¿para que se utilizan estas nociones? El contexto refiere el modo en que se usan los conceptos, en una o varias situaciones.*

Luis Rico y sus colaboradores han venido usando la idea de contexto como herramienta para abordar el análisis fenomenológico de un tema de las matemáticas escolares. Nuestra experiencia en formación de profesores muestra que puede ser útil abordar el análisis fenomenológico a través de dos preguntas:

- ¿para qué se usa el tema matemático?
- ¿a qué problemas da respuesta el tema?

Los fenómenos se agrupan de acuerdo con sus características estructurales —"aquellas características del fenómeno (o de una situación o cuestión relacionada con el fenómeno) que son relevantes desde el punto de vista matemático" (p. 11)— y esas agrupaciones configuran los contextos (Gómez, 2007, p. 54). Al abordar estas preguntas, se espera (a) identificar fenómenos asociados al tema en cuestión y (b) establecer relaciones entre esos fenómenos.

Una vez identificado un listado de fenómenos, el siguiente paso puede ser la identificación de contextos. Entre un listado de fenómenos, encontraremos algunos de ellos que tienen características estructurales comunes. Extendemos la idea de contexto para referirnos a esos grupos de fenómenos. Usamos entonces el término contexto de un tema de las matemáticas escolares para referirnos a la agrupación de todos los fenómenos que comparten una misma característica estructural (Gómez, 2007, p. 55). Organizar los fenómenos asociados a un tema implica identificar lo que los relaciona y lo que los diferencia y agruparlos de acuerdo con esas semejanzas y diferencias para establecer los contextos correspondientes.

En resumen, con la aproximación de identificación de contextos esperamos que los profesores en formación puedan organizar los fenómenos asociados por medio de contextos de acuerdo con las características estructurales que comparten entre sí.

Ejemplo de identificación de contextos en los números naturales

En su ejemplo sobre los números naturales, Rico et al. (2008, pp. 13-14) muestran cómo, al trabajar con los números naturales y pensar para qué se utiliza esta estructura matemática, es posible identificar una variedad de fenómenos asociados a ella. Contar lápices, expresar el número de pendientes, expresar el número de farolas, contar electrones, expresar el número de estudiantes, medir mi altura, contar camisetas, medir el peso atómico de un elemento en el laboratorio, decir cuál es mi lugar en la cola de la carnicería, en qué posición llegué en la carrera de atletismo, expresar la solución de 3+5, mi DNI, medir el área de mi habitación o el código de barras de un cartón de leche son algunos de los fenómenos. No obstante, un listado de fenómenos no es suficiente, dado que el propósito del análisis fenomenológico es establecer de qué manera el tema organiza esos fenómenos. Los contextos proporcionan una forma de organizar los fenómenos, cuando exploramos las características estructurales que comparten entre ellos.

Por ejemplo, contar lápices y contar electrones comparten la misma característica estructural: son circunstancias en las que los números naturales se usan para contar. Lo mismo sucede con medir mi altura y medir el área de mi habitación. En este caso, los números naturales se usan para medir y comparten una misma característica estructural que es diferente de aquella en la que los números naturales se usan para contar. En la tabla 5 mostramos cómo los fenómenos asociados a los números naturales se organizan en diferentes contextos, porque comparten características estructurales que se pueden identificar, en este caso, a través de estudiar los problemas a los que dan respuesta.

Tabla 5

Fenómenos, problemas y contextos

Fenómenos	Problema al que responde	Contexto numérico
Contar lápices, contar electrones, contar camisetas	Contar	Contar
Expresar el número de pendientes, expresar el número de farolas, expresar el número de estudiantes	¿Cuántos hay?	Cardinal
Medir mi altura, medir el peso atómico de un elemento en el laboratorio, medir el área de mi habitación	¿Cuánto mide?	Medida
Decir cuál es mi lugar en la cola de la carnicería, en qué posición llegué en la carrera de atletismo	¿Qué lugar ocupa?	Ordinal
Expresar la solución de una operación aritmética	¿Cuál es el resultado?	Operacional
Mi DNI, el código de barras de un cartón de leche	¿Cuál es el código?	Simbólico

Características estructurales

El análisis fenomenológico no consiste únicamente en identificar y enumerar fenómenos vinculados con un concepto, establecer la relación entre subestructuras y fenómenos y clasificar los fenómenos de acuerdo con las subestructuras con las que están relacionados. En el análisis fenomenológico, se debe también describir esas relaciones. En esta descripción, se deben caracterizar los aspectos relevantes del fenómeno (o del interrogante que da lugar a un problema cuya solución se puede obtener mediante el modelo) que pueden asociarse con elementos y propiedades específicas de la estructura matemática. Por ejemplo, en el caso de los reflectores parabólicos, se pone en juego una propiedad de la parábola, por un lado, y un principio de la física, por el otro (ver figura 22). La propiedad de la parábola establece que la tangente en cualquier punto de la parábola forma ángulos iguales con el segmento que une el punto con el foco y con la recta que pasa por el punto y es paralela al eje de simetría de la parábola. El principio de la física afirma que cuando un rayo choca con una superficie reflectora, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

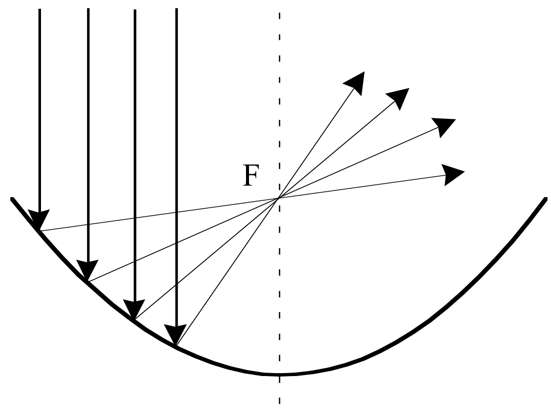


Figura 22. Propiedad óptica de la parábola y principio de la física

5.3 Subestructuras

La segunda forma en la que el profesor puede aproximarse al análisis fenomenológico de un tema consiste en la identificación de subestructuras. La identificación de subestructuras consiste en considerar la estructura conceptual del tema, identificar subestructuras de esa estructura conceptual y explorar si algunas de esas subestructuras organizan grupos de fenómenos. Utilizamos el término subestructura de una manera informal, en contraste con la noción matemática formal de estructura matemática. Una subestructura puede ser una "porción" de la estructura conceptual que, a los ojos del profesor en formación, tenga identidad propia. En algunos casos, estas subestructuras surgen de clasificaciones por tipos. Por ejemplo, los principales tipos de simetrías o los tipos de funciones o ecuaciones. En otros casos, pueden surgir por la identificación de propiedades de los conceptos involucrados en el tema —p. ej., propiedades del foco de la parábola o propiedades de las ternas pitagóricas—.

En nuestra experiencia en formación de profesores de matemáticas hemos visto que la estrategia de identificación de subestructuras es eficiente: ayuda a desbloquear la reflexión sobre qué fenómenos están relacionados con el tema y de qué manera ese tema organiza esos fenómenos.

Motivados por el trabajo de Arco, Ramírez, García y Nogales (2010) sobre transformaciones en el plano, utilizamos el tema de la simetría para ejemplificar esta aproximación. Podemos distinguir diferentes tipos de simetrías (p. ej., axial, de rotación, pentagonal o hexagonal). Los fenómenos asociados a la simetría se pueden organizar de acuerdo con los tipos de simetría. Por ejemplo, los terrenos de juego en los que participan dos equipos —como es el caso de los campos de fútbol, donde uno de los ejes de simetría es la línea de medio campo— pertenecen al grupo de fenómenos organizados por la simetría axial (figura 23).

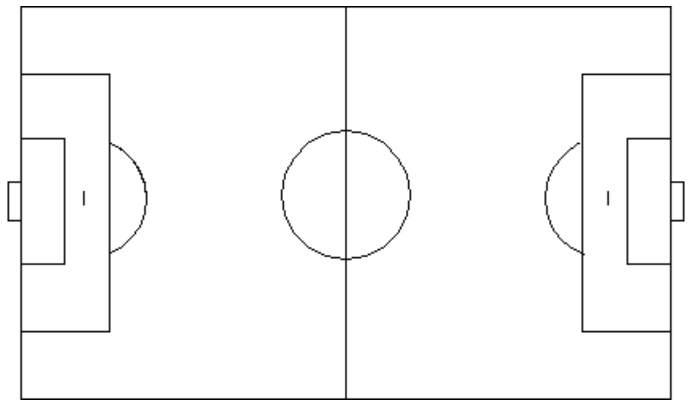


Figura 23. Campo de fútbol

Este mismo ejercicio se puede realizar con otros tipos de simetría: central —moléculas inorgánicas, cinturones de radiación—, pentagonal —estrellas de mar, algunas flores, carambolo— o hexagonal —agua congelada—.

5.4 Relación entre contextos y subestructuras

En el ejemplo de la simetría, los profesores pueden producir un listado de fenómenos y establecer cómo esos fenómenos se agrupan en contextos porque comparten las mismas características estructurales. Por otro lado, ellos también pueden identificar las subestructuras del tema (los diferentes tipo de simetrías) y establecer a qué subestructura corresponde cada fenómeno. De esa manera, se establecen dos formas de organizar los fenómenos: por contextos y subestructuras. Estas dos aproximaciones están relacionadas como se muestra en la figura 24.

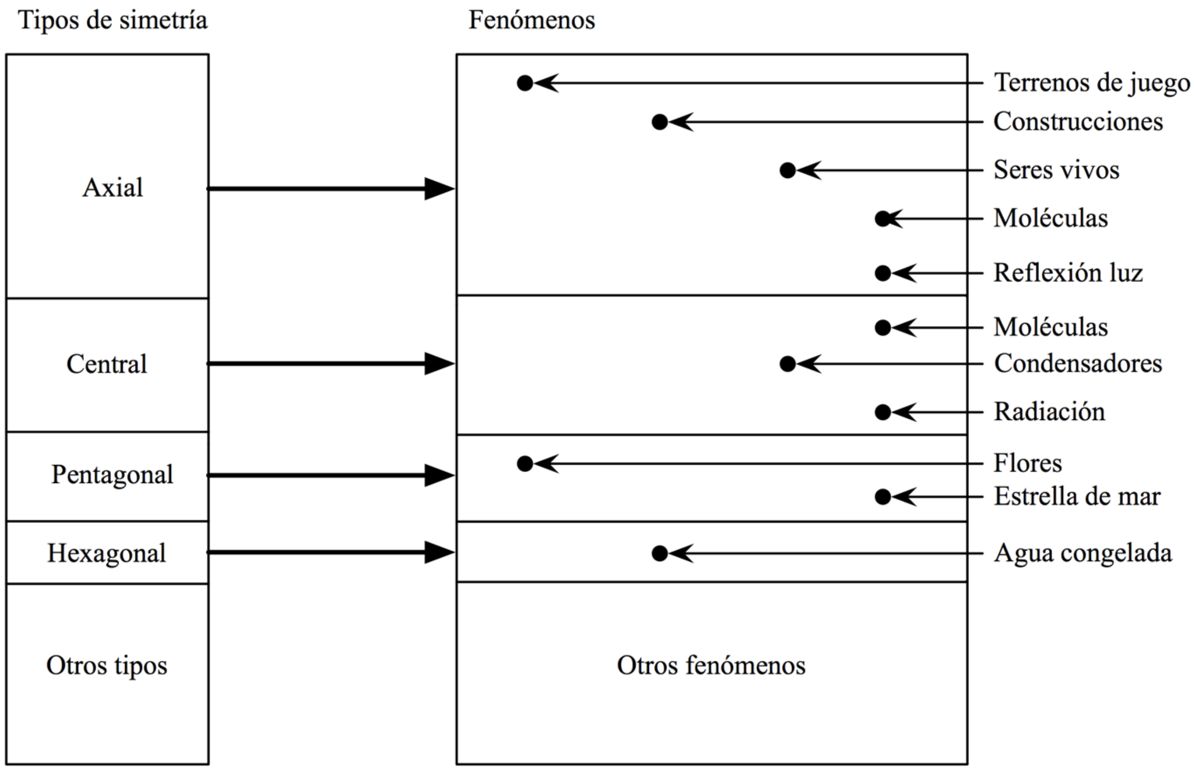


Figura 24. Fenómenos organizados por contextos y subestructuras en las simetrías

Aunque presentamos las dos aproximaciones al análisis fenomenológico como complementarias (identificación de contextos e identificación de subestructuras), una vez que se han intentado usar para un tema, es importante establecer su relación. Rico et al. (2008) describen en detalle esta relación entre subestructuras y contextos para el caso de los números naturales.

En el caso de las simetrías, observamos que el campo de fútbol es un ejemplo del grupo de fenómenos relativos a deportes o juegos en los que hay dos equipos o personas y en los que la delimitación del terreno debe ser tal que las condiciones sean las mismas para los dos contrincantes. Esta es una característica estructural del fenómeno que comparten los juegos y deportes en los que participan dos personas o dos equipos. En el caso de los espejos, la simetría axial surge de otra característica estructural: propiedades de la reflexión de la luz (figura 25).

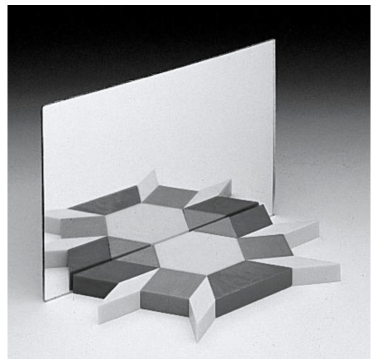


Figura 25. Simetría axial en espejos

Un razonamiento similar a los ejemplos de los juegos o deportes y al de los espejos permite identificar otros grupos de fenómenos que comparten características estructurales que generan la simetría axial (p. ej., en la morfología de los organismos vivos, los condensadores eléctricos, estructuras de reparto de cargas, moléculas orgánicas y arquitectura). Todos estos fenómenos se agrupan en un mismo contexto que corresponde a la subestructura que conocemos como simetría axial. Es posible realizar este mismo trabajo para los otros tipos de simetría: buscar las características que comparten los fenómenos, organizarlos en contextos y establecer la relación de estos contextos con las subestructuras que establecen los diferentes tipos de simetría (figura 27).

Contextos y subestructuras están relacionados y configuran la base con la que un tema matemático organiza los fenómenos asociados a él. Los contextos se delimitan en virtud de principios naturales, sociales o matemáticos —situaciones equivalentes para los dos equipos en el caso de un campo de fútbol o las propiedades de la reflexión de la luz, para la simetría— y las subestructuras organizan los fenómenos en virtud de sus elementos, relaciones y propiedades (figura 26).

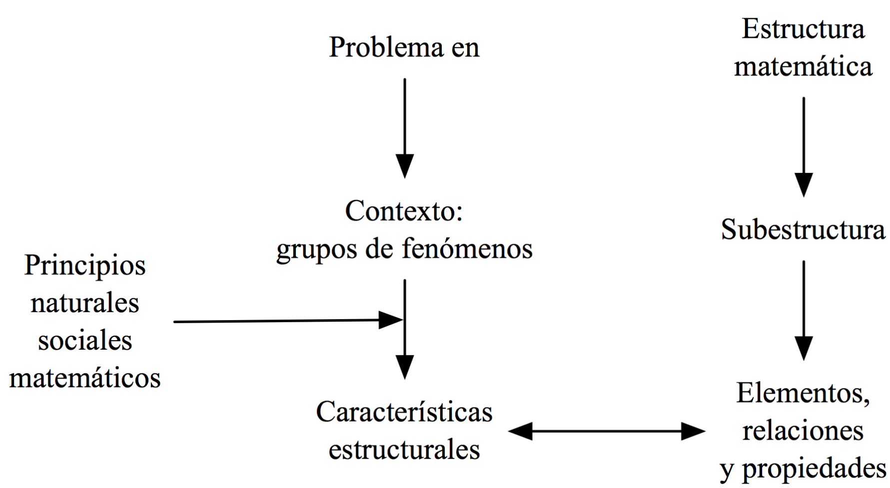


Figura 26. Análisis fenomenológico (Gómez, 2007, p. 55)

El análisis fenomenológico implica entonces identificar el listado de fenómenos que se asocia al tema de las matemáticas escolares que estamos trabajando y establecer cómo el tema organiza ese listado. La estructura matemática organiza los fenómenos de acuerdo con subestructuras que se relacionan biunívocamente con los contextos en los que los fenómenos se agrupan porque comparten las mismas características estructurales. Las subestructuras son parte de la estructura conceptual del tema y cada una de ellas debe permitir organizar un determinado tipo de fenómenos. Cada contexto debe permitir organizar un tipo de fenómenos, de acuerdo con las características estructurales que comparten entre ellos. Estas características estructurales se corresponden con elementos, relaciones y propiedades de la subestructura correspondiente. Por tanto, cada contexto se debe corresponder con una única subestructura, y viceversa.

5.5 Situaciones

A la hora de diseñar y seleccionar tareas para la instrucción los profesores deben tener en cuenta los propósitos de esas tareas. En algunos casos, por ejemplo, se puede buscar motivar a los escolares a través de tareas cercanas a ellos o a su entorno. En otros casos, se puede buscar proponer tareas que relacionen las matemáticas con otras áreas científicas. Para estos propósitos, resulta relevante agrupar los fenómenos de acuerdo con otra clasificación: las situaciones. Por ejemplo, en el estudio PISA, las situaciones se clasifican en personales, educativas o laborales, públicas y científicas (OCDE, 2005, pp. 41-42). La asignación de fenómenos a situaciones no es única. El profesor puede decidir, dependiendo de sus propósitos y de las tareas que pretenda proponer a los escolares, a qué tipo de situación pertenece un fenómeno dado. Por ejemplo, puede considerar las flores como un fenómeno personal, al presentarlo en un contexto de motivación; y considerar la estrella de mar en una situación científica, al introducirlo dentro de una tarea interdisciplinar con el área de Biología. Para las simetrías, considerando las diferentes situaciones de PISA presentamos en la figura 27.

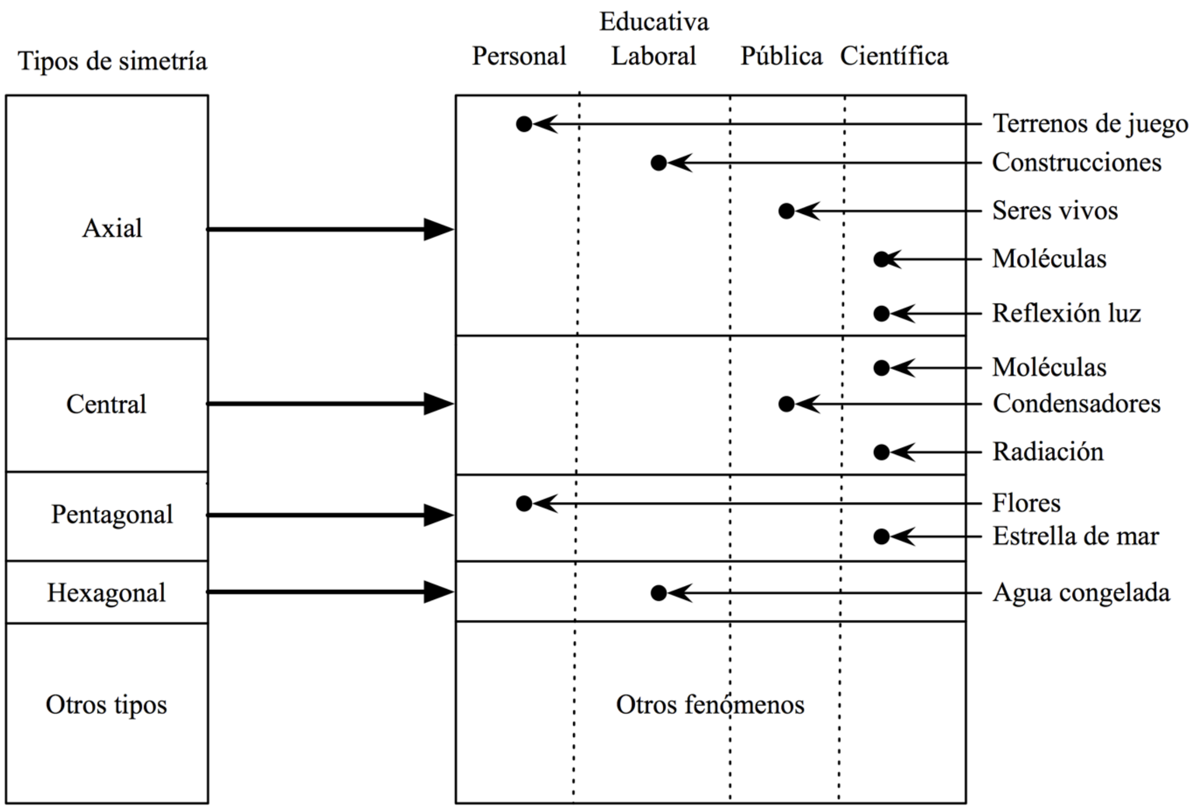


Figura 27. Fenómenos, contextos, subestructuras y situaciones en las simetrías

5.6 Dificultades en el análisis fenomenológico

La fenomenología es el tercero de los organizadores del currículo y utilizamos esta idea para presentar algunas dificultades o errores que se pueden presentar. Establecemos otras dificultades en función de las ideas clave del análisis fenomenológico y sus relaciones.

Relación con otros organizadores

Como dijimos desde un comienzo, todo el trabajo que vamos realizando se nutre de y alimenta al que hemos hecho anteriormente. Por tanto, el organizador fenomenología se nutre de los organizadores estructura conceptual y sistemas de representación. No hacerlo así puede llevar a errores. Por ejemplo, para la determinación de subestructuras matemáticas de un tema es importante tener en cuenta la estructura conceptual. Encontramos que la identificación de las funciones y las sucesiones como subestructuras de un tema matemático (como se ha identificado en algunos trabajos de profesores en formación) es un error porque las sucesiones son un tipo específico de funciones.

Un error identificado en relación con la fenomenología puede ser confundir ideas relacionadas con los sistemas de representación. Por ejemplo un error en los trabajos de profesores en formación ha sido plantear las expresiones algebraicas como subestructura matemática. Esto no es adecuado porque hace referencia a un sistema de representación (simbólico) del tema de las matemáticas escolares y no a una parte de la estructura conceptual.

Ideas clave
La fenomenología suele ser un organizador del currículo difícil de abordar, tanto por el número de ideas que comporta (fenómenos, subestructuras, contextos, características y situaciones), como por las relaciones que se deben establecer entre ellas (Gómez y Cañadas, 2012).

En ocasiones, se pueden confundir los términos situaciones y contextos debido al significado que tienen ambos en el lenguaje cotidiano. Por ello es importante reconocer a qué hace referencia cada término.

Las características estructurales permiten justificar las relaciones entre algunos fenómenos y que permiten englobarlos dentro del mismo contexto. En ocasiones, es una idea clave que cae en el olvido.

Aunque hemos insistido en la relación biunívoca entre contextos y subestructuras, en trabajos previos se identifican relaciones que no cumplen esta característica.

Tanto subestructuras como contextos deben permitir cubrir el tema matemático que se esté trabajando. Por ejemplo, trabajar con las razones trigonométricas y no considerar la cotangente como subestructura matemática es una debilidad en la fenomenología.

6. Balance del análisis de contenido

Como hemos mencionado a lo largo de los apuntes de este módulo, las relaciones entre los elementos dentro de un mismo organizador (conceptos, procedimientos y relaciones entre ellos; sistemas de representación y relaciones entre ellos; e ideas clave de la fenomenología y relaciones entre ellas) y entre diferentes organizadores son importantes. Además, el organizador historia debe aportar información a lo largo del análisis de contenido.

En los apartados anteriores se ha hecho hincapié en las relaciones dentro de cada uno de los tres organizadores del currículo presentados y se espera que se explique el papel jugado por el organizador historia. Sin embargo, para mostrar las relaciones y cómo un organizador del currículo se relaciona con los otros, es necesario dar un paso más Es necesario hacer un esfuerzo por sintetizar toda la información para el foco de contenido que estemos trabajando. Esto se puede hacer de diferentes formas. Una de ellas es mediante un conjunto de mapas conceptuales que den cuenta de la relación que se ha establecido para la información producida con los organizadores del currículo estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología. En Gómez y Carulla (2001) se encuentra un ejemplo de este tipo de mapas conceptuales para el caso de la función cuadrática.

Las relaciones entre la estructura conceptual y los sistemas de representación surgen de diferentes maneras. Cada concepto de la estructura conceptual puede representarse en diferentes sistemas de representación. Esta situación da lugar a la traducción entre sistemas de representación y sugiere un tipo de procedimiento que se debe incluir en la estructura conceptual. Por otro lado, las normas que rigen un sistema de representación dan lugar a que un elemento de la estructura conceptual tenga diferentes formas equivalentes de ser representado en un mismo sistema de representación (transformaciones sintácticas dentro de un sistema de representación). Estas transformaciones sintácticas dan lugar a otros tipos de procedimientos que también deben incluirse en la estructura conceptual. Por consiguiente, el análisis de la relación entre la estructura conceptual y los sistemas de representación es importante: da lugar a identificar buena parte de los procedimientos que deben incluirse en la estructura conceptual y permiten caracterizar con mayor detalle el papel de los sistemas de representación en la descripción del tema.

La relación entre la estructura conceptual y la fenomenología se describió en detalle en los apartados anteriores: hay una relación biunívoca entre subestructuras y contextos. Los fenómenos se organizan en contextos (al compartir características estructurales). Cada contexto se relaciona con una subestructura de la estructura conceptual porque se establece una relación entre los elementos, relaciones y propiedades de esa subestructura con las características estructurales que comparten los fenómenos que pertenecen al contexto.

Finalmente, la relación entre la fenomenología, los sistemas de representación y la estructura conceptual asume gran importancia a la hora de considerar los procesos de modelización que se estudiarán en el módulo 4 de MAD 2. En el análisis fenomenológico se ha insinuado la idea de modelo como una relación biunívoca entre elementos y propiedades de una subestructura de la estructura matemática y características estructurales de fenómenos sociales, naturales y matemáticos. Estas relaciones entre estructura matemática y fenómenos se expresan en el proceso en virtud del cual se identifica el modelo matemático (la subestructura) que corresponde a un fenómeno (o a un problema que se refiere a un fenómeno). De esta forma, ese fenómeno o problema se expresa en términos de uno o más sistemas de representación (Gómez, 2007, pp. 87-88).

7. Referencias

Arco, M. T., Ramírez, J. J., García, A. y Nogales, M. J. (2010). *Análisis fenomenológico de la simetría. Trabajo realizado para el Máster Universitario de Profesorado de Secundaria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (especialidad Matemáticas) de la Universidad de Granada*. Documento no publicado. Granada: Universidad de Granada.

Bernal, M. L., Castro, D. P., Pinzón, Á. A., Torres, Y. F. y Romero, I. (en prensa). Método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones lineales 2x2. En P. Gómez (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1* (pp. 200-260). Bogotá: Universidad de los Andes.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Granada: Comares.

Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Holanda: Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA, 7*(3), 251-293.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Gómez, P. (2012). *Apuntes del módulo 1 de MAD. Primera parte*. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes.

Gómez, P. (en prensa). Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1. Descargado, 2012, de http://tinyurl.com/7blb2nf

Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2011). La fenomenología en la formación de profesores de matemáticas. *Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación, 2*(Especial), 78-89.

Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2012). Dificultades manifestadas por profesores en formación en el aprendizaje del análisis fenomenológico. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática VXI* (pp. 303-312). Baeza, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Gómez, P. y Cañadas, M. C. (en revisión). Dificultades de los profesores de matemáticas en formación en el aprendizaje del análisis fenomenológico. Trabajo en prensa.

Gómez, P. y Carulla, C. (2001). *Sistemas de representación y mapas conceptuales como herramientas para la construcción de modelos pedagógicos en matemáticas*. Bogotá: Grupo Editorial Gaia.

Guardia, D., Montes, F., Páez, S. E. y Schmidt-Kortenbusch, T. (2009). *Unidad didáctica del teorema de Pitágoras. Trabajo realizado en el marco de la asignatura de Didáctica de la Matemática de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Granada*. Documento no publicado. Granada: Universidad de Granada.

Ifrah, G. (1997). *Historia universal de las cifras*. Madrid, España: Espasa Calpe.

Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Granada, Granada, España.

OCDE. (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Madrid, España: Santillana.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona, España: ICE-Horsori.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Barcelona: ice - Horsori.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma, 58*, 7-23.