CB-490

GÉNESIS INSTRUMENTAL DE LA NOCIÓN DE FRACTAL EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS DE NIVEL SECUNDARIO

Daysi Julissa García Cuéllar – Jesús Victoria Flores Salazar – Mihály Martínez Miraval
ra00193072@pucsp.edu.br – jvflores@pucp.pe – martinez.ma@pucp.edu.pe
Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Brasil – Pontificia Universidad Católica del Perú – Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas
TecVEM – IREM, Perú.

Formación del profesorado en matemáticas
Comunicación Breve (CB)
Formación y actualización docente
Palabras clave: Fractales; Geogebra; Génesis Instrumental

Resumen

La presente comunicación breve tiene por objetivo investigar el proceso de génesis instrumental de la noción de fractal en docentes de matemática de nivel secundario de Brasil, México, Cuba, Colombia, entre otros, que participaron de un taller, en el que se movilizó algunas características de la noción de fractal por medio de una secuencia de actividades en la cual los docentes interactuaron con diferentes tecnologías (material concreto y Geogebra) y construyeron por ejemplo, modelos de fractales como el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski, el Copo de hielo de Koch, etc. Utilizamos aspectos del Enfoque Instrumental y del estudio de caso como base teórica y metodológica respectivamente. Las evidencias muestran que la génesis instrumental de la noción de fractal se desarrolló en los docentes participantes al interactuar con las diferentes tecnologías utilizadas en la secuencia de actividades del taller.

Introducción

Fractales, es un concepto con cierto grado de complejidad. Sin embargo, se puede introducir esta noción de una manera sencilla en el aula de matemática en el nivel de secundaria. Por ello, buscamos que los docentes de este nivel se apoderen de algunas características de esta noción y puedan utilizarlo en sus enseñanzas.

Los investigadores Oviedo, Kanashiro y Colombini (2004) explican que, “El termino Fractal está relacionado con la palabra Fractus que significa roto o no entero. Este término es atribuible a Benoit Mandelbrot quien lo empleó para definir ciertos conjuntos de números que describen objetos con dimensión fraccionaria” (p. 11).

ISBN 978-84-945722-3-4

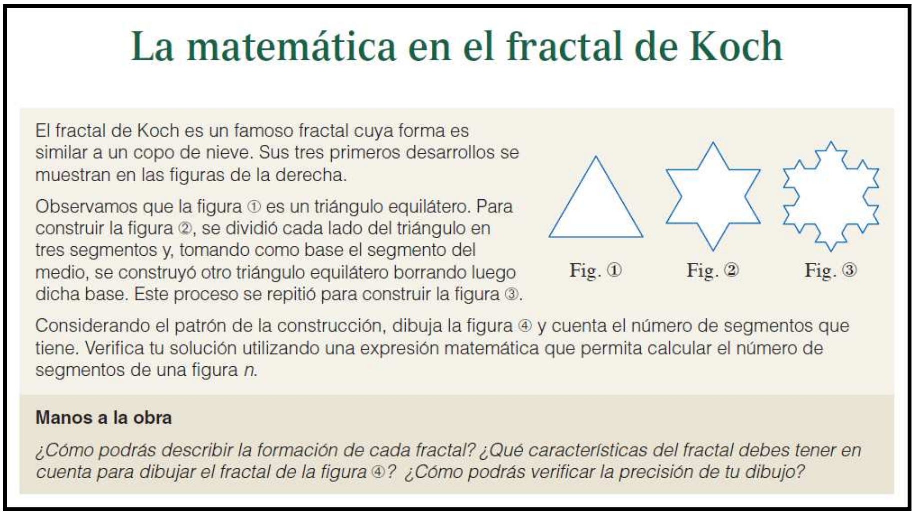
Así mismo, los investigadores mencionan que los fractales son formaciones gráficas que muestran procesos iterativos que tienen una característica en común: repiten procesos infinitos. Por tanto, podemos concebir una construcción fractal como una figura auto-semejante, es decir, todas sus partes tienen repetición a diferentes escalas. Los fractales tienen propiedades específicas de alto valor matemático:

Los fractales son construcciones que se generan a través de iteraciones sucesivas, la construcción de un fractal implica la ejecución de un algoritmo que se repite indefinidamente. Son objetos que se identifican gráficamente y brindan un acercamiento analítico que posibilita explicar sus comportamientos y tienen dimensión fraccionaria.

Acerca de los Fractales

Consideramos que la noción de fractal, es importante porque tiene diversa y destacable aplicabilidad, como por ejemplo en la medicina, en la meteorología, la economía e incluso en la misma naturaleza.

La noción de fractal se ha ido introduciendo en el currículo de matemática de diferentes países de Latinoamérica y específicamente en el Perú. Tal es así que en el texto del área de matemática del VII ciclo de Educación Básica Regular del Ministerio de Educación del Perú-MINEDU, texto para estudiantes de 13 a 14 años de edad, muestra actividades relacionadas a la noción de Fractal, como se muestra la figura 2.


La matemática en el fractal de Koch

El fractal de Koch es un famoso fractal cuya forma es similar a un copo de nieve. Sus tres primeros desarrollos se muestran en las figuras de la derecha.

Observamos que la figura ① es un triángulo equilátero. Para construir la figura ②, se dividió cada lado del triángulo en tres segmentos y, tomando como base el segmento del medio, se construyó otro triángulo equilátero borrando luego dicha base. Este proceso se repitió para construir la figura ③.

Fig. ① Fig. ② Fig. ③

Considerando el patrón de la construcción, dibuja la figura ④ y cuenta el número de segmentos que tiene. Verifica tu solución utilizando una expresión matemática que permita calcular el número de segmentos de una figura *n*.

Manos a la obra

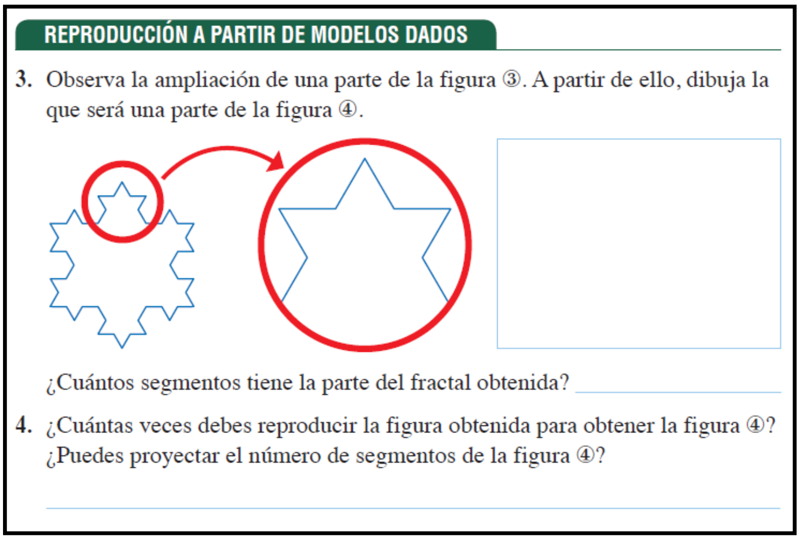
¿Cómo podrás describir la formación de cada fractal? ¿Qué características del fractal debes tener en cuenta para dibujar el fractal de la figura ④? ¿Cómo podrás verificar la precisión de tu dibujo?

Figura 1. Actividad extraída del Libro matemática 3 del MINEDU.

Fuente: Perú (2016, p.140)

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Como se evidencia, en la figura anterior, se presenta el fractal de Koch donde los estudiantes deben describir la formación de cada fractal, identificar sus características, así como la reproducción de un modelo dado. Sin embargo, no se menciona qué es un fractal. Ello se puede observar también en la siguiente actividad que muestra la figura 2.


REPRODUCCIÓN A PARTIR DE MODELOS DADOS

3. Observa la ampliación de una parte de la figura ③. A partir de ello, dibuja la que será una parte de la figura ④.

¿Cuántos segmentos tiene la parte del fractal obtenida? ______

4. ¿Cuántas veces debes reproducir la figura obtenida para obtener la figura ④? ¿Puedes proyectar el número de segmentos de la figura ④?

Figura 2. Actividad extraída del Libro matemática 3 del MINEDU.

Fuente: Perú (2016, p.140)

Por lo anterior, el taller tuvo los siguientes objetivos: realizar actividades que permitan la instrumentalización de las características de la noción de fractal en el aula desde una manera sencilla; reflexionar sobre cómo esta noción compleja se puede trabajar en el aula con estudiantes de educación secundaria; abordar otros contenidos referentes a las características de los fractales como es la semejanza de figuras, progresión, área, perímetro, operaciones con fracciones, etc.

Enfoque Instrumental

Utilizamos el Enfoque Instrumental dado por Rabardel (1995), para la elaboración de las actividades pues nos brinda las directrices necesarias para el estudio en escenarios de enseñanza y aprendizaje con tecnologías.

Para Salazar (2009), las nociones claves de este Enfoque son las siguientes:

Esquema: Organización invariante de la conducta del sujeto para una clase determinada de situaciones.

ISBN 978-84-945722-3-4

Artefacto: Es un objeto material o abstracto, destinado a dar sustento a la actividad del sujeto en la ejecución de un cierto tipo de tarea.

Instrumento: Es lo que un sujeto construye a partir del artefacto (figura 3). Es entonces una entidad mixta que contiene a la vez un artefacto, material o no, y esquemas de utilización construidos por el sujeto durante su interacción.

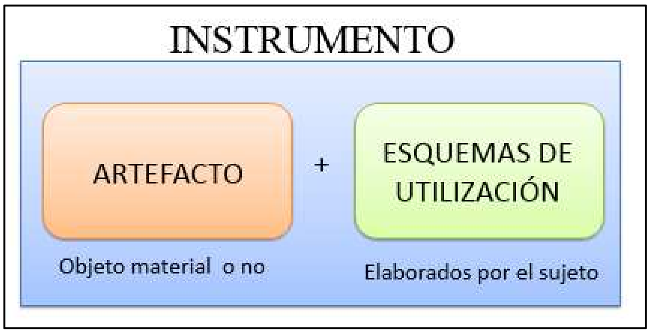


Figura 3. Componentes del instrumento

De acuerdo a Rabardel (1995), el Enfoque Instrumental estudia la diferencia que existe entre el artefacto, instrumento y los procesos que desenvuelven la transformación progresiva del artefacto en instrumento, transformación que denominó como proceso Génesis Instrumental.

En cuanto a la génesis instrumental, Rabardel (1995) sostiene que ésta consta de dos dimensiones: La instrumentalización y la instrumentación.

La instrumentalización: Está dirigida hacia la parte artefactual del instrumento, consta de enriquecimiento de las propiedades del artefacto por parte del sujeto. Es decir, es el resultado de la atribución de una función al artefacto por parte del sujeto.

La instrumentación: Está dirigida hacia el sujeto. Se refiere a la construcción de esquemas de uso por parte del sujeto, relativos a la ejecución de ciertas tareas. En este proceso se lleva a cabo la asimilación de nuevos artefactos a los esquemas y la acomodación de los esquemas para dar nuevos significados a los artefactos.

Rabardel (1995) utiliza la noción de esquema redefinida por Vergnaud que menciona que un esquema es una organización invariante de la conducta del sujeto para una clase determinada de situación.

Desarrollo del taller de formación

ISBN 978-84-945722-3-4

El taller tuvo dos tipos de actividades:

a) **Actividades introductorias,** en las cuales se presenta actividades dirigidas a la instrumentalización de las características de los fractales (autosimilares, dependen de escalas y poden ser generados por un patrón repetido). Estas actividades se realizaron utilizando lápiz y regla, así como utilizando la técnica del Kirigami (doblado y corte de papel), en las cuales se construyeron el triángulo de Sierpinski, el conjunto de cantor, entre otros.

b) **Actividades con Geogebra:** Se propondrá actividades que permitan inducir la noción intuitiva de la recursividad y el infinito.

Las actividades se desarrollaron en dos sesiones de 90 minutos cada una. En la primera sesión se desarrollaron actividades de introducción a la noción de fractales y las primeras construcciones de fractales con la técnica de Kirigami. En la segunda sesión, continuamos con la actividad de construcción de fractales con el uso de Geogebra.

Las actividades

A continuación se presentará una actividad por cada tipo, mencionado anteriormente, que se desarrollaron en el taller.

Actividad introductoria

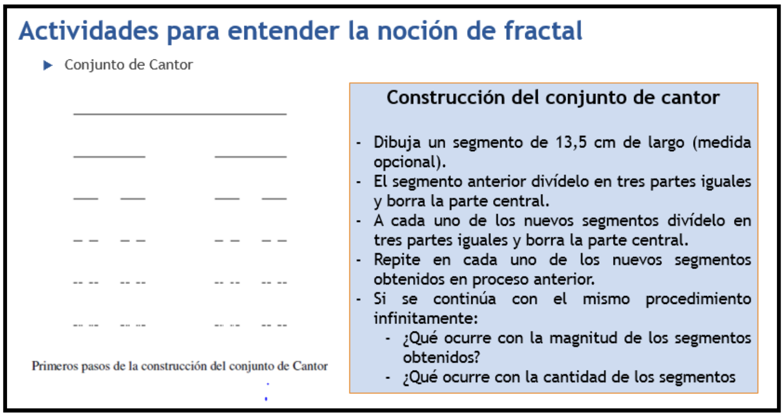


Figura 4. Actividad introductoria presentada a los participantes.

Tiene como objetivo introducir la noción de fractales. Dado que Fractal está relacionado con la palabra Fractus que significa roto o no entero.

Se deseaba que los docentes participantes reconocieran cada parte de los segmentos que se dividió el segmento inicial reconociéndolo como la unidad, como se muestra en la siguiente

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

figura:

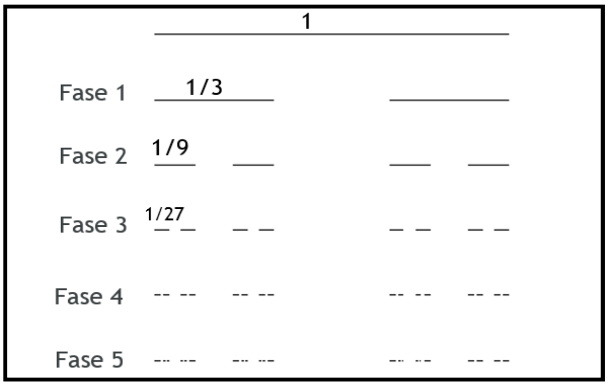


Figura 5. Reconociendo la medida de cada segmento dividido

Los docentes realizaron la división del segmento dado inicialmente, con el uso de compás, reglas y una docente hizo las divisiones utilizando el teorema de Thales, ya que el segmento no era de medida exacta para cada partición que se solicitaba del segmento. Esto último se muestra en la siguiente figura:

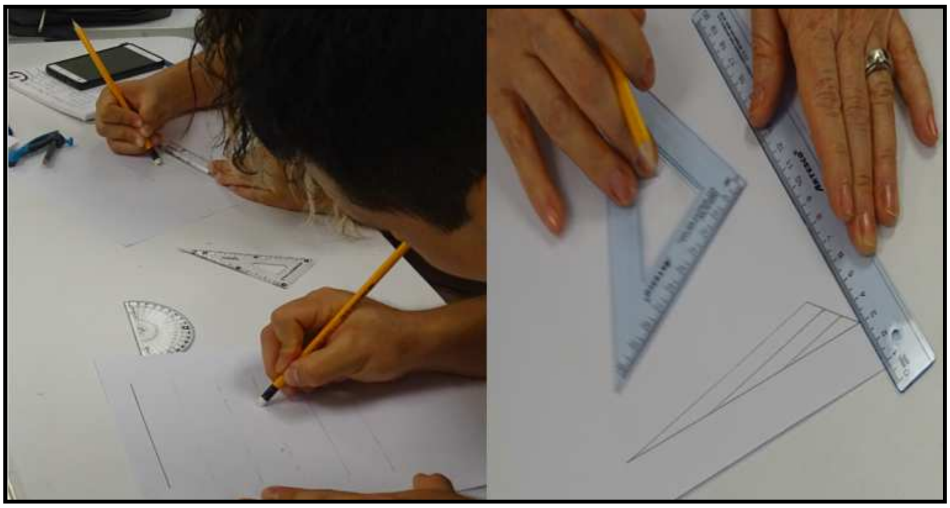


Figura 6. Docentes participantes realizando la primera actividad.

Para finalizar esta actividad los docentes participantes, completaron un cuadro en el cual completaban sus observaciones y deducirán patrones, como se muestra a continuación:

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Actividades para entender la noción de fractal

- Conjunto de Cantor

Completar la siguiente tabla

Fase	1	2	3	4	...	k	Conjunto de Cantor $k \to \infty$
Números de segmentos	2	4	8	16	...	2^k	
Longitud de cada segmentos	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	...	$\frac{1}{3^k}$	
Longitud total	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{16}{81}$	...	$\frac{2^k}{3^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k$	0

Figura 7. Los docentes participantes buscan progresiones.

Actividad con Kirigami

En este tipo de actividad, se realizaron las construcciones de los fractales conocidos como escalera de cantor, pirámide se Sierpinski, el libro fractal, entre otros.

Figura 8. Fractales elaborados por los docentes participantes.

Al realizar esta actividad se evidenció que los docentes participantes se sintieron motivados en la construcción de cada fractal. El libro fractal fue la construcción que era más elaborada y con mayor número de pasos, pero para ellos fue un reto, que al final lograron realizar.

Actividad con Geogebra

Esta actividad se basado en la presentación del triángulo de Sierpinski elaborado con Geogebra. Donde los docentes tenían que movilizar un deslizador y según la fase que se

ISBN 978-84-945722-3-4

encuentre debían responder a las preguntas mostradas en la figura siguiente.

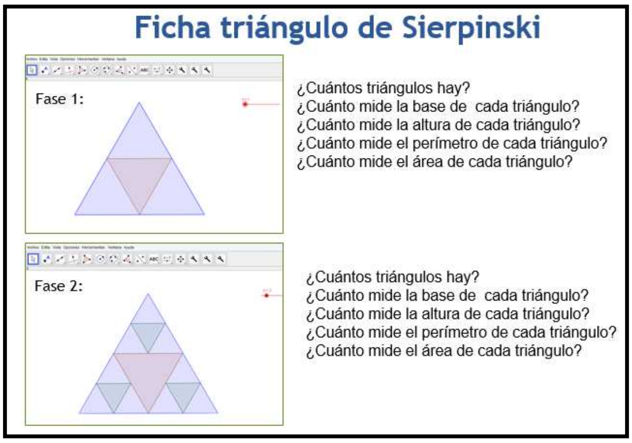


Figura 9. Actividad de triángulo de Sierpinski con Geogebra.

Al finalizar, el desarrollo de todas las actividades, los docentes participantes mostraron mayor interés en la construcción de los fractales mediante la técnica del Kirigami.

En un primer momento hicieron las construcciones con una plantilla, después de reconocer la secuencia de construcción. Pudieron realizar un libro fractal de la pirámide de Sierpinski.

Consideraciones Finales

Consideramos que al concluir el taller los docentes participantes instrumentalizaron las características de los fractales por medio de tecnologías (lápiz y papel – Geogebra) y movilizaron esquemas preexistentes como semejanza de figuras, progresiones, segmentos, área, perímetro, así como la formación de nuevos esquemas que permitieron instrumentar la noción de fractal. A su vez los docentes reflexionaron sobre cómo esta noción compleja se puede trabajar en el aula con estudiantes de educación secundaria

Agradecimientos

Agradecemos a la Pontificia Universidad Católica del Perú, por favorecer el desarrollo de investigación en el área de Educación Matemática en general y, en particular al Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas por el apoyo del grupo de investigación Tecnologías y Visualización en Educación Matemática TecVEM-IREM.

Referencias bibliográficas

Estrada, F. (2004). *Geometria fractal: conceptos y procedimientos para la construcción de fractales*. Bogota: Editorial Magisterio.

ISBN 978-84-945722-3-4

Salazar, J.V. F (2009). *Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de transformações geométricas no espaço*. (Tesis doctoral) Pontificia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

Ministerio de Educación del Perú (2016). *Matemática 3*. Lima: Santillana.

Ovideo, L.; Kanashiro, A. & Colombini, M. (2004). *Fractales: un universo poco frecuentado*. Santa fe: Ediciones UNL.

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies: une approche cognitive des instruments contemporains*. Université Paris. Armand Colin. Recuperado de http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/

ISBN 978-84-945722-3-4