CB-420

ANÁLISIS COGNITIVO DEL USO DE DIAGRAMAS DE ÁREAS Y DE ÁRBOL EN LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA SOBRE FRACCIONES

Belén Giacomone – Juan D. Godino
giacomone@correo.ugr.es – jgodino@ugr.es
Universidad de Granada, España

Núcleo temático: I. Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Modalidad: CB
Nivel educativo: 5. Formación y actualización docente
Palabras clave: análisis cognitivo, desarrollo profesional, educación matemática, razonamiento diagramático

Resumen

Una tarea desafiante cuando se hace investigación en educación matemática es la descripción comprensible de la actividad matemática llevada a cabo por los estudiantes. Particularmente, diversos autores argumentan que construir y usar diagramas puede ser visto como una posible fuente de nuevos conocimientos. En este trabajo se analizan las respuestas dadas por 30 estudiantes de magisterio a un problema sobre fracciones mediante el uso de diagramas de áreas y árbol. El análisis cognitivo está apoyado por herramientas teóricas y metodológicas del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. Como resultados se destaca la complejidad que implica el uso del diagrama de áreas para expresar la multiplicación de fracciones; por otro lado, los diagramas de árbol resultan más eficientes para realizar cálculos. Asimismo, se observa que el uso del lenguaje secuencial-natural se encuentra presente en todos los casos como una forma necesaria para comunicar la respuesta. Los resultados permiten comprender el papel que juegan ambos tipos de diagramas y la potencial utilidad de tener en cuenta la trama de objetos matemáticos implicados en el uso de tales representaciones. Por último, este análisis se revela como estratégico para el formador de profesores al permitirle reflexionar sobre posibles dificultades de aprendizaje.

1. Introducción

Los diagramas son vistos por muchos investigadores y educadores como herramientas indispensables para el razonamiento matemático (NCTM, 2000; Novick, 2004; Kadunz,

ISBN 978-84-945722-3-4

2016). Sin embargo, como señalan Scaife y Rogers (1996, p. 206), “es necesario adoptar una visión de cómo la gente lee e interactúa con los diagramas”, siendo éste, un problema que aún reclama atención en la comunidad científica (Hoffman, 2011, p. 197).

Por otro lado, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, “no es posible hablar de signos y representaciones sin tener en cuenta la posibilidad de acceder a los objetos matemáticos predefinidos, preestablecidos o reconocidos como tales por una institución” (Iori, 2016, p. 279). Sin duda, esa descripción comprensible de la actividad matemática, llevada a cabo por los estudiantes, es una tarea desafiante cuando se hace investigación en educación matemática (Kadunz, 2016, p. 111).

En el contexto de la formación de maestros, utilizar el razonamiento con diagramas de distintos tipos es una oportunidad para llamar a la reflexión profesional (Cohen, 2004, Rivera, 2011); asimismo, Novick (2004, p. 38) señala que los futuros maestros necesitan desarrollar conocimientos más explícitos con representaciones diagramáticas.

Relacionando estos aspectos claves, que involucran el uso de diagramas en la formación docente, el objetivo de esta investigación es estudiar cuáles son los *objetos matemáticos* que movilizan futuros profesores de educación primaria cuando resuelven una situación problemática sobre fracciones, a partir de diagramas de áreas y de árbol.

A continuación, se describe sucintamente el marco teórico, el cual permite interpretar la naturaleza del problema; en la sección 3 se describe el método de investigación y la tarea implementada con futuros maestros de educación primaria; en la sección 4 se discute el análisis cognitivo de las respuestas de los estudiantes. Finalmente, se exponen las conclusiones con vistas a una mejora en la formación del profesor de matemáticas.

2. Marco teórico

En el marco del *enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos* (EOS) se vienen desarrollando diversas herramientas teóricas y metodológicas las cuales permiten realizar análisis a nivel macro y micro de la actividad matemática (Godino, Batanero y Font, 2007). La herramienta *Configuración ontosemiótica* facilita la descripción y análisis pormenorizado de las prácticas matemáticas involucradas en la solución de un problema. Se consideran 6 tipos de objetos matemáticos (Godino et al., 2007, p. 130):

- lenguajes (términos, expresiones, notaciones, gráficos) en sus diversos registros (escrito, oral,

ISBN 978-84-945722-3-4

gestual, etc.);

- situaciones-problemas (aplicaciones intra o extra-matemáticas, ejercicios).
- conceptos-definición (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función);
- proposiciones (enunciados sobre conceptos);
- procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo);
- argumentos (enunciados usados para justificar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo).

Todos éstos objetos no están aislados entre sí, sino que se vinculan a través de funciones semióticas, referenciales y operacionales, construidas entre ellos, estableciendo configuraciones de prácticas, objetos y procesos matemáticos.

Si el objetivo es analizar una secuencia de prácticas matemáticas esperadas o expertas a propósito de una tarea, el análisis tendrá un carácter epistémico. En cambio, si se trata del análisis de una respuesta dada por un estudiante, las correspondientes configuraciones serán de tipo cognitivo, tal como corresponde en este trabajo.

En la sección 4 se muestra como la aplicación de la herramienta configuración ontosemiótica puede ayudar a comprender las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje matemático, al revelar la trama de objetos que intervienen en la actividad matemática y las relaciones sinérgicas entre los mismos.

3. Contexto formativo y método

Como parte de una acción formativa, se llevó a cabo la implementación de un problema con un grupo de 30 estudiantes, futuros profesores de educación primaria. Si bien el objetivo educativo/curricular es 'el estudio de fracciones', el objetivo como investigadores es poner en evidencia el desafío que implica el uso de distintas representaciones en la educación matemática. De manera específica, se les pidió resolver el problema aplicando dos procedimientos, usando un diagrama de áreas y un diagrama en árbol. Los estudiantes ya estaban familiarizados con ambos tipos de diagramas, siendo producto del trabajo durante el curso formativo.

En este contexto, se trata de una investigación cualitativa, de tipo interpretativa dado que se busca analizar e interpretar las respuestas de un grupo de estudiantes a la situación-problema mostrada en el Cuadro 1. Los datos se recopilan en una situación real de clase y se analizan bajo la perspectiva del EOS descrita en el apartado anterior.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Un Martini es un cóctel que se hace con 5 partes de ginebra y 1 parte de vermut. Supongamos que 2/5 de la ginebra es alcohol y que 1/6 del vermut es alcohol. ¿Qué fracción de alcohol lleva un Martini?

A) Resuelve el problema usando un diagrama de áreas.

B) Resuelve el problema usando un diagrama en árbol.

Cuadro 1. Enunciado de la tarea del Martini

4. Análisis cognitivo

En la Tabla 1 se destaca la frecuencia de respuestas obtenidas de la muestra de 30 estudiantes, las cuales no son indicativas del grado de desarrollo cognitivo alcanzado por los mismos. Los valores reflejados representan el primer paso para pensar por qué el diagrama en árbol resulta una forma más sencilla de conectar con la solución aritmética y por qué el diagrama de áreas no se muestra como un recurso de cálculo eficiente.

Tabla 1. Frecuencia de respuestas al problema del Martini

	Respuestas			
Tipo de diagrama	Correctas	Incorrectas	Sin hacer	Total
Áreas	1	21	8	30
Árbol	24	6	0	30

A continuación, se muestran ejemplos prototípicos de las estrategias utilizadas por los estudiantes, las cuales permiten interpretar el conocimiento puesto en juego en cada uno de los diagramas y así, dar una respuesta a dicho interrogante.

4.1. Uso del diagrama de áreas

Ningún estudiante resuelve el problema basando su razonamiento en la construcción de una secuencia de diagramas de áreas, siendo difícil su uso como recurso para el cálculo aritmético-fraccionario. Entre las respuestas, se destacan los siguientes casos.

- *Caso 1. Aproximación a la solución esperada.* Un solo estudiante propone una secuencia de 4 diagramas (Figura 2). En cada uno de ellos moviliza el concepto de 'fracción' como 'parte de un todo'. Utiliza el lenguaje natural para indicar las partes que componen al diagrama.

ISBN 978-84-945722-3-4

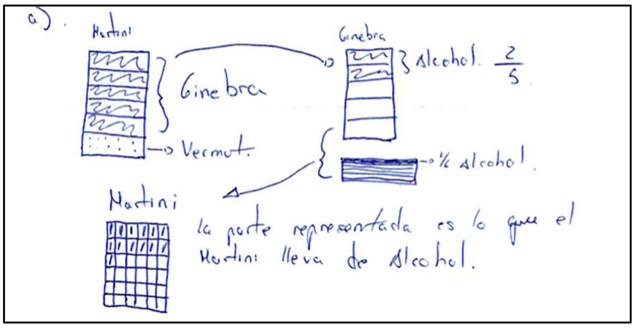

Figura 2. Ejemplo prototípico de respuesta correcta mediante el uso de diagrama de áreas

En primer lugar, se representa el Martini como un 'todo unitario', compuesto por 5 partes de Ginebra y 1 de Vermut. Luego, el estudiante realiza un procedimiento de 'descomposición de la unidad de Martini en dos nuevas partes unitarias': Ginebra por un lado y Vermut por el otro. Nuevamente se divide una 'unidad en partes iguales' y se establecen así dos nuevas proposiciones: 'las figuras de la derecha representan las partes de alcohol de la Ginebra y del Vermut, respectivamente'. En esta acción queda claro cómo, el estudiante en cuestión, no logra operar con el diagrama inicial (el Martini), esto significa que no es capaz de construir un diagrama que represente el concepto de 'fracción de fracción' dado que recurre a la construcción de dos nuevos diagramas independientes.

Para la construcción del cuarto diagrama resulta necesario 'componer los diagramas de la derecha'; aparece así un nuevo concepto 'unidad de medida' para lograr medir un área con una unidad dada (1/6 alcohol del vermut). El último procedimiento que se realiza es de 'suma de cantidades' dando como resultado la proposición final donde se consigue medir los 13 cuadraditos de 36 cuadraditos de igual área: 'la parte representada es lo que el Martini lleva de alcohol'.

El estudiante realiza, por un lado, procesos de *materialización* de los conceptos y de las operaciones con fracciones, y por otro lado, procesos de *composición* de los resultados parciales que va obteniendo. La solución la encuentra finalmente mediante un procedimiento aritmético de conteo de las fracciones unitarias que ha representado en el último diagrama mediante un proceso de *idealización* (la razón del número de cuadraditos marcados al número total de cuadraditos es la fracción de alcohol del Martini). Un análisis más detallado de esta respuesta se puede ver en Giacomone y Godino (2016).

- *Caso 2.* Dentro de las 21 respuestas incorrectas, es posible observar que, en 12 de éstas, los estudiantes movilizan el concepto de fracción como 'parte de un todo que se divide

ISBN 978-84-945722-3-4

en partes iguales' y consiguen representar la parte de ginebra y de vermut. Asimismo, se moviliza el concepto de fracción como 'operador' identificando la fracción de alcohol que compone cada elemento del Martini (fracción de alcohol en la Ginebra y en el Vermut). Sin embargo, no logran identificar una unidad de medida común para expresar el alcohol total (suma de la fracción de alcohol de cada elemento). Un ejemplo prototípico de esta respuesta es el que se muestra en la Figura 3.

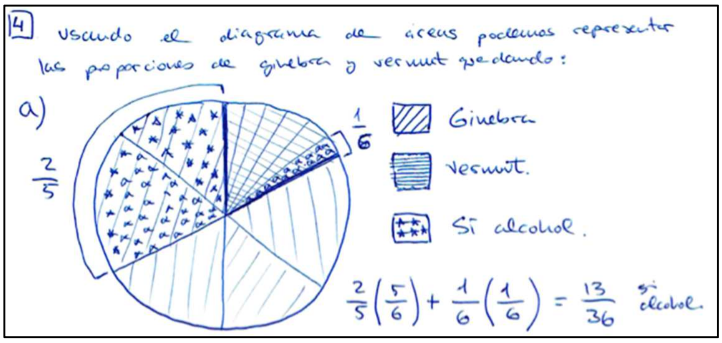

Figura 3. Ejemplo prototípico de respuesta incorrecta mediante el uso de áreas

Se observa que no es posible responder al problema con el diagrama representado, por lo tanto, el estudiante utiliza un lenguaje aritmético-fraccionario para hallar la solución.

4.2. Uso del diagrama de árbol

Las respuestas dadas por los estudiantes revelan que no existen grandes conflictos en llegar a la solución. La traducción del diagrama en árbol en un lenguaje aritmético apoya y justifica la respuesta al problema. De la misma manera observamos que el uso del lenguaje secuencial-natural, se encuentra presente en todos los casos como una forma necesaria para comunicar el resultado.

- *Caso 1.* Un ejemplo de respuesta correcta se muestra en la Figura 4. En primer lugar, el sujeto realiza una práctica discursiva con el fin de expresar en forma diagramática la composición del Martini. En segundo lugar, interpreta correctamente las unidades que constituyen los niveles jerárquicos y procede a una traducción aritmético fraccionaria para dar respuesta a la pregunta del problema. En dicha traducción se moviliza el concepto 'fracción de fracción' y 'suma de fracciones' como parte de un todo.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

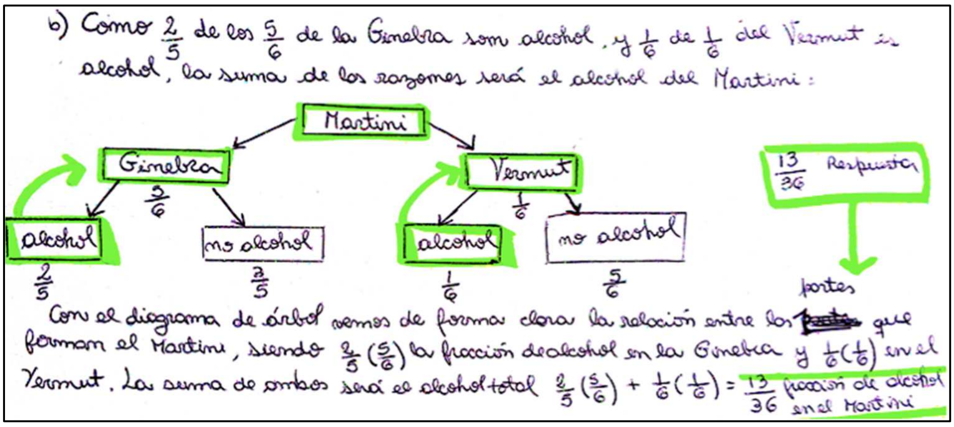

Figura 4. Ejemplo prototípico de respuesta correcta mediante el uso de diagrama

El primer nivel produce una división binaria en dos nuevas unidades: el vermut y la ginebra. Luego, se opera sobra cada unidad, considerándolas un ‘todo unitario’; se incluye la información dada en el problema y se obtiene el tercer nivel jerárquico. En este tercer nivel resulta muy sencillo resolver el problema, dado que las partes se identifican claramente en el diagrama y se destaca el aspecto secuencial del proceso resolutivo.

- *Caso 2*. Entre las 5 respuestas incorrectas, se identifican dificultades para representar el segundo nivel jerárquico. Un tipo de respuesta prototípica está reflejada en la Figura 5 en la que el sujeto resolutor, no identifica el segundo nivel del diagrama (composición de elementos de ginebra y vermut), y representa, directamente, los datos del alcohol de cada elemento. Se concluye que, el estudiante, no moviliza correctamente el concepto de fracción que se pone en juego con el diagrama de árbol.

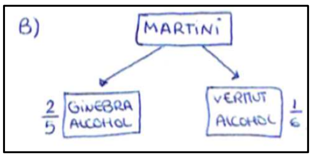

Figura 5. Ejemplo prototípico de respuesta incorrecta mediante el uso de diagrama de árbol

4.3. Discusión

Como producto de resultados empíricos, Hoffman (2011, p. 196) señala: “el apoyo cognitivo que el razonamiento diagramático puede proporcionar depende en gran medida del sistema de representación elegido”. En nuestro caso, se evidencia claramente que, el problema resuelto con diagramas en árbol resultó más efectivo dado que muestra, de manera icónica, la estructura del sistema de operaciones implicadas en la resolución. El concepto de

ISBN 978-84-945722-3-4

‘fracción’ se manifiesta como ‘la razón entre las partes de un todo genérico que se divide en partes iguales, y las partes que se individualizan’. El concepto de ‘fracción de fracción’ se refleja en la composición de los dos niveles inferiores del diagrama, mientras que la suma de fracciones resultantes queda reflejada en la disposición lateral de las dos ramas (izquierda, derecha). Por otro lado, el uso del diagrama de áreas, moviliza otro significado del concepto de ‘fracción’, revelándose como ‘un operador de una cantidad de áreas’. Éste es un concepto más difícil de representar diagramáticamente y, que en general, los estudiantes no están habituados.

Además, se pone en evidencia que acompañando al lenguaje visual-diagramático es necesario el concurso del lenguaje natural para comunicar la respuesta, y que junto a los objetos matemáticos materiales, visibles, está siempre presente una configuración de objetos abstractos que participan de la actividad matemática (Godino, Cajaraville, Fernández, & Gonzato 2016).

5. Reflexiones finales

En primer lugar, tal como sugieren Badillo, Font y Edo (2014, p. 68), las categorías teóricas que propone el EOS han permitido hacer un análisis en profundidad de las producciones de los alumnos, revelando la complejidad de objetos matemáticos activados en el proceso de resolución del problema. De esta manera, los resultados permiten comprender el papel que juegan ambos tipos de diagramas en la construcción del conocimiento matemático y la potencial utilidad de tener en cuenta la trama de objetos implicados en el uso de tales representaciones (Font, Godino y Contreras, 2008) para describir e interpretar la actividad de aprendizaje.

En segundo lugar, “como educadores de maestros debemos ser capaces de orquestar la aparición de *affordances* desde dentro de las tareas” (Liljedahl, Chernoff y Zazkis, 2007, p. 241). Así, este tipo de análisis se revela como estratégico para el formador de profesores, dado que permite reflexionar sobre posibles dificultades de aprendizaje (Cohen, 2004), tanto en el momento de diseño y selección de tareas como en la implementación efectiva en el aula (Giacomone y Godino, 2016), y gestionar de manera efectiva la dinámica de dichas *affordances*.

ISBN 978-84-945722-3-4

Referencias bibliográficas

Badillo, E., Font, V., & Edo, M. (2014). Representaciones matemáticas usadas en la resolución de un problema aritmético de reparto por niños del primer ciclo de primaria. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 65,* 59-69.

Cohen, S. (2004). *Teachers' professional development and the elementary mathematics classroom: Bringing understandings to light*. Nueva Jersey: Routledge.

Font, V., Godino, J. D., & Contreras, A. (2008). From representation to onto-semiotic configurations in analysing mathematics teaching and learning processes. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.*), Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (pp. 157-173). Rotterdam: SensePublishers.

Giacomone, B., & Godino, J. D. (2016). Experiencia formativa para desarrollar una competencia didáctico-matemática de futuros profesores. *Actas del XVI Congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Matemáticas, ni más ni menos* (pp. 1-10). Jerez: CEAM.

Godino, J. D. Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Cajaraville, J. A., Fernández, T., & Gonzato, M. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(2), 163-184.

Hoffmann, M. H. (2011). Cognitive conditions of diagrammatic reasoning. *Semiotica*, (186), 189-212.

Iori, M. (2016). Objects, signs, and representations in the semio-cognitive analysis of the processes involved in teaching and learning mathematics: A Duvalian perspective. *Educational Studies in Mathematics, 94*(3), 275-291.

Kadunz, G. (2016). Diagrams as means for learning. In A. Sáenz-Ludlow, & G. Kadunz (Eds.), *Semiotics as a tool for learning mathematics* (pp. 111-126). SensePublishers.

Liljedahl, P., Chernoff, E., & Zazkis, R. (2007). Interweaving mathematics and pedagogy in task design: A tale of one task. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*(4-6), 239-249.

Novick, L. R. (2004). Diagram literacy in preservice math teachers, computer science majors, and typical undergraduates: the case of matrices, networks, and hierarchies. *Mathematical thinking and learning, 6*(3), 307-342.

Rivera, F. D. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum. Research, theory, practice, and issues*. Dordrecht: Springer.

Scaife, M., & Rogers, Y. (1996). External cognition: how do graphical representations work? *International journal of human-computer studies, 45*(2), 185-213.

ISBN 978-84-945722-3-4