

USO DE LA TECNOLOGÍA PARA VISUALIZAR EL DESLIZAMIENTO DE UN CUERPO SOBRE UNA CICLOIDE

Isaías Lima Zempoalteca – Antonio Rivera Figueroa
zempoalteca@cinvestav.mx – arivera@cinvestav.mx
Cinvestav-IPN, México

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Modalidad: CB

Nivel educativo: Formación y actualización docente

Palabras clave: Modelación, Tecnología, Cicloide, Tautócrona

Resumen

En los libros de texto de ecuaciones diferenciales suele mostrarse que la tautócrona y la braquistócrona es un trozo de la cicloide, de hecho, existen animaciones en la web donde se visualiza que la cicloide es una tautócrona, sin embargo, estos sitios de internet no establecen las ecuaciones que describen este movimiento. En este artículo obtenemos tales ecuaciones en forma paramétrica en términos del tiempo, lo que nos permite verificar analíticamente y numéricamente que en efecto la cicloide es tautócrona. Usando estas ecuaciones también modelamos mediante el software Mathematica el deslizamiento simultáneo de tres cuerpos partiendo de distintas posiciones iniciales en donde, mediante una animación, se verifica dinámicamente que la curva es una tautócrona. Una observación importante al respecto, tiene que ver con la simplicidad de la ecuación diferencial que se obtiene para esta curva particular, cuando se analiza el movimiento de un cuerpo que se desliza sin fricción a lo largo de una curva arbitraria por efecto de la gravedad. En el caso de la cicloide, la ecuación diferencial que se obtiene es lineal de segundo orden con coeficientes constantes, por lo que resulta un ejemplo apropiado en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

1. La Tautócrona

Durante cientos de años el estudio del movimiento de los cuerpos ha generado gran interés en científicos e investigadores, quienes han realizado una gran variedad de experimentos con el fin de entender las leyes que rigen su comportamiento. Existe evidencia de que Tolomeo (200 a.C.) usó varias curvas mecánicas (curvas definidas y dibujadas mediante instrumentos mecánicos) para describir los movimientos de los planetas del sistema solar (Courant, 1941, p.164). Pero no fue sino hasta los tiempos de Galileo Galilei y de Isaac Newton cuando el estudio del movimiento de los cuerpos por acción de la fuerza de gravedad terrestre, cobra gran relevancia para el desarrollo de la ciencia.

A lo largo de la historia, han sido analizados varios problemas de esta naturaleza que son considerados clásicos. Por ejemplo en 1638 Galileo Galilei se planteó un problema en el cual, en un círculo, dibujó una cuerda subtendida por un arco con extremos C y D (no más grande que un cuadrante), enseguida dibujó dos cuerdas CB y BD considerando un punto cualquiera B sobre el arco. Galileo mostró que el tiempo de descenso de un cuerpo a lo largo de las dos cuerdas es menor que a lo largo de la cuerda CD . Siguiendo las mismas ideas, Galileo probó que el menor tiempo de descenso será a lo largo de un arco de círculo (aproximado por un polígono inscrito) que a lo largo de la cuerda que lo subtiende (Galileo, 1638, pp. 237-240). Años más tarde en 1696, Johann Bernoulli planteó el problema de forma más general; él se preguntó sobre qué curva con extremos A y B , un cuerpo de masa puntual la recorre en el menor tiempo posible. Bernoulli también consideró en su planteamiento del problema la ausencia de fricción en el deslizamiento del cuerpo, de esta manera, el cuerpo se desliza por la propia acción de la gravedad. En enero de 1697 Johann Bernoulli publicó su solución con el título *Curvatura radii in diaphanis non uniformibus* (La curvatura de un rayo en un medio no uniforme), en la cual demostró que la curva requerida es una cicloide y la llamó braquistócrona (del griego *brachistos*: el más corto, y *cronos*: tiempo). Este problema también fue resuelto por el hermano Jakob Bernoulli y por los científicos Tschirnhaus, Newton y Leibniz; sin embargo, es considerada la prueba de Johann Bernoulli como la más elegante y es la que usualmente se expone en los libros de texto de ecuaciones diferenciales. Los detalles de las pruebas de los hermanos Bernoulli pueden ser consultadas en Struik (1986) y Smith (1959).

En la internet pueden encontrarse simulaciones como Britton (2011), Phillips (2014) y NPS Physics (2015) que exponen el deslizamiento de un cuerpo a lo largo de tres curvas: recta, arco de circunferencia y arco de cicloide; donde se muestra que el arco de cicloide es la curva de descenso de menor tiempo. También existen páginas web, por ejemplo Britton (2011) y Mahieu (2015), donde se muestra que la cicloide es tautócrona (del griego *tautos*: el mismo, y *cronos*: tiempo), es decir, es una curva tal, que dos cuerpos que se deslizan sobre ella y que inician su recorrido de distintas posiciones llegan en el mismo tiempo al extremo final. La tautócrona fue descubierta mediante métodos geométricos por Christian Huygens quién muestra que la braquistócrona de Johann Bernoulli también es tautócrona.

En este trabajo analizamos la cicloide como una curva tautócrona. Para esto, con base en las ecuaciones paramétricas de la cicloide establecemos las ecuaciones de movimiento y entonces, con ayuda del software Mathematica, emulamos el movimiento de tres cuerpos de igual masa que se deslizan a lo largo de un arco de cicloide con lo cual mostramos que efectivamente la cicloide es una tautócrona.

2. Deslizamiento sin fricción sobre un plano inclinado

Consideremos el movimiento de un cuerpo de masa m que se desliza sin fricción sobre un plano inclinado. Para nuestro análisis, usamos un sistema de referencia de dos ejes cartesianos x y y como se muestra en la figura 1; en donde el plano, tiene una inclinación β respecto al eje de las abscisas y la ordenada de su punto más alto es y_0 . De esta manera, el cuerpo se libera sobre el plano a partir del reposo desde una altura y_0 y concluye su movimiento, cuando llega al origen.

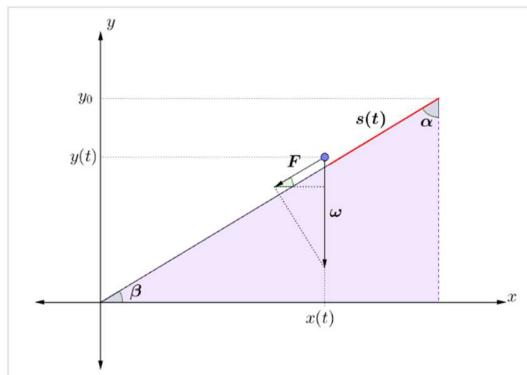


Figura 7. Deslizamiento sobre un plano inclinado.

Una vez que el cuerpo se libera, inicia su movimiento debido a la fuerza gravitacional. Esta fuerza denotada por ω es igual al producto de la masa del cuerpo por la constante gravitacional g , esto es, $\omega = -mg$. El signo menos se debe a que la fuerza apunta en sentido contrario al crecimiento de la ordenada. Esta fuerza tiene dos componentes, una perpendicular y una paralela al plano inclinado que actúa a lo largo del movimiento, la cual está dada por $F = -mg \sin \beta$.

Para fines de nuestro trabajo, resulta conveniente estudiar el deslizamiento del cuerpo respecto al eje y , por lo que para un instante t , la posición del cuerpo sobre el plano está dada por la pareja ordenada $(x(t), y(t))$, donde $x(t)$ y $y(t)$ son las ecuaciones paramétricas que

describen la trayectoria que sigue el cuerpo al deslizarse sobre el plano. Estas ecuaciones pueden ser obtenidas hallando la solución que satisfaga las condiciones iniciales de movimiento, de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = -g \sin^2 \beta, \quad (1)$$

la cual modela el deslizamiento del cuerpo sobre el plano inclinado respecto al eje y .

3. Deslizamiento sin fricción sobre una curva arbitraria

Ahora consideremos un cuerpo de masa m que se desliza sin fricción sobre una curva arbitraria por efecto de la gravedad, como se muestra en la figura 2. Eligiendo un sistema de referencia adecuado, diremos que el cuerpo comienza a deslizarse sobre la curva desde una altura y_0 y termina su movimiento al llegar al origen. Supongamos que la curva está dada por la función $y = f(x)$ o $x = h(y)$, donde f y h son mutuamente inversas. En lo que sigue, $x(t)$ y $y(t)$ representan la posición del cuerpo en el instante t respecto al sistema de referencia adoptado.

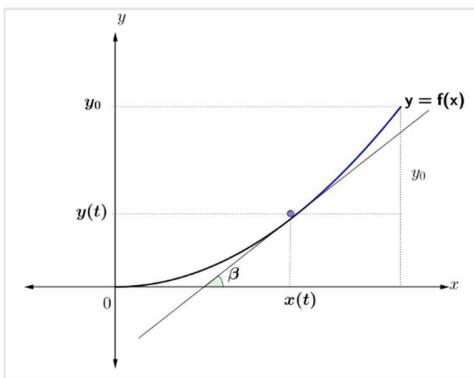


Figura 8. Deslizamiento sobre una curva arbitraria.

Para obtener $y(t)$ es importante notar que para cada instante t , el movimiento de deslizamiento del cuerpo sobre la curva, puede verse como un caso particular del movimiento sobre un plano inclinado. De esta manera, podemos usar la ecuación (1) para obtener la ecuación diferencial que modela el movimiento del cuerpo respecto al eje de las ordenadas:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = -g \sin^2 \beta(t); \text{ donde ahora el ángulo beta está en función de } t.$$

Dado que β es el ángulo de inclinación de la recta tangente en el punto $(x(t), y(t))$, es conveniente representar a $\sin \beta$ en términos de $\tan \beta$, que es la pendiente de la recta tangente.

Se deduce fácilmente de las relaciones trigonométricas que $\sin^2 \beta = \frac{\tan^2 \beta}{1+\tan^2 \beta}$, y como

$\tan \beta = f'(x(t))$, entonces la ecuación diferencial anterior puede escribirse como:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = -g \frac{(f')^2(x(t))}{1+(f')^2(x(t))}.$$

Considerando que la curva puede estar expresada por la función $y = f(x)$ o $x = h(y)$, de la segunda relación y de la fórmula para el cálculo de la derivada de funciones inversas, se obtiene que la ecuación diferencial que modela el deslizamiento de un cuerpo sobre una curva arbitraria es

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = -\frac{g}{1+(h')^2(y)}. \quad (2)$$

Con la solución $y(t)$ de la ecuación diferencial anterior y la expresión $x(t) = h(y(t))$ obtenemos la ecuación de movimiento, es decir, la ecuación que describe la trayectoria que sigue un cuerpo al deslizarse sobre la curva dada arbitraria. De esta manera, el par ordenado $(x(t), y(t))$, nos indica la posición del cuerpo sobre la curva en el instante t .

4. Deslizamiento sin fricción sobre la cicloide

Consideremos el problema del deslizamiento sin fricción de un cuerpo sobre un semi-bucle de la cicloide, la cual posicionamos respecto a un sistema de ejes coordenados como se muestra en la figura 3. Para deducir sus ecuaciones paramétricas, partimos del hecho de que la curva se genera mediante el movimiento de un punto fijo p sobre un círculo de radio a , el cual rodamos sin deslizarse hacia la derecha por debajo de un plano horizontal.

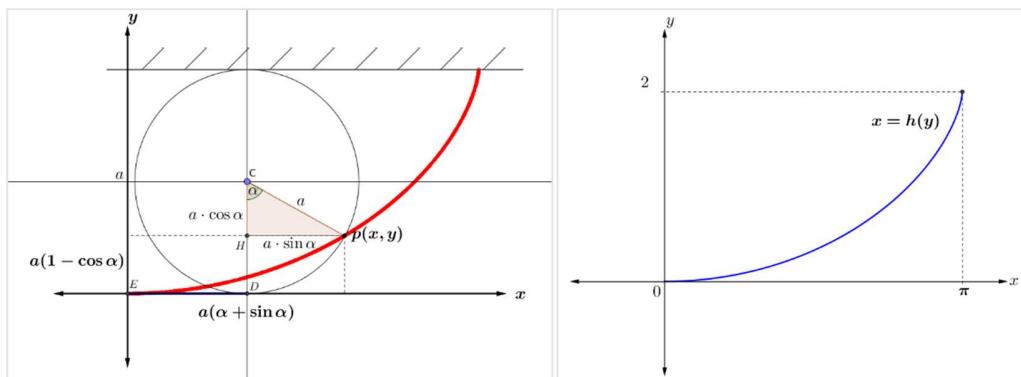


Figura 9. Semi-bucle de la cicloide.

Se prueba fácilmente que la distancia recorrida por el círculo del punto E al D es igual a la longitud del arco que une los puntos D y P . De este hecho, se obtienen las ecuaciones paramétricas que describen el semi-bucle de la cicloide de la figura: $x = a(\alpha + \sin \alpha)$, y $y = a(1 - \cos \alpha)$.

Eliminando α de ambas ecuaciones, obtenemos su ecuación cartesiana

$$x = h(y) = a \cdot \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right) + \sqrt{2ay - y^2}. \quad (3)$$

Cuando el cuerpo se desliza sobre esta curva, la posición del cuerpo para un instante t queda determinada por el par ordenado $(x(t), y(t))$, que se obtiene del resultado de la Sección 3 aplicado a la curva particular (cicloide) dada por la ecuación (3). De esta manera, la ecuación cartesiana del semi-bucle de la cicloide nos permite estudiar el movimiento del cuerpo. Hallando la derivada $h'(y)$, y sustituyéndola en la ecuación diferencial (2) se obtiene la ecuación $\frac{d^2}{dt^2}y(t) = -\frac{5}{a}y$, donde por razones de simplicidad para este artículo tomamos $g = 10 \text{ m/s}^2$.

La ecuación diferencial anterior corresponde al comportamiento de un cuerpo al deslizarse sobre un semi-bucle de la cicloide para todo instante t . Dado que el cuerpo se libera a partir del reposo desde una altura y_0 respecto al plano horizontal, la solución de esta ecuación diferencial debe satisfacer las condiciones iniciales de movimiento: $y(0) = y_0$ para $0 < y_0 < 2a$, y $y'(0) = 0$. Esta solución junto con la ecuación (3), nos conducen a las ecuaciones que describen el movimiento:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 \cos \sqrt{\frac{5}{a}}t, \\ x(t) &= a \cdot \arccos\left(1 - \frac{y_0 \cos \sqrt{\frac{5}{a}}t}{a}\right) + \sqrt{2ay_0 \cos \sqrt{\frac{5}{a}}t - \left(y_0 \cos \sqrt{\frac{5}{a}}t\right)^2}. \end{aligned}$$

Como caso particular, consideremos un semi-bucle de la cicloide generado por un círculo de radio uno (ver figura 3); cuya ecuación cartesiana obtenida de (3) es: $x = h(y) = \arccos(1 - y) + \sqrt{2y - y^2}$.

Para este caso, la ecuación diferencial que modela el deslizamiento es: $\frac{d^2}{dt^2}y(t) = -5y(t)$.

La ordenada de la ecuación que describe el movimiento está dada por $y(t) = y_0 \cos \sqrt{5}t$. Esta función es una senoide con periodo $T = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}$. El tiempo que le lleva a un cuerpo en alcanzar el origen es independiente de la posición inicial y está dado por $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{5}}$. En la figura 4 se muestran las gráficas de $y(t)$ para cuatro movimientos correspondientes a las cuatro

posiciones iniciales: $y(0) = 2, 1.5, 1$ y 0.5 unidades. Estas gráficas se obtuvieron con el software Mathematica.

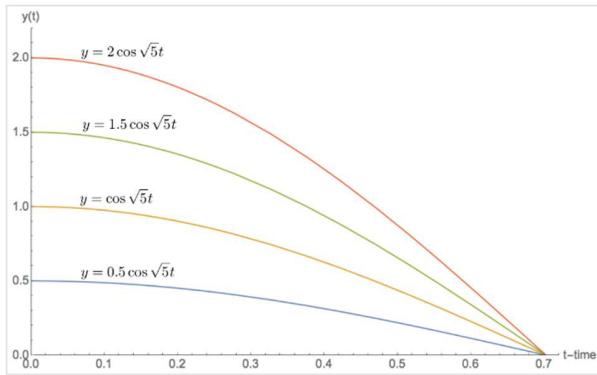


Figura 4. Análisis del movimiento respecto al eje y.

Las ecuaciones que describen la trayectoria que sigue el cuerpo al deslizarse sobre esta curva particular están dadas por $y(t) = y_0 \cos \sqrt{5}t$, y

$$x(t) = \arccos\left(1 - y_0 \cos \sqrt{5}t\right) + \sqrt{2y_0 \cos \sqrt{5}t - (y_0 \cos \sqrt{5}t)^2}.$$

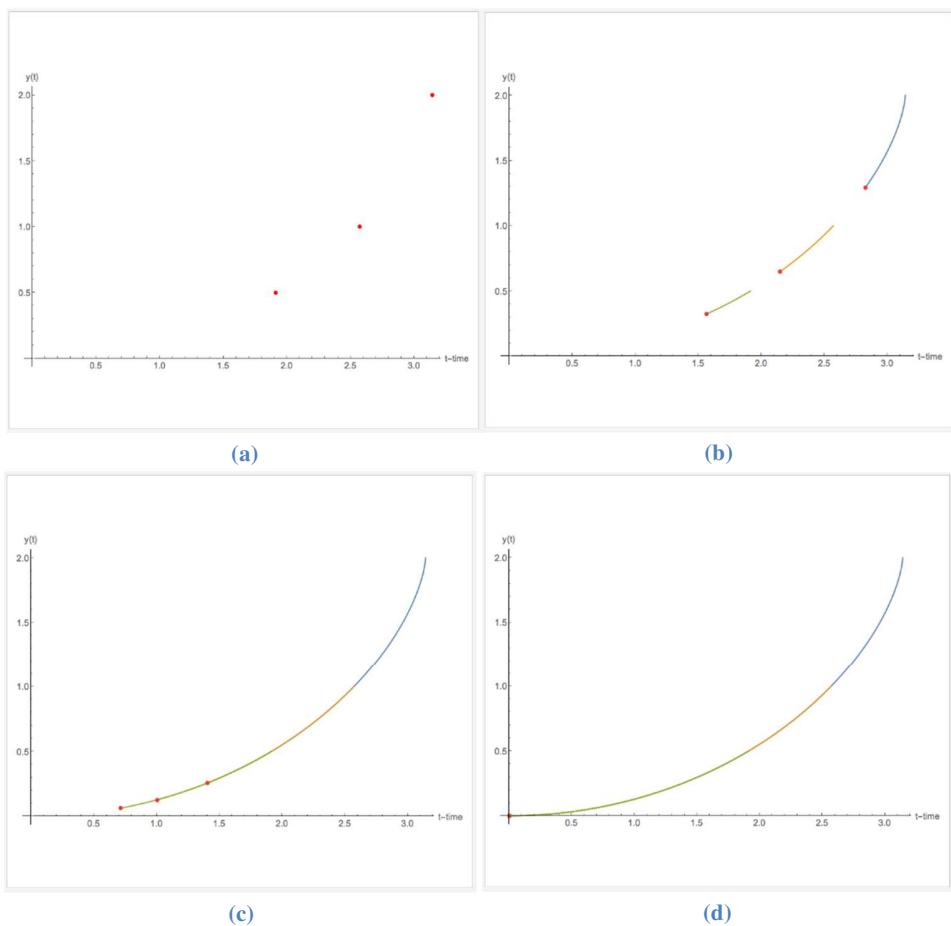


Figura 5. Deslizamiento de un cuerpo sobre un semi-bucle de la cicloide.

A partir de estas ecuaciones y con ayuda del Mathematica, se obtuvo la secuencia de imágenes que se muestra en la figura 5. En la imagen (a) se observa que los tres cuerpos parten de las posiciones iniciales: $y_0 = 2, 1$ y 0.5 unidades; los cuales, después de haber transcurrido un determinado tiempo (imagen (b)), los tres han recorrido una distancia distinta desde su posición inicial. En este caso puede observarse que el cuerpo que inició su deslizamiento desde una mayor altura, ha recorrido mayor distancia en comparación con los dos cuerpos restantes. Esto mismo ocurre con la distancia recorrida entre el segundo y tercer cuerpo. Al incrementarse el tiempo, se observa (imagen (c)) que los tres cuerpos han recorrido más de la mitad de su trayectoria en donde ahora, la distancia entre ellos es menor; es decir, comparando las tres imágenes (a, b y c) se observa que conforme transcurre el tiempo, la distancia entre los tres cuerpos disminuye; y que en aproximadamente, en un tiempo $t = \frac{\pi}{2\sqrt{5}}$ los tres cuerpos han concluido su movimiento, esto es, los tres llegan al origen

en el mismo tiempo. Con esto hemos verificado dinámicamente a partir de las ecuaciones del movimiento, que la cicloide es una tautócrona.

5. Consideraciones finales

En este trabajo hemos desarrollado el análisis del deslizamiento de un cuerpo sobre una curva arbitraria, y como caso particular se tomó a un semi-bucle de la cicloide. Una observación importante al respecto, tiene que ver con la simplicidad de la ecuación diferencial obtenida cuando se considera esta curva particular. La ecuación diferencial es lineal de segundo orden con coeficientes constantes; por esta razón el estudio del movimiento de un cuerpo que se desliza sobre una cicloide es un ejemplo estelar en la *aplicación* de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

También es importante resaltar que el software Mathematica nos permitió graficar y visualizar de manera dinámica el movimiento del cuerpo al deslizarse sobre la curva, de hecho, al emular el movimiento de los tres cuerpos con distintas posiciones iniciales se pudo corroborar dinámicamente que la cicloide es tautócrona.

Referencias bibliográficas

- Courant, R. & Robbins, H. (1941). *What is mathematics?: An elementary approach to ideas and methods*. London: Oxford university press.
- Galileo, G. (1638). *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica & i movimenti locali*. Trad. Henry Crew & Alfonso de Salvio. (1954). Dialogues concerning two new sciences New York, U.S.A.: Dover Publications.
- Britton, J. (Productor). (2011). *The Cycloid* [Archivo de video]. De:
<https://www.youtube.com/watch?v=k6vXtjne5-c&t=5s>
- Smith, D. E. (1959). *A source book in mathematics*. New York: Dover Publications.
- Struik, D. J. (1986). *A source book in mathematics 1200-1800*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- Phillips, L. (Productor). (2014). *The Tautochrone Curve* [Archivo de video]. De:
<https://www.youtube.com/watch?v=Q2q7e-ReC0A>
- NPS Physics. (Productor). (2015). *Brachistochrone Problem - Think you know which ramp is fastest?* [Archivo de video]. De:
<https://www.youtube.com/watch?v=VRgxJCWBKk0>
- Mahieu, E. (Autor). *Sliding Along a Tautochrone* [Wolfram Demonstrations Project Published: November 30, 2011]. De:
<http://demonstrations.wolfram.com/SlidingAlongATautochronePath/>