A RACIONALIZAÇÃO DE FRAÇÕES IRRACIONAIS: UMA DISCUSSÃO INTRODUTÓRIA

Antonio Sales- José Felice -José Wilson dos Santos-Luciana Kemie Nakayama
a.sales@terra.com.br-jfelice2@hotmail.com-projwilson@hotmail.com-
lucianakayama@yahoo.com.br
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul - Brasil

Tema: Pensamiento Algebraico.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Médio (11 a 17 años)
Palavras-Chave: Espírito Científico, Divisão como Medida, Objetos Matemáticos.

Resumo

O presente trabalho consiste numa discussão sobre o processo de racionalização das frações irracionais. Sendo um recorte de um trabalho mais amplo discute resumidamente o significado da racionalização, as diversas ideias que conduzem a uma divisão e como essas ideias influenciam no entendimento de fração irracional. Analisa a valência instrumental didática da forma racionalizada na perspectiva da Teoria Antropológica do Didático e as dificuldades para o entendimento desse tipo de fração. Descortina a matemática que se oculta no processo de racionalização e conclui que a ideia de divisão como medida interna é a que melhor explica a fração irracional.

Introdução

Na condução de um processo de estudo da Matemática com estudantes do ensino fundamental alguns fatores inerentes ao conhecimento matemático podem causar dificuldades no relacionamento do estudante com esse conhecimento.

Essa constatação recebeu de Bachelard (1966) atenção especial ao proceder a uma psicanálise do conhecimento. Para esse teórico a abstração é o ponto culminante do espírito cientifico, mas admite que o percurso inclui três estágios a começar pela observação de imagens e o encantamento ingênuo por fatores opostos entre si.

Em um segundo estágio persiste o paradoxo de buscar na intuição, no sensível, a confirmação da abstração. Nesse estado o sujeito busca certezas tem "*alma professoral*, ciosa de seu dogmatismo, imóvel na sua primeira abstração, fixada para sempre nos eixos escolares da juventude, repetindo ano após ano o seu saber, impondo suas demonstrações, voltada para o interesse dedutivo, sustentáculo tão cômodo da autoridade" (Bachelard, 1966, p. 12 grifo do autor).

O questionamento da experiência imediata e até o desligamento em relação a ela marca o estágio final do processo. Esse terceiro estágio corresponde ao também terceiro estado de alma, isto é, de interesses onde ocorrem as perturbações provocadas "pelas objeções da razão" (Bachelard, 1966, p. 12). O estado da abstração é o estado das incertezas.

Ainda, para esse pensador da epistemologia, “o ato de conhecer se dá contra um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos”, mas “é impossível anular, de um só golpe, todos os conhecimentos habituais” (Bachelard, 1966, p. 17-18) e o conhecimento não questionado é suporte para obstáculos epistemológicos.

As proposições acima fundamentam a nossa proposta de que o estudo das frações irracionais, no ensino fundamental, deve sair da prática da racionalização sem uma discussão do que essa técnica significa. Deve abandonar a racionalização espontânea sem explicitar porque se deve recorrer a ela, isto é, sem analisar os objetivos dessa prática e sem discutir as ideias presentes no estudo das frações e qual dessas ideias melhor expressa à fração irracional.

Objetos Matemáticos e Valência Instrumental

A atividade matemática, segundo a Teoria Antropológica do Didático (TAD), se realiza mediante uma pluralidade de registros (escrito, gráfico, verbal, gestual e material). Esse componente da atividade matemática recebe nessa teoria a denominação neutra de objetos. Denominam-se objetos ostensivos tendo em vista ser a parte que apela aos sentidos.

São eles os elementos mediadores da apreensão dos objetos não-ostensivos, dos objetos propriamente matemáticos, que povoam o campo das ideias e que constituem o mundo do matemático. Não-ostensivos são objetos cuja existência é institucional, isto é, sua existência é um atributo da criação humana que os determinam, que os definem. Eles não podem mostrar-se a si mesmos, mas podem ser evocados mediante a manipulação de certos ostensivos apropriados (Casabó, 2001).

Nesse caso, fala-se em valência instrumental (Bosch & Chevallard, 1999) que corresponde à potencialidade instrumental do signo. Por exemplo, a fração que corresponde à metade do inteiro pode ser representada de vários modos, dentre eles:

a) Por uma figura. Signo esse que tem um forte potencial instrumental didático, mas um fraco potencial instrumental operacional. É difícil operar com figuras, especialmente se representarem frações diferentes.

b) Uma segunda forma de representar a mesma fração é pelo decimal 0,5, que tem grande potencial instrumental operacional, especialmente quando se usa calculadora. Da mesma forma, apresenta forte potencial quando o objetivo é inserir as frações no contexto do sistema decimal posicional. No entanto, como recurso didático tem um potencial menor do que o desenho.

Frações Irracionais

Os números irracionais expressos na forma de radicais começam aparecer nos programas escolares brasileiros ou manuais didáticos a partir do nono ano do ensino fundamental. Desse ano escolar para frente eles farão, mesmo que indiretamente, parte constante do programa e estarão presentes com muita frequência. Nem sempre é explorado, pelos autores de livros didáticos, o significado geométrico de $\sqrt{2}$, por exemplo, e a abordagem fica, na maioria das vezes, no nível algébrico onde $\sqrt{2}$ =1,4142... .

Na educação básica, principalmente no ensino fundamental, quando se depara com uma expressão em que as frações com denominadores irracionais estão presentes o procedimento imediato é ordenar que se faça a racionalização. Aliás, os livros sugerem esse procedimento uma vez que o tema é abordado através da racionalização. Citamos, como exemplo, Bonjorno, Bonjorno e Olivares (2006), aprovado pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2005.

No curso superior, supondo que o estudante tenha atingido certa maturidade intelectual, o professor não se ocupa desse detalhe, isto é, deixa o resultado em forma de fração com denominador irracional (Leon,1999), e muitos estudantes ficam se perguntando: devemos racionalizar ou não?

Essa pergunta nunca é feita no ensino fundamental, ou pelo menos em nossa experiência nunca nos deparamos com ela, porque o estudante brasileiro raramente é estimulado a questionar, especialmente nas aulas de Matemática. Em virtude disso supomos que fique sem entender o que está fazendo e sem perceber que está ocorrendo um detalhe diferente naquela aula. Não percebe que a fração $1/\sqrt{2}$ não pode ser analisada sob a mesma perspectiva da fração $1/2$.

Este trabalho pretende discutir essa questão: racionalizar ou não racionalizar? Por que é importante racionalizar no ensino fundamental? Qual deve ser a postura do professor do curso superior quando o problema aparece na sua aula?

O Estudo das Frações

Antes de prosseguir consideramos relevante discutir um pouco sobre frações ordinárias uma vez que a racionalização ocorre quando o resultado da operação é uma fração com denominador irracional.

Iezzi, Dolce e Machado (2005) introduzem o assunto no sexto ano através do tangram, isto é, focalizado a relação parte/todo e concluem afirmando:

> Podemos dizer, então, que fração é um número que representa partes de um inteiro. Nas frações o número colocado abaixo do traço é chamado *denominador* e indica em quantas partes iguais a unidade foi dividida. O número colocado acima do traço é chamado *numerador* e indica em quantas partes da unidade foram tomadas (Iezzi, Dolce & Machado, 2005, p. 154, grifos dos autores).

Fração, portanto, é um número composto de dois números e não um número composto por dois algarismos como o 23, por exemplo. Um número indica a divisão do inteiro e o outro a quantidade de partes utilizadas. Pela definição fica evidente que se o numerador se igualar ao denominador a fração representará um número inteiro. De igual modo se o numerador for igual à metade do denominador então a fração representará a metade do inteiro. O raciocínio vale para um terço, um quinto e assim sucessivamente. Essa é a ideia expressa no texto.

Dessa forma, pode-se imaginar que se um inteiro for cortado em um número muito grande de pequeninos pedaços o numerador pode ter um crescimento praticamente contínuo até se igualar ao denominador. Se denominarmos o numerador de m e o denominador de n então pode-se dizer que $0 < m \leq n$ quando o inteiro for único, isto é, quando se tratar de fração própria.

Páginas adiante os mesmos autores (Iezzi, Dolce & Machado, 2005) introduzem o conceito de dízimas periódicas através da divisão do numerador de uma fração pelo seu denominador e o resultado é um número composto por diversos algarismos (repetidos ou não). A fração como um número começa se delinear a partir desse ponto e também quando se estuda a conversão de fração em número decimal. Dois números tornam-se um como em $3/4 = 0{,}75$, onde os números três e quatro combinados dessa forma transformam-se em um único número, o 0,75 ou o 75%.

Nesse caso temos que a fração pode ser parte de um inteiro, isto é, cada número que a compõe representa um conjunto de partes, mas também pode representar uma divisão de um desses números (o numerador) pelo outro.

A fração como um número traz implícita a divisão de um de seus componentes pelo outro.

Cavalcante et al (2006, p. 156) afirmam que "As frações são usadas, no dia-a-dia, para expressar quantidades e medidas que não podem ser indicadas com números naturais".

A ideia de fração como medida é a tônica inicial desses autores. Os exemplos com medidas de canos e de parafusos evidenciam isso. Nas páginas seguintes à citada é introduzido o conceito de fração como parte de uma figura ou de um conjunto de objetos. Logo mais eles afirmam que "qualquer fração pode ser representada por meio de uma divisão e vice-versa. O traço da fração representa uma divisão" (Cavalcante et al. 2006, p. 161).

Dessa forma a fração pode ser vista: a) como um número ($3/5 = 3:5 = 0{,}6$), b) como uma parte do todo ($1/5$ é a quinta parte), c) como uma razão entre duas grandezas ou d) como medida interna, isto é, o denominador é a medida do numerador. Esta quarta visão pressupõe que em $m/n\,(m,n \in \mathrm{Z},\ n \neq 0)$ m pode ser dividido por n ou que n mede m.

Na perspectiva de razão, se temos a fração $1/2$, por exemplo, parece fácil explicar para o estudante do nível básico de escolaridade que 1 objeto foi dividido para 2 pessoas ou que 3 objetos foram repartidos para 4 pessoas, no caso de $3/4$. Igualmente é fácil dizer que em uma festa havia 3 adultos para cada 4 crianças ou 1 refrigerante para cada 2 crianças. Difícil é dizer que havia 3 refrigerantes para cada 6 décimos de uma pessoa, ou 3 refrigerantes para cada $3/5$ de pessoa.

Se adotarmos o raciocínio de divisão do inteiro em partes discretas, pensamos que se não é fácil aceitar que se divida um inteiro por um número não inteiro, supomos ser ainda mais difícil entender o significado de $1/\sqrt{2}$ ou $6/\sqrt{3}$. Fiquemos com $1/\sqrt{2}$ por ser mais simples.

Poderíamos pensar em abordar as frações irracionais com a ideia de medida, isto é, a fração como a medida de um objeto, mas entendemos que, nesse nível de escolaridade que estamos considerando, ela fica comprometida porque se $1/2$ de uma polegada representa 50% da polegada e $3/5$ representa 60% dela, o que representaria $1/\sqrt{2}$ de uma polegada?

Como ideia de uma parte do todo não parece razoável evocar porque dividir o todo em $\sqrt{2}$ pedaços não deve ser muito simples de conceber nesse nível de escolaridade.

A ideia de razão entre duas grandezas também não parece fácil uma vez que recai no já exposto de que 1 inteiro possa ser partilhado por uma quantidade irracional de indivíduos quaisquer.

Resta considerar a ideia de medida interna, a ideia de que uma parte (o denominador) mede a outra (o numerador). Medida agora não é a fração representar uma unidade de medida como vínhamos tratando até agora, mas uma relação interna à própria fração. Fração como razão entre duas grandezas de mesma natureza.

Antes de prosseguir reconhecemos que inúmeros autores admitem que não seja fácil perceber em $1/\sqrt{2}$ que um segmento que mede um metro está sendo medido por um segmento que tem $\sqrt{2}$ metros. A evidência dessa admissão está no fato de induzirem a racionalização antes de discutirem o significado dela. É como se dissessem: "racionalize e não tente entender".

De fato, se dividir um inteiro por um número decimal exato, como 0,6 ou 0,8, não tem sido fácil "convencer" o aluno de que faz sentido proceder assim, o que dizer de dividir por um decimal não exato como 1,4142...? Portanto, aqui também há obstáculos a serem superados. Conforme Bachelard (1996) ato de conhecer consiste na superação de ideias previamente constituídas e que essa ação não é imediata e nem espontânea. Há um "trajeto" cognitivo a ser percorridos, conflitos a serem vivenciados e rompimento a serem produzidos.

Mas, se as outras ideias (razão, relação parte/todo e um número) trazem dificuldades conceituais porque implica pensar em grandezas discretas insistimos então pensar no outro significado da divisão: medida. A questão, portanto, é: quantas vezes n cabe em m na fração m/n (subtendendo que estamos trabalhando com números inteiros diferentes de zero)?

Que somente a metade, de um segmento de 2 m, cabe em um segmento de 1 m talvez não seja tão complicado admitir, mas o que dizer de um segmento de 1m ser medido por um segmento que mede $\sqrt{2}$ m? Quantas vezes $\sqrt{2}$ m cabe em 1 m?

Supomos que venha dessas especificidades e dificuldades, que no nível de ensino fundamental se proceda a racionalização. Pois é mais fácil admitir que um segmento que mede $\sqrt{2}$ m seja dividido ao meio ($\sqrt{2}/2$) do que admitir que ele caiba, aproximadamente, 0,7 vezes em um segmento de 1 m como é o caso de $1/\sqrt{2}$. Dessa forma, se na via direta ($1/\sqrt{2}$) é difícil perceber a divisão de 1 por $\sqrt{2}$, pela via inversa, isto é, após racionalizada, ($\sqrt{2}/2$) mostra que em um segmento de 1 unidade cabe 70% do segmento de $\sqrt{2}$ unidades.

Logo o artifício didático da racionalização ($1/\sqrt{2}=\sqrt{2}/2$) torna o assunto mais compreensível.

Quando fazemos $1/\sqrt{2}=1/\sqrt{2}\times\sqrt{2}/\sqrt{2}=\sqrt{2}/2$, na maioria das vezes, sequer discutimos que estamos multiplicando pela unidade e é isso que dá a garantia de que $1/\sqrt{2}=\sqrt{2}/2$. É essa multiplicação pela unidade que nos permite escrever $3/5=21/35$, pois, $3/5=3/5\times 7/7=21/35$.

Dessa forma, a racionalização permite tratar essa relação entre os componentes de uma fração de forma mais plausível e o estudo da racionalização pode finalmente sair do contexto totalmente abstrato.

Entendemos que nos cursos de licenciatura esse assunto deve ser discutido pelos professores. A suposição de que todos saibam que uma fração também pode ser um número e que esse número pode, inclusive, ser irracional, pode ser falsa porque muitos estudantes podem não ter esse entendimento. Mesmo que a suposição fosse verdadeira, defendemos a discussão porque o verdadeiro problema não está na possível falsidade do pressuposto de que todos já sabem, está no fato de esquecer que esse acadêmico será professor e que trabalhará essas questões com alunos de um nível de escolaridade que requer cuidados na forma de abordar a Matemática. Tratar esse, e outros assuntos, sem a preocupação com o diálogo com a classe sobre o tema em estudo é um falha na proposta daquele que assim proceder estando na função de formador de professores. Portanto, o problema reside no fato de que o assunto deve ser discutido e nem sempre é.

Dessa forma, a nossa proposta de um tratamento diferente para as frações irracionais está respaldada. Entendemos que a racionalização possui maior valência instrumental para o entendimento do significado de uma fração com denominador irracional e que a forma racionalizada tem maior potencial instrumental didático no estudo das frações irracionais.

Considerações finais

Pelo exposto acima podemos deduzir que ensinar racionalização de frações com denominador irracional é uma atividade que se torna relevante, e justifica o dispêndio de tempo em sala de aula, se a Matemática for explorada nesse processo.

A racionalização das frações somente através da exemplificação como se faz seguida de modelos prontos para serem seguidos não contribui para o que Bachelard considera relevante para a formação do espírito científico que é marcado pela inquietação e pelo rompimento.

Entendemos que racionalizar não deve ser o foco, e sim que Matemática se "esconde" sob um processo de racionalização.

Entendemos que ao gastar muitas horas-aula exercitando racionalização podemos estar vivendo o paradoxo de ensinar muito sem ensinar nada

Referências Bibliográficas

Bachelard, G. (1996). *A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento.* Rio de Janeiro: Contraponto.

Bonjorno, J. R.; Bonjorno, R. A. & Olivares, A.(2006). *Matemática*: *fazendo a diferença.* São Paulo: FTD.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). Ostensifs et Sensibilité aux Ostensifs dans l'activité Mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/1, 77-124.

Casabó, M. B.(2001). Un punto de vista antropológico: la evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática. *Quarto Simpósio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* Huelva: Universidade de Huelva, 2001. http://www.seiem.es/publicaciones/ archivos publicaciones/actas/Actas04SEIEM/IVsimposio.pdf / Consultado 11/06/2009.

Cavalcante, L. G. et al. (2006). *Para saber Matemática: 5ª série.* 2.ed. São Paulo: Saraiva.

Iezzi, G.; Dolce, O. & Machado, A.(2005). *Matemática e Realidade: 5ª série.* 5.ed. São Paulo: Atual.

Leon, S. J. (1999).*Álgebra Linear com Aplicações*. 4.ed. Rio de Janeiro. LTC.