UN ESTUDIO EXPLORATORIO DE LOS NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN EN TORNO A LOS PROBLEMAS VERBALES EN LA ESCUELA SECUNDARIA

Diana Cecilia Pozas – María Laura Santori
dianapozas@hotmail.com – mlausantori@yahoo.com.ar
Universidad Nacional del Comahue - Argentina

Tema: La resolución de problemas como vehículo del aprendizaje matemático.
Modalidad: Comunicación breve.
Nivel educativo: medio (11 a 17 años).
Palabras clave: Teoría Antropológica de lo Didáctico – etapas de algebrización – problemas verbales – escuela secundaria

Resumen

El trabajo que presentamos se sitúa dentro del marco teórico de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999) y se basa en investigaciones realizadas por Bolea (2003), Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón (2010,2011). Estos autores proponen para el álgebra elemental un modelo epistemológico de referencia en el cual es posible fundamentar la introducción del álgebra en la escuela secundaria como instrumento de modelización y consideran que el proceso de algebrización de una organización matemática se podría dividir en tres etapas, superando así la visión del álgebra como una aritmética generalizada. En este trabajo utilizamos los instrumentos proporcionados por la TAD para analizar la organización matemática en torno a los problemas verbales a partir de observaciones realizadas en un colegio secundario público de la ciudad de Bariloche (Argentina). Se observó que las tareas más importantes que se propusieron fueron: la manipulación de expresiones algebraicas, la traducción de expresiones del lenguaje natural al lenguaje algebraico y el cálculo ecuacional. Se analizó una posible ampliación de esta organización matemática con cuestiones sencillas que muestren la necesidad de tratar las técnicas de resolución como objetos de estudio en sí mismos y que permitan que progresivamente el alumno se apropie del instrumento algebraico.

Introducción

Los procesos de enseñanza y de aprendizaje del álgebra en la educación sistemática ha sido motivo de diversas investigaciones en didáctica de la matemática. En particular, las investigaciones realizadas por Sadovsky y Sessa (2005) en la Argentina, muestran que el álgebra elemental que predomina en la escuela secundaria de nuestro país se identifica con una aritmética generalizada que acota las potencialidades del álgebra como modelo de la actividad matemática y no permite un trabajo que vaya más allá de las generalizaciones y la resolución de ecuaciones.

En este trabajo analizamos la organización matemática en torno a los problemas verbales que se desarrolló en 2º año del CEM Nº 105, colegio secundario público de San Carlos de Bariloche (Argentina), donde intentamos identificar los tipos de tareas y técnicas relacionadas con dicha organización y establecer en qué medida se aproximan a una primera etapa del proceso de algebrización, considerando los niveles descriptos en Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón (2010).

Por lo que a "problema verbal" se refiere, seguimos la propuesta de Gerofski (1999) en el sentido de que la mayoría de los problemas verbales tienen tres componentes. Una "puesta en escena", estableciendo la contextualización, los caracteres y la localización de la historia que tiene lugar, aunque esta componente, a menudo, no sea esencial para la solución misma del problema. Una componente de "información", que da los datos que se necesitan para resolver el problema. Una cuestión o pregunta a la que hay que encontrar respuesta.

Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)

La TAD integra el saber matemático y la actividad matemática productora y utilizadora de este saber en términos de praxeologías u organizaciones matemáticas (OM), y propone la praxeología como una unidad mínima de análisis para describir tanto la actividad matemática como la actividad didáctica, entendiendo esta última como la actividad de estudio o ayuda al estudio de las matemáticas. La noción de praxeología incorpora en un todo indisociable la práctica matemática o praxis (formada por *tareas* y *técnicas*) y el discurso razonado o logos sobre dicha práctica (formado por *tecnologías* y *teorías*), el cual describe, explica y justifica la praxis. Al unir estas dos caras de la actividad matemática so obtiene la noción de praxeología matemática (Chevallard, 1999). A continuación explicaremos con más detalle el significado de los diferentes componentes de una praxeología.

En principio, las praxeologías siempre son obras humanas que nacen en una institución determinada como respuesta a una cuestión problemática. Luego, las cuestiones a las que una praxeología quiere dar respuesta se han de formular en términos más concretos y esto da lugar a diversos tipos de problemas. La delimitación de un tipo o de un campo de problemas es una cuestión abierta que evoluciona a medida que se desarrolla la praxeología y que además depende de la institución en la que ésta se encuentra. Para un tipo de problemas concreto se requiere una manera (sistemática y compartida en la institución) de abordar este tipo de tareas, que llamaremos técnica. La TAD considera la noción de técnica en un sentido amplio. En la mayoría de los casos no es un algoritmo, ya que las acciones que requiere su puesta en práctica comportan habitualmente cierta indeterminación. No obstante se reconoce que en una institución determinada, como por ejemplo la escuela, existe para cada tipo de tareas alguna técnica privilegiada.

Según Chevallard (1999), los elementos que forman la estructura de la praxeología u organización matemática se pueden representar como: $[T,\tau,\theta,\Theta]$. En ésta se distinguen dos bloques: el nivel de la práctica o "praxis" consta de tareas y técnicas $[T,\tau]$ que se identifican generalmente con el saber–hacer. De forma vinculada e inseparable se encuentra el discurso razonado sobre la práctica o "logos" formados por las tecnologías y las teorías $[\theta,\Theta]$. La TAD postula que no puede existir en ninguna institución una praxis sostenida en el tiempo sin que aparezca un discurso para explicar y justificar las técnicas. Se denomina *tecnología* a este discurso sobre las técnicas. El discurso tecnológico puede contener afirmaciones, más o menos explícitas, que también necesitan justificación. Aparece así un nivel superior de justificación que se denomina *teoría*.

Los programas de cálculo aritmético

La noción clásica de "problema aritmético" abarca aquellos problemas que pueden resolverse mediante una cadena de operaciones aritméticas (+, –, ×, /) ejecutables a partir de los datos del problema. Las técnicas clásicas de resolución recurren a discursos verbales y operaciones aritméticas para calcular la cantidad incógnita. A dicho proceso de resolución, o cadena estructurada y jerarquizada de operaciones, se lo denomina: *Programa de Cálculo Aritmético* (PCA). Según Chevallard (2005) los PCA aparecen y se ejecutan en el trabajo matemático de los alumnos desde los inicios de la enseñanza primaria, pero nunca se plantean cuestiones sobre su descripción, justificación o alcance. Dicho en otros términos, los PCA forman parte de la práctica matemática escolar, pero son objetos no matematizados o *paramatemáticos*. Veamos un ejemplo de problema aritmético y su respectivo PCA:

Un aeroplano recorrió 1940 km el primer día, el segundo recorrió 340 km más que el primero y el tercero 890 km menos que entre los dos anteriores.

¿Cuántos km recorrió el aeroplano en total?

Este problema se puede representar mediante el siguiente programa de cálculo:

$P(a,b,c) = a + (a + b) + [a + (a + b) – c]$

En el caso en que a = 1940; b = 340 y c = 890, se obtiene:

$P(1940,340,890) = 1940 + 2280 + 3330 = 7550$

La respuesta al problema es el resultado que se obtiene al ejecutar el PCA.

Ruiz-Munzón et al. (2010) suponen que la resolución de problemas aritméticos forma parte de las tareas que componen cierta OM que toman como sistema inicial. Muestran que en dicho sistema se pueden plantear una serie de cuestiones de naturaleza tecnológica relativas a: por qué se obtiene el tipo de resultado que se obtiene y a la interpretación de estos resultados; el alcance o dominio de validez de las técnicas y a la delimitación de los tipos de problemas que se resuelven con un mismo PCA. Estos cuestionamientos provocan la necesidad de ampliar el sistema inicial. Esta ampliación puede dividirse en tres etapas.

Primera etapa del proceso de algebrización

Para los problemas aritméticos Ruiz-Munzón et al. (2010) proponen, en principio, dos modificaciones:

P1a) Presentar problemas en donde sea necesario explicitar el proceso de resolución.

Ejemplo: Pensar un número, sumarle el doble de su consecutivo y luego, restarle el triple de su anterior. ¿Qué resultado se obtiene? Repetir el proceso con otro número. ¿Se obtiene siempre el mismo resultado? ¿Por qué?

P1b) Que la pregunta del problema no sea una cantidad o un número, sino que sea una relación.

Ejemplo: Se tienen dos números distintos. A un número le resto 18 y al resultado lo divido por 3. Al otro número lo divido por 6 y luego le resto 6. Si al final obtengo el mismo resultado, ¿qué relación hay entre estos dos números?

En los problemas aritméticos los argumentos de los que depende el PCA son datos numéricos conocidos y el dato desconocido es una cantidad. En cambio, en **P1a)** será necesario discutir porqué el resultado del PCA no depende del número pensado inicialmente; y en **P1b)** se pide hallar una relación. Esto nos lleva a un cuestionamiento tecnológico-teórico y es allí donde, según Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón (2011) cobra *razón de ser* la aparición del álgebra como instrumento modelizador de la situación, especialmente en todos los problemas donde la técnica empleada para resolver la situación planteada es la técnica de simplificación.

Segunda etapa del proceso de algebrización

El paso a la segunda etapa del proceso de algebrización se identifica con la necesidad de igualar dos PCA que tengan los mismos argumentos. En esta etapa aparecen problemas en los que aun habiendo simplificado el PCA correspondiente, la técnica del patrón de Análisis-Síntesis (Gascón, 1993) fracasa puesto que no se consigue reducir la incógnita a los datos. Se requiere de nuevas técnicas, las técnicas de cancelación, ya que hay que manipular los argumentos de ambos lados de una igualdad (ecuación). Dichas técnicas tienen por objeto obtener “ecuaciones equivalentes”.

Tercera etapa del proceso de algebrización

La tercera etapa involucra problemas en donde no se limita el número de variables y no se distingue entre incógnitas y parámetros. Esta fuerte generalización de los problemas hace que las técnicas para abordarlos en el ámbito puramente algebraico sean bastante limitadas. En términos generales podríamos decir que las tareas propias de la modelización algebraica se caracterizan por el hecho de que los datos son relaciones algebraicas y la incógnita es también una relación algebraica. Este nivel de algebrización no se alcanza en la escuela secundaria, pero se parte desde este nivel en la enseñanza universitaria, de manera abrupta y muy poco articulada con las OM vistas en la secundaria (Fonseca, 2004).

Consideraciones metodológicas y resultados

Este trabajo tiene como objetivo identificar y analizar los tipos de tareas que se proponen para enseñar la OM en torno a los problemas verbales y establecer en qué medida dichas tareas se aproximan a un primer nivel de algebrización.

Se contactó a una profesora de matemática que trabaja desde hace varios años en escuelas secundarias de San Carlos de Bariloche. Se acordó observar las clases en el momento que desarrollara el tema: resolución de ecuaciones de primer grado. El curso (2^{o} año) en donde se realizó las observaciones pertenece al CEM 105, de la ciudad de Bariloche. Los materiales de campo analizados fueron los siguientes: observaciones de clase, entrevistas con la profesora, prácticos y algunas evaluaciones de los alumnos. Parte de la ejercitación propuesta se encuentra en el anexo de este trabajo. Previo a estos problemas se ejercitaron algunas “traducciones” sencillas desde el lenguaje natural al lenguaje simbólico. Es interesante observar que la profesora dedica un tiempo relativamente considerable a esta tarea para la cual no hay una “receta”. Aquí es importante destacar que la traducción de enunciados coloquiales a expresiones algebraicas planteadas de esta manera carece totalmente de razón de ser para los alumnos y no comportan mas allá de una imposición didáctica que se debe realizar por expreso pedido del docente.

En la ejercitación propuesta por la profesora (ver Anexo) encontramos ejercicios que se podría decir que pertenecen a una etapa prealgebraica, como por ejemplo:

1) Si a un número n le sumo ¼ de su anterior y divido esa suma por 2, obtengo como resultado 3. ¿De cuál número se trata?

2. Para cada ecuación, evalúa si alguna de las indicadas es la solución:
a) $3 . m + 14 = 29$
$m = 5$ $\quad m = 9$ $\quad m = 13$
b) $4 . 8 + r . 3 - 7 = 79$
$r = 9$ $\quad r = 18$ $\quad r = 23$

En general, observamos la presencia estereotipada de ejercicios donde sólo se plantean actividades en donde la solución existe y es única. Son actividades que pertenecen al campo aritmético y que pretenden ser "algebraicas" al introducir letras. Una forma de ampliar este tipo de tareas con el objetivo de aproximarse a una primera etapa de algebrización podría consistir, por ejemplo, en plantear:

P1) Hallar, si es posible, un número n tal que: si a n le sumo el doble de su consecutivo y luego le resto el triple del número inicial, obtengo como resultado 1. Justifica tu respuesta.

P2) Para la siguiente ecuación evaluar si algunos de los resultados indicados es la solución:

$$-3.x + 18 + 3.(-2 + x) = 12 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \\ x = 21 \end{cases}$$

P3) Si a un número dado le sumamos 3, al resultado lo mutiplicamos por 2 y luego le restamos 6, ¿qué relación existe entre el resultado final y el número inicial?, ¿por qué?

En el problema P1, la justificación pedida implica el uso del elemento simbólico no numérico, cuya manipulación en términos de operaciones permite arribar o no al resultado posible. La resolución de P2 proporciona siempre el mismo resultado numérico, independientemente del valor de x con que se evalúe la ecuación dada. Aparece, por lo tanto, una cuestión tecnológica: ¿Por qué los tres valores de x verifican la igualdad? En el problema P3, más allá de que la pregunta ya no es sobre la existencia o no de un valor numérico para la incógnita es necesario la manipulación y simplificación del PCA asociado para llegar a la conclusión, y posterior validación, de que el resultado final es el doble del número inicial. Estos cuestionamientos de tipo tecnológico son, esencialmente, lo que caracteriza a los problemas que se sitúan en la primera etapa del proceso de algebrización. Pero básicamente, el elemento que fundamenta la ampliación de los tipos de problemas observados es que necesariamente se deben incluir los elementos algebraicos para poder manipular la situación y así abordar a una respuesta, más allá de las justificaciones y argumentaciones tecnológicas que serían imposibles sin una modelización algebraica pertinente.

Se observó que la mayoría de los problemas propuestos requieren, para su resolución algebraica, del planteo de una ecuación donde la incógnita aparece en ambos lados de la igualdad. Es decir, pareciera que se evitan los problemas susceptibles de ser resueltos mediante el patrón análisis-síntesis, por considerarlos demasiado "fáciles" y aparecen aquellos resolubles mediante una ecuación del tipo $a.x + b = c.x + d$. Además, se observó que los problemas presentados varían de contexto, pero no de estructura, corriendo el riesgo de reducir el álgebra a la resolución de ciertos prototipos de "problemas de planteo".

Resumiendo, intentamos mostrar que es posible hacer un planteamiento a nivel escolar donde el álgebra tenga una razón de ser, que no solo se limite a simplificar el trabajo aritmético mediante el cálculo ecuacional, sino que sea interpretado como instrumento de modelización que permita tratar con diversos problemas. Las manipulaciones de técnicas de simplificación y cancelación de ecuaciones es lo que designamos como "cálculo ecuacional". Para que el estudiante se apropie progresivamente del instrumento algebraico debe existir un trabajo en profundidad con problemas aritméticos, ya que esto favorece la evolución hacia la utilización del álgebra como instrumento de modelización y, en definitiva, aumenta el grado de algebrización de algunas organizaciones matemáticas utilizadas por los estudiantes. (Ruiz-Munzón, 2010).

Consideraciones finales

Desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico se analizó la organización matemática en torno a los problemas verbales. Ésta consiste, en un primer momento, en ejercitar las técnicas de "simplificación" y "cancelación" para resolver ecuaciones lineales y aplicarlas en la resolución de problemas verbales, es decir, generar una ecuación relativa a las condiciones específicas de los problemas enunciados. Se observó que las tareas propuestas no cubren la primera etapa de algebrización y que los problemas tienden a estructurarse en función de la complejidad de la escritura algebraica que comportan. Esto no facilita la evolución de las técnicas y se debería pensar en procesos de estudio donde la OM a estudiar esté en función de las técnicas de manera que permita el paso a niveles de algebrización superiores. Sin embargo, hemos mostrado que es posible retomar algunas de las actividades propuestas y hacerles pequeñas modificaciones para que aporten a los alumnos algo más el dominio del cálculo ecuacional, aún cuando esto es, actualmente, central en la enseñanza del álgebra en la escuela secundaria.

Referencias bibliográficas

Bolea Catalán, P. (2003) El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares. (Tesis doctoral) Universidad de Zaragoza, España.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 19(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique et nouvelle épistémologie scolaire. En: Ducourtioux, C. & Hennequin, P. (Eds.) *La place des mathématiques vivantes dans l'enseignement secondaire.* pp. 239-263. París: APMEP.

Fonseca, C. (2004). Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria (Tesis doctoral) Universidad de Vigo, España.

Gascón, J. (1993) Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en didactique des Mathématiques,* 13(3), 295-332.

Gerosfsky, S. (1999) The word problem as genre in mathematics education. Simon Fraser University. Canadá.

Ruiz–Munzón, N; Bosch, M. & Gascón, J. (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Eds), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action.* pp. 655–676. Montpellier: IUFM de l'Académie de Montpellier.

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. & Gascón, J. (2011). Un modelo epistemológico de referencia del álgebra como instrumento de modelización. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage & M. Larguier (Eds.) *Un panorama de la TAD*. pp. 743-765. Barcelona: Centre de Recerca Matemàtica.

Sadovsky, P. & Sessa, C. (2005). The adidactic interaction with the procedures of peers in the transition from arithmetic to algebra: a milieu for the emergence of new questions. *Educational Studies in Mathematics,* 59, 85-112.

ANEXO

Sección de un práctico propuesto por la docente:

PROPIEDAD UNIFORME

Así como en la balanza, si realizo cualquier acción sobre uno de los platillos, debo hacer lo mismo en el otro para mantener el equilibrio…

"Una igualdad no se altera si al realizar cualquier operación matemática sobre uno de los miembros de la igualdad, aplico la misma operación al otro miembro"

Ejemplo1:

1er miembro 2do miembro

$2 . a + 5 = 3 . a$ resto "2 a" a ambos miembros

$2 . a + 5 - 2 . a = 3 . a - 2 . a$ (esta igualdad sigue siendo verdadera)

Ejemplo 2:

$5 . x = 20$ divido ambos miembros por 5

$$\frac{5.x}{5} = \frac{20}{5}$$

1. Determina cuál de las siguientes expresiones corresponden a una ecuación. Explica en cada caso cuáles son las condiciones que se cumplen o no:
   a) $3.d + 23 = 53$
   b) $5. (s - 12)$
   c) $(m + 4) . 3 = 20 + 7$
   d) $2 . 13 + 45 = 70 + 1$
   e) $-x - 2 = 36$

2. Para cada ecuación, evalúa si alguna de las indicadas es la solución:
   a) $3. m + 14 = 29$
   $m = 5$ $m = 9$ $m = 13$
   b) $4 . 8 + r . 3 - 7 = 79$
   $r = 9$ $r = 13$ $r = 23$
   c) $6 + (b + 5) . 2 = 24$
   $b= 4$ $b= 8$ $b= 2$
   d) $12 + 5 . x = 4 . x + 22$
   $x = 12$ $x= 20$ $x = 10$
   e) $13 = 5 . b + 3$
   $b = 3$ $b = 20$ $b= 2$

3. Unir cada enunciado con la ecuación que lo represente (si es posible)
   - El perímetro de un cuadrado es igual a 32cm.
   - La edad de María aumentada en 8 años es igual a 13
   - 3 caramelos y 2 pesos suman lo mismo que un caramelo y $2,80
   - El doble de : mi edad más 12, es igual a 44
   - La cantidad de revistas que compró Juan en un año es igual a la mitad de las revistas que compró Pedro en ese mismo tiempo.

   - $2. (e + 12) = 44$
   - $Y: 2 = X$
   - $3c + 2 = c + 2,80$
   - $L . L = 32$
   - $2 . e + 12 = 44$
   - $L . 4 = 32$
   - $M + 8 = 13$

Algunos problemas verbales o “problemas de planteo” sobre ecuaciones de primer grado con una incógnita propuestos en el práctico y en la evaluación.

1) David y Ailén fueron a ver un recital de su banda favorita de rock. Ailén pagó su entrada 2,7 veces más cara que la de David. Si entre ambos gastaron $ 700, ¿cuánto costó cada clase de entrada?
2) Hallar tres números consecutivos tales que, el doble del menor, más el triple del mediano, más el cuádruple del mayor, equivalgan a 740.
3) Tenemos dos depósitos de agua con la misma capacidad. Uno tiene 20 litros y hay que echarle el agua de 9 baldes para llenarlo. El otro depósito tiene 52 litros y hay que echarle 5 baldes más para llenarlo. ¿Qué cantidad de agua cabe en cada depósito?
4) La familia García tiene que viajar desde Bariloche a Neuquén, distante a 434 km. En un punto del trayecto deciden parar a tomar un refresco. Si después de la parada aún le quedan por recorrer 1,8 veces más de kilómetros que los que ya llevan recorridos, ¿a qué distancia se encuentran de Neuquén?
5) ¿Qué número pensé si los dos tercios de ese número, más un cuarto, es igual a 4?
6) Los ¾ de la edad del señor Pérez más dos años suman la edad de su esposa que tiene 47 años. ¿Cuál es la diferencia de edad entre ambos?
7) Si a un número n le sumo ¼ de su anterior y divido esa suma por 2, obtengo como resultado 3. ¿De cuál número se trata?
8) Un avión parte de Bs As con destino a Madrid con 3/5 de los asientos ocupados. Hace escala en San Pablo donde abordan 21 pasajeros y quedan ocupados las ¾ partes de los asientos. ¿Cuántos pasajeros pueden viajar en ese avión?
9) Una pelota pesa medio kilogramo más la mitad de su propio peso. ¿Cuánto pesa la pelota?
10) José compró una moto usada, y agregó 1/5 de lo que la había pagado para dejarla como nueva, y tuvo que pagar $30 para obtener su registro de conducir. Todos esos gastos fueron de $4590. ¿Cuánto pagó por la moto?
11) Un padre repartió $2000 entre sus tres hijos, de manera que el primero recibió $100 más que el segundo, y éste $200 más que el tercero. ¿Cuánto dinero recibió cada uno?