

TRES ENFOQUES DEL TEMA FUNCIONES POLINÓMICAS EN 2^{DO} BD.

Margot Madama – Mary Curbelo.

margot.madama@hotmail.com marycur5771@hotmail.com

Liceo “José Alonso y Trelles” de la ciudad de Tala, Uruguay.

Tema V.4 - Materiales y Recursos Didácticos para la Enseñanza y Aprendizaje de la Modalidad: Taller

Matemática.

Nivel: Medio (11 a 17 años)

Palabras clave: Materiales y Recursos Didácticos para la Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática

Resumen

Cuando nos enfrentamos a la planificación de un tema lo primero que nos cuestionamos es cómo empezar, qué conceptos jerarquizar, qué recordará el alumno de cursos anteriores, qué estrategia usar para que los conceptos y propiedades, que luego van a necesitar, queden claros.

Nuestra propuesta para el taller es trabajar con tres planificaciones del tema: Funciones polinómicas a nivel de 2° de Bachillerato. Se pedirá a los asistentes que tomen el lugar de nuestros alumnos y las realicen, luego entre todos analizaremos y discutiremos en qué momento del tema aplicarlas (si desde el comienzo como disparador y parte del proceso, al culminarlo para dar una visión general, al evaluarlo dando un cierre, o si de las tres podemos seleccionar partes y utilizarlas para enriquecer el aprendizaje del tema).

Una de las propuestas es plantear la utilización de un juego didáctico (Rompecabezas con fichas) como estrategia de aprendizaje y motivación en el aula. La segunda es a través del software Geogebra, utilizando la herramienta “deslizadores”, analizar diversos casos y por último una propuesta más tradicional con un repartido preparado para los alumnos donde se aborden los diferentes conceptos.

Introducción:

¿Juego, herramienta informática y/o planificación tradicional?

- ¿Por qué el juego?

Porque consideramos que ayuda a desarrollar las potencialidades intelectuales, sensitivas, afectivas y físicas del alumno, llevándolo a involucrarse en el proceso. El adolescente no aprende aisladamente ni por sí solo, es conveniente fomentar la participación, la discusión y la libre expresión de sus ideas. Insistir en justificar los propios argumentos y proporcionar razones que los hagan creíbles. Todo ello lleva al estímulo del trabajo en equipo, al intercambio de ideas y a la selección y elaboración de información de modo compartido. Muchas veces las dificultades que presentan nuestros alumnos se deben a bloqueos psicológicos y estos pueden superarse si son motivados adecuadamente.

- ¿Por qué el uso de una herramienta informática?

Porque la interpretación geométrica a través del software Geogebra lleva al estudiante a visualizar, reinterpretar, afianzar, y elaborar los conceptos desarrollados en clase o descubrir características y/o propiedades de los mismos ya que su utilización permite una visión global del problema, aumenta el número de casos que puede analizar con solo mover el valor de los parámetros (deslizadores), logrando así deducir las propiedades y características necesarias para el tema. De esta forma el trabajo permite estimular la observación, la experimentación y la generalización, así como la elaboración de conjeturas y su verificación experimental, permitiendo que el alumno no se pierda en construcciones intermedias.

- **¿Por qué la planificación tradicional?**

Porque por medio de un repartido teórico-práctico el alumno recibe instrucciones paso a paso que lo guían a deducir conceptos y/o propiedades que luego enuncian y aplican a la resolución de problemas. El material así organizado se traduce en una secuencia de actividades que lleva al estudiante a conocer el tema y no se pierde tiempo copiando la letra.

“No se trata de motivar a los estudiantes, buscando una fórmula mágica sino, más bien, de diseñar estrategias didácticas que generen y mantengan el proceso motivacional de los diferentes estudiantes que tenemos en una clase”

A CONTINUACIÓN SE DESARROLLAN LAS ACTIVIDADES A TRABAJAR:

1) Una de las propuestas es plantear la utilización de un juego didáctico (rompecabezas con fichas) como estrategia de aprendizaje y motivación en el aula.

Rompecabezas con funciones polinómicas

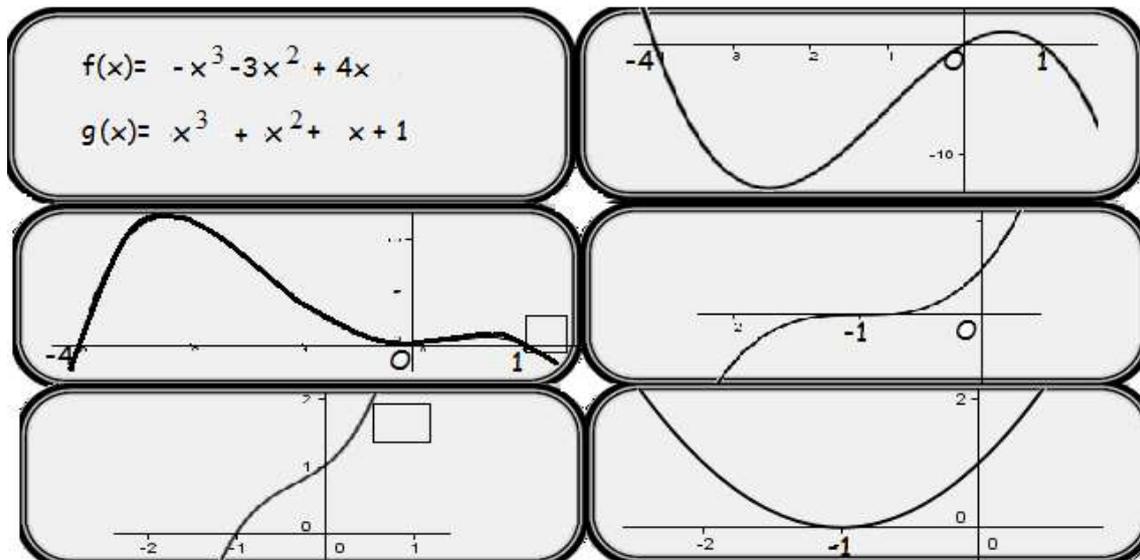
Objetivos: Lograr que el alumno se exprese con claridad y precisión tanto en forma oral como escrita. Que se cuestione y discrepe con el docente y sus compañeros en las diferentes actividades en cuanto a su enunciado y a su resolución para así confrontar los diferentes conocimientos, además de que el desarrollo del tema sea aprovechado por el colectivo del grupo y no sólo por una minoría.

Reglas del juego: Se forman grupos de 5 o 6 alumnos cada uno. Cada grupo recibe un sobre conteniendo fichas que corresponden a 5 actividades diferentes, además de una hoja donde escribirán lo que se les pida. Deberán: agruparlas por actividad y ordenar la secuencia en cada actividad. Luego deberán dar la letra de cada problema. Para terminar

y por sorteo, pasarán uno a uno los grupos a realizar la actividad que les toque, debiendo explicarla en el pizarrón.

Fichas del juego:

$f(x) = -2(x-3)(x-2)(x+1)$ $g(x) = 2(x-3)(x-2)(x+1)$ $h(x) = 2(x+3)(x+2)(x-1)$																
$g(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$ <p>0 1 -3</p>	$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 10$															
	$f(x) = 2x^2 + 2x + 3$ $g(x) = 2x + 6$ $h(x) = -x^2 + 1$ $i(x) = x - 1$ $j(x) = -2x$															
$-2x^3 - 6x^2 + 2x + 6, \quad x=1; \quad x=-1 \text{ y } x=-3$	$2x^3 - 2x \quad x=1; \quad x=-1; \quad x=0$															
$4x^3 + 16x^2 + 18x + 18 \quad x=-3$	$-4x^3 - 8x^2 + 12x \quad x=0; \quad x=1; \quad x=-3$															
$f(x) \begin{array}{ l} x^2 + x - 6 \\ \hline 0 \quad q(x) \end{array}$	<table border="1"> <tbody> <tr> <td></td> <td>3</td> <td>4</td> <td></td> <td>-6</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		3	4		-6										
	3	4		-6												
$\text{sgn } f(x) \begin{array}{c} - \quad 0 \quad + \quad 0 \quad - \quad 0 \quad + \\ -3 \quad -\frac{1}{3} \quad 2 \end{array}$	$f(x) = 3x^3 + 4x^2 - mx - 6$															



- 2) La segunda propuesta es a través del software geogebra, utilizando la herramienta “deslizadores”.

Función polinómica de tercer grado (programa geogebra)

Objetivos: Analizar un buen número de casos para luego deducir características y propiedades de las funciones polinómicas de tercer grado. Actualizar las operaciones entre polinomios. Obtener funciones polinómicas de tercer grado por descomposición en factores primos. Representar funciones de tercer grado, a partir de sus raíces y a partir del corrimiento de otras ya representadas. Distinguir cuando un gráfico corresponde a una función polinómica de tercer grado.

1ra parte: Expresión analítica, representación gráfica, valor numérico, ordenada en el origen, raíz, signo.

- 1) Preparación de zona gráfica: debes tener en la pantalla vista algebraica, vista gráfica y en ella ejes (si esto no ocurre busca en la barra superior la opción vista y elige lo que necesitas).
- 2) Crea los deslizadores **a**, **b**, **c** y **d** con intervalo entre -20 y 20 (para ello busca  luego dar clic en vista gráfica, y en intervalo escribe -20, 20 respectivamente, debes hacerlo cuatro veces).
- 3) Escribe en la barra inferior $f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$. Verás la expresión de la función en la vista algebraica y su representación en la vista gráfica.
 ¿Cuál es la expresión de f? ¿Y su gráfico?

- 4) Cambia los valores de **a, b, c y d** para ello mueve el deslizador para que $a=2$, $b=-1$, $c=-13$ y $d=-6$. ¿Cuál es la expresión de f ?.....
¿Cómo queda su gráfico?
- 5) Cambia los valores de a , b , c y d , luego vuelve a responder las preguntas anteriores (observa 3 casos distintos)
- 6) ¿Para algún valor de a la función f deja de ser de tercer grado?
Siempre que a no sea la función $f(x)= ax^3+bx^2+cx+d$ se denomina función
- 7) Vuelve a trabajar con $a=2$, $b=-1$, $c=-13$ y $d=-6$, luego ubica un punto A sobre el gráfico de f (para ello selecciona en la barra superior  y luego señala la curva). Verás en la vista algebraica sus coordenadas. Anótalas: $A(\dots; \dots)$
- 8) Mueve el punto A para que su abscisa sea -1 , ¿cuál es su ordenada?.....
¿Cómo la calculas?
- El número ... es la imagen de -1 o el valor numérico de la función polinómica para $x=-1$
- 9) Ahora indica el punto de abscisa 0 , ¿cuál es su ordenada?
¿Tendrá relación con a , b , c o d ?
- 10) ¿Qué nombre recibe?
- 11) Ubica el punto A con ordenada sea 0 . ¿Cuál es su abscisa? ¿Es única?
Si tú respuesta fue no, escribe los demás valores.....¿Qué nombre recibe/n?.....
- Oculta la función f (indica la curva y con botón secundario señala “Mostrar objeto”)
- 12) Crea 2 nuevos deslizadores **e** y **h**.
- 13) A) Representa: i) $g(x)=(ax+b)(cx+d)(ex+h)$; ii) $h(x)=(ax+b)(cx^2+dx+e)$
B) Observa el grado de cada función obtenida, modifica los valores de los deslizadores utilizados y luego deduce qué condiciones deben cumplir los coeficientes de g y de h para que ellas sean funciones polinómicas de tercer grado?
- 14) ¿Cuántas raíces tiene la función g ? ¿Y h ?
- 15) ¿Cómo obtendrías sus raíces algebraicamente?
- 16) ¿Siempre son tres valores?
- 17) Escribe el signo de g y de h tomando diferentes valores de **a, b, c, d, e** y **h**
- 18) Conclusiones:

2da PARTE: Corrimiento de funciones polinómicas de tercer grado.

Dada la función: $f(x)=x^3+2x^2-3x+2$. Se nos pide que realicemos su bosquejo gráfico e indiquemos sus raíces reales.

Dicha función no tiene raíces evidentes y no tenemos dato alguno sobre sus raíces.

Vamos a buscar algún método gráfico que nos permite representarla.

- **Pon Archivo, nuevo.**

Ejemplo 1: (trabajo a ser realizado con Geogebra)

- 1) Crear un deslizador **a**, con intervalo entre 0 y 20. Elije a=3
- 2) Representa la función $f/f(x)=x^3$. En el mismo sistema de ejes representa las funciones $g/g(x)=x^3+a$, $h/h(x)=x^3-a$; $k/k(x)=-x^3$.
- 3) ¿Qué observas sobre las diferentes curvas?
- 4) Mueve el deslizador a y vuelve a responder la pregunta anterior.....
- 5) Compara f con g, ¿puedes escribir una en función de la otra?.....
- 6) Compara f con h, ¿puedes escribir una en función de la otra?.....
- 7) Compara f con k, ¿puedes escribir una en función de la otra?.....

- **Pon Archivo, nuevo.**

Ejemplo 2:

Crea un deslizador **a** tal que $a \geq 0$. Luego representa en un mismo sistema de ejes las

funciones: $f/f(x)=x^3-3x^2+2x$; $g/g(x)=x^3-3x^2+2x+a$; $h/h(x)=x^3-3x^2+2x-a$.

Mueve el deslizador a. ¿Qué observas?.....

¿Puedes expresar la función g en función de f?..... ¿Y h?.....

Conclusiones:

- ✓ Si en una función f se suma a su imagen un real positivo a ($f(x)+a$), se debe mover la función f a nivel del eje ____ una cantidad ____ de unidades hacia _____.
- ✓ Si en una función f se resta a su imagen un real positivo a ($f(x)-a$), se debe mover la función f a nivel del eje ____ una cantidad ____ de unidades hacia _____.
- ✓ Si en una función f se multiplica a su imagen por -1 ($-f(x)$), se debe simetrizar la función f respecto del eje _____.

Volviendo al ejemplo: Teníamos $f/f(x)=x^3+2x^2-3x+2$.

Vamos a representar la función $g/g(x)=x^3+2x^2-3x$ y luego por corrimiento deduciremos el bosquejo de f.

3) Y por último una **propuesta más tradicional** con un repartido preparado para los alumnos donde se aborden los diferentes conceptos.

Función polinómica de tercer grado:

Objetivos: Actualizar las operaciones entre polinomios. Calcular el valor de un polinomio cuando a la variable le damos el valor a. Descomponer un polinomio en factores primos. Representar funciones de tercer grado, a partir de sus raíces y a partir del corrimiento de otras ya representadas. Distinguir cuando un gráfico corresponde a una función polinómica de tercer grado Presentar problemas donde halla discusión, en cuanto a su resolución y así confrontar los diferentes conocimientos adquiridos.

Repartido teórico:

Definición: Llamamos función polinómica de tercer grado a la función:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con a, b, c y $d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
a, b, c y d se llaman coeficientes del polinomio, a se llama coeficiente principal y d se llama término independiente, x es la variable independiente y f tiene grado tres.

Ejemplo: Dada $f(x) = 2x^3 - 5x - 6$.

- i) Halla $f(1)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(2)$.
- ii) ¿Puedes obtener $f(1)$, $f(0)$ y $f(-1)$ a partir de los coeficientes de la función?
- iii) ¿Qué es $x=2$ de la función polinómica f?

- Llamamos **valor numérico** de $f(x)$ con respecto a un número α , al número que se obtiene luego de sustituir la variable x por el número α y efectuar las operaciones indicadas en ella, es decir: $f(\alpha) = a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d$.

- Un valor numérico importante es el siguiente: $f(0) = d$ llamado

- Decimos que α es **raíz** de $f(x)$ si y solo si $f(\alpha) = 0$.

- **Raíces evidentes:**

A) Una función polinómica admite raíz 0 si y solo si

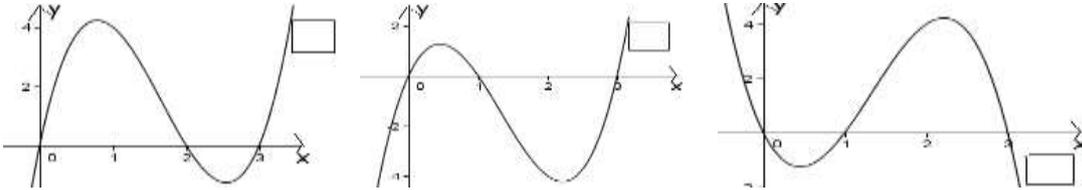
B) Una función polinómica admite raíz 1 si y solo si

C) Una función polinómica admite raíz -1 si y solo si

Ejercicios:

- 1) Dado $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. A) Indica $gr(f)$. B) Nombra los coeficientes de cada término. C) Calcula $f(1)$; $f(-1)$; $f(-2)$; $f(3)$ y $f(0)$. D) ¿Conoces alguna raíz de f? Justifica.

2) Dado el polinomio $p(x) = 2x^3 - 8x^2 + mx$. A) Halla m sabiendo que la función polinómica p admite raíz 3. B) Investiga si admite raíces evidentes. C) ¿Cuál de los siguientes gráficos corresponde a la función polinómica p ? Justifica.



Obtención de una función polinómica de grado tres como producto de funciones polinómicas de grado menor.

Ejemplo 1: Dadas las siguientes funciones: $a(x) = 2x+3$, $c(x) = (x-3)$, $d(x) = -3x$ y $e(x) = x^2 + 1$. A) Halla: i) $a.e$; ii) $a.c.d$; B) Observa el grado de cada función obtenida y deduce condiciones para obtener una función polinómica de tercer grado como productos de otras funciones polinómicas. C) ¿Cómo obtendrías sus raíces?

Ejemplo 2:

Observa los siguientes ejemplos y luego completa:

Func. polin. expresada como producto	Raíces reales	Cantidad de raíces reales
$p(x) = 2(x-1)(x-2)(x+3)$		
$q(x) = -(x-7)(x-4)(x-4)$		
$r(x) = 3(x+5)(x+5)(x+5)$		
$s(x) = (x-8)(x^2 + 1)$		

Anexo

Teorema fundamental del álgebra: Un polinomio de grado n tiene como máximo

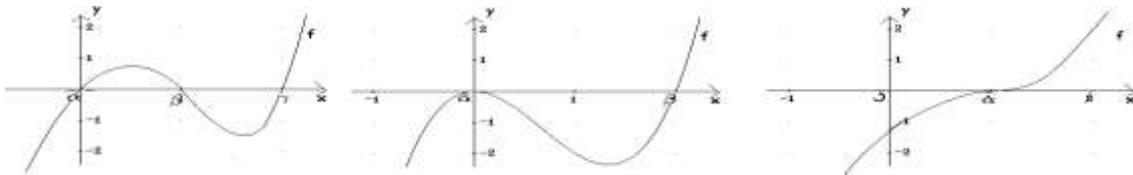
En consecuencia:

Un polinomio de tercer grado, puede tener a lo sumo

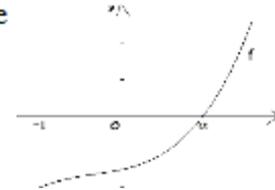
Puede tener: * tres raíces reales diferentes ó dos iguales y una diferente ó tres iguales y en dicho caso se cumple que:

Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$, α, β y γ raíces de f entonces su descomposición factorial es $f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$

Su representación gráfica será:



* Una raíz real y dos raíces imaginarias y en dicho caso se cumple que su descomposición factorial es el producto de una función polinómica de primer grado por otra de segundo grado que no tenga raíces reales: $f(x) = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$.



Ejercicios: 1) De una función polinómica f de tercer grado se sabe que: La ordenada en el origen es 8; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{0}{\alpha} + \frac{0}{4} + \dots$; además f es divisible entre $2+x$

- a) Halla una expresión para $f(x)$.
- b) Bosqueja dicha función.

2) A) Dado el gráfico de una función polinómica f .
Halla su expresión analítica sabiendo que es divisible entre x^2+4 y su gráfico es:



- 3) Una pileta de natación tiene la forma de un prisma recto de base rectangular.
 - a) Si el largo es de $(x+5)$ m, el ancho es de $(x-5)$ m y la profundidad es de $(x-16)$ m, hallen la expresión polinómica del volumen en función de x .
 - b) ¿Cuál será el volumen si x toma el valor de 20m?
 - c) Si $v=400m^3$, ¿cuál es el valor de x ?

• Representación de funciones polinómicas a través de corrimiento.

Ejemplo 1: Representa las funciones $f(x)=x^3$, $g(x)=x^3+2$, $h(x)=x^3-3$; $k(x)=-x^3$

¿Qué observas sobre las diferentes curvas?

- Compara f con g , ¿puedes escribir una en función de la otra?.....

- Compara f con h , ¿puedes escribir una en función de la otra?.....
- Compara f con k , ¿puedes escribir una en función de la otra?.....

Conclusiones:

- Si en una función f se le suma a su imagen un real positivo a ($f(x)+a$), se debe mover la función f a nivel del eje..... una cantidad..... de unidades hacia
- Si en una función f se le resta a su imagen un real positivo a ($f(x)-a$), se debe mover la función f a nivel del eje..... una cantidad..... de unidades hacia
- Si en una función f se multiplica a su imagen por -1 ($-f(x)$), se debe simetrizar la función f respecto del eje

Ejercicio: Dada la función $f: f(x)=x^3+2x^2-3x+10$. Realiza su bosquejo gráfico e indica sus raíces reales.(sug.: Bosqueja la función $g/g(x)=x^3+2x^2-3x$ y luego deduce el gráfico de f)