ESTRATEGIAS DE ESCRITURA PARA ORGANIZAR EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE GEOMETRÍA

Luz Graciela Orozco Vaca - Ricardo Quintero Zazueta
lorozco_@cinvestav.mx - quintero@cinvestav.mx
CINVESTAV, DME, México – CINVESTAV, DME, México

Tema: II.2. La Resolución de Problemas como Vehículo del Aprendizaje Matemático
Modalidad: CB
Nivel educativo: Medio
Palabras claves: Estrategias, Escritura, Resolución de Problemas

Resumen

Se reportan resultados preliminares de una investigación en curso, la cual propone utilizar estrategias de escritura como organizador de los elementos que intervienen en distintas fases de un ciclo de actividades para la resolución de problemas de geometría en secundaria. Dicho ciclo comprende: 1° Hacer explícitos los conceptos involucrados en el problema así como los datos dados y los datos que se buscan, 2° Usar objetos manipulativos que ayuden a clarificar la información, 3° Elaborar representaciones pictóricas (dibujos, diagramas o gráficas), 4° Desarrollar representaciones simbólicas (cambios al lenguaje matemático), 5° Escribir la solución del problema y la justificación de la respuesta. Al desarrollar estas fases nos enfocamos directamente en la escritura, lo cual requiere que los estudiantes analicen sus conceptos matemáticos, hagan conjeturas, preguntas, y reflexionen sobre sus procesos de trabajo para llegar a la solución del problema.

I. Introducción

Cuando observamos el trabajo de los alumnos de secundaria en la resolución de problemas podemos identificar algunas dificultades que se presentan sistemáticamente.

La primera dificultad es la comprensión del planteamiento del problema, así como la interpretación de la información proporcionada en el mismo. En la Figura 1 se muestra una situación donde no se interpreta correctamente la información, solo se efectúa la división de la figura en cuatro partes sin cumplir ninguna de las condiciones presentadas en el enunciado.

Una segunda dificultad: el alumno desarrolla solamente una parte de la resolución del problema, se encuentran algunos datos, pero no se llega finalmente a la información requerida en el problema, como podemos observar en la Figura 2.

Otra dificultad es la presentación poco clara de operaciones y respuesta, que no permite entender los razonamientos que hizo el alumno (Figura 3).

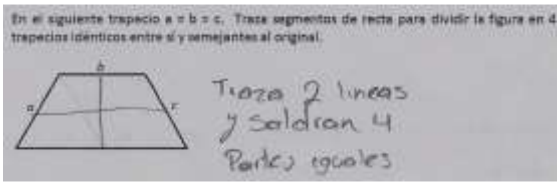


Figura 1.

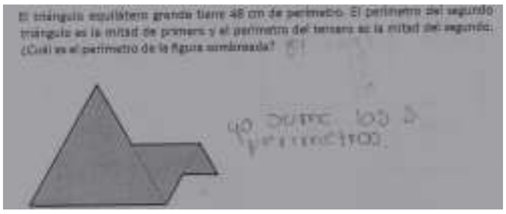


Figura 2.

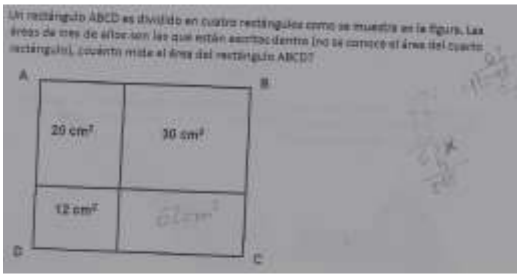


Figura 3.

El propósito de este trabajo es desarrollar un experimento de enseñanza que trabaje el proceso de la resolución de problemas de geometría, poniendo especial énfasis en la escritura como herramienta de expresión, organización, regulación y sistematización del proceso, para progresar en la solución de las dificultades arriba mencionadas.

Para desarrollar este experimento de enseñanza abordaremos las siguientes preguntas ¿cómo diseñar ciclos de actividades para el trabajo de resolución de problemas? ¿qué tipo de representaciones puede usar el alumno que le ayuden a organizar su pensamiento para resolver los problemas? Entre estas representaciones ¿la escritura puede apoyar al alumno a comprender la información proyectada en el problema, a reflexionar sobre su trabajo y aclarar sus ideas, así como a organizar sus pensamientos?

II. Revisión de literatura y marco conceptual

Uno de los primeros autores que con propósitos didácticos hizo explícitas recomendaciones para abordar el proceso de resolución de problemas fue Polya (1965). En sus trabajos se citan algunas estrategias que utilizan los alumnos en la resolución de problemas: uso de diagramas, búsqueda de patrones, tanteo y comprobación, prueba con valores determinados, el trabajo marcha atrás, la elaboración de un problema más sencillo. Las estrategias se aprenden con el paso del tiempo y su aplicación en la resolución del problema ayuda a los estudiantes a ser más conscientes de lo que hacen, así como a justificar sus resultados.

Polya (1965) distingue cuatro fases en la resolución de problemas: 1) Comprensión del problema; 2) Elaborar un plan con varias consideraciones para la solución del problema; 3) Poner en marcha el plan y cumplirlo; 4) Regresar hacia atrás. Volver a emplear los mismos procedimientos y dar sentido a la respuesta.

Schoenfeld profundiza en las ideas de Polya estudiando sus componentes cognitivas y las dificultades que se presentan en la práctica. Utiliza la palabra "problema" para nombrar una tarea que es difícil para el sujeto que está tratando de realizarla (1985). Basándose en los resultados de algunos de sus estudios, Schoenfeld (1987) encontró cuatro dimensiones que influyen en el proceso de resolución de problemas:

1ª. *Dominio del conocimiento o recursos*. Representan un inventario de lo que el individuo sabe y de las formas en que incorpora ese conocimiento.

2ª. *Estrategias cognitivas*. Son las estrategias generales que pueden ser útiles para avanzar o resolver un problema (estrategias y sub-estrategias).

3ª. *Estrategias metacognitivas*. Es el conocimiento del individuo de su propio proceso cognitivo, el monitoreo activo y la auto evaluación de las decisiones y procesos utilizados en la resolución del problema.

4ª. *Sistemas de creencias*. La concepción que el individuo tenga acerca de las matemáticas.

Schoenfeld concluye que "*la resolución de problemas se enfrenta a una tarea de enorme proporción, la búsqueda de una síntesis de las mejores habilidades y conocimientos a partir de una serie de disciplinas muy dispares*" (1983 pág. 45) y lo más importante para él, son los procedimientos matemáticos que usan los alumnos para solucionar los problemas.

También se han indagado la influencia de elementos contextuales en el proceso de resolución de problemas. Laborde (1988) analizó los fenómenos de enseñanza - aprendizaje y propone un proceso de enseñanza de la geometría que se lleva a cabo en cuatro fases. La primera fase de diagnóstico, se enfoca a las *concepciones iniciales* de los alumnos (en ocasiones erróneas). La segunda fase la *desestabilización de las concepciones erróneas*, utilizando material manipulativo (figuras trazadas en papel, figuras construidas en geoplanos, etc.), el trabajo en clase, la exposición de sus respuestas en tablas, la defensa de la solución por cada grupo en la argumentación, el debate entre grupos y la institucionalización (recapitulación). La tercera fase *la utilización analítica de las propiedades de geometría*, la acción de la geometría: una construcción. La cuarta fase *el contexto de comunicación* donde los alumnos cobran conciencia de la necesidad de un lenguaje común para elaborar un mensaje escrito.

Asimismo, existen autores que desde una perspectiva general del diseño de situaciones didácticas le han prestado atención también al papel que juega en esas situaciones el proceso de resolución de problemas. Brousseau (1998) especifica que la adquisición de un conocimiento exige dos fases: la de formulación y la de comunicación, en las cuales este conocimiento se usa para tomar decisiones. En la primera el conocimiento esta formulado con la intención de unos para aportar la información a otros. En la segunda fase se da la validación en la cual el conocimiento es utilizado para justificar las decisiones tomadas y los enunciados necesarios sobre los objetos matemáticos puestos en juego.

III. Las representaciones y la escritura en la resolución de problemas

Se ha observado que la lectura y la escritura juegan un rol importante en el proceso de resolución de problemas. Hyde, A. y Hyde, P. (1991) en el libro de Mathwise: Teaching Mathematical Thinking and Problem Solving identificaron cinco estrategias que se basan en representaciones creadas por los estudiantes, a través de esta creación se da verdaderamente la construcción del significado. Consideran que el lenguaje escrito debe ser utilizado a lo largo de estas cinco estrategias.

Figura 4. Estrategias identificadas por Hyde

Cuando los estudiantes escriben sobre sus conceptos matemáticos, preguntas, predicciones y soluciones del problema fortalecen su pensamiento, aclaran sus opiniones y reflexionan sobre su trabajo. Mientras que el lenguaje oral surge de lo espontáneo, la escritura requiere un análisis y reflexión de todo el proceso de trabajo elaborado para llegar a la respuesta.

Nuestro trabajo está relacionado sobre todo con la primera y la tercera dimensión que propone Schoenfeld para establecer las cinco fases del ciclo de actividades para la resolución de problemas de geometría, todas con dirección a la representación y escritura (Figura 5).

La primera dimensión -los recursos con los que cuentan los estudiantes- entraría en la segunda, tercera y cuarta fase de nuestra propuesta, mientras que la tercera dimensión se estaría trabajando a lo largo de las cinco fases con la escritura al servicio de los procesos meta cognitivos para la resolución de problemas.

Figura 5. Fases del ciclo de actividades para la resolución de problemas

En estas cinco fases pondremos especial atención en el uso de las representaciones y la escritura como herramientas metacognitivas. Consideraremos también las estrategias encontradas por Hyde para la elaboración de las actividades.

IV. Método

Esta investigación trabajará el diseño y aplicación de una propuesta didáctica para estructurar las actividades y las consignas de acuerdo a las cinco fases, descritas en el apartado anterior, para lo cual nos apoyaremos en el diseño de actividades reveladoras del pensamiento propuesto por Lesh (2000), así como en las estrategias identificadas por Hyde (1991), tomando en cuenta el enfoque de Schoenfeld (1985) "*no es suficiente que el alumno conozca las diversas estrategias, sino que es importante que participen en experiencias relacionadas con el cuándo y cómo utilizarlas*".

El escenario de trabajo será la presentación de un problema, con consignas que faciliten al alumno trabajar con una lista de preguntas: ¿cuáles son los datos que me da el problema? ¿cuáles son los datos que se deben buscar? ¿qué conocimientos tengo acerca del tema? ¿qué necesito encontrar? ¿qué representaciones me pueden ayudar para llegar a la solución? ¿cómo lo voy hacer? ¿qué pasos voy a seguir para resolver el problema? ¿cómo justifico la respuesta que encontré?

Todas las respuestas a estas preguntas así como las veredas a seguir que decida el alumno deberán quedar plasmadas con la escritura en hojas de trabajo, las cuales serán, junto con el material didáctico manipulado, las fuentes de datos para mirar y analizar la influencia de las representaciones en el proceso de resolución de problemas.

V. Resultados preliminares

Hasta el momento, hemos analizado las soluciones dadas por 30 alumnos a doce problemas en un estudio exploratorio. El análisis de dichas respuestas, así como las dificultades que se les presentaron al momento de resolverlos, sirvieron para definir la estructura del experimento de enseñanza en cinco fases.

Se pilotearon las actividades para el experimento de enseñanza, trabajando 15 sesiones de 50 minutos cada una, con alumnos de tercero grado de secundaria. En las primeras tres sesiones se elaboró un glosario con los conceptos fundamentales de geometría (triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares, etc.). Las siguientes dos sesiones se presentaron las consignas que debía seguir los alumnos al resolver los problemas, se analizaron 2 problemas entre todo el grupo siguiendo las preguntas, descritas en el apartado anterior. Las 10 sesiones restantes los alumnos participantes resolvieron los doce problemas trabajando las consignas como guía para las cinco fases. La lista de preguntas se colocó en un cartel para no limitarles su espacio de trabajo y cada uno escribió sus procesos considerando las indicaciones.

Al terminar las sesiones de trabajo se aplicó una evaluación a todos los alumnos de tercer grado con el fin de observar si había logros diferentes entre los alumnos que participaron en el piloteo de las actividades y los que no participaron en ellas. Podemos observar algunos cambios en los resultados del problema presentado en la Figura 2.

Los alumnos que participaron en las sesiones se ayudaron de las representaciones dadas para situar la información proporcionada, elaboraron construcciones auxiliares para clarificar la información de cada pieza, desarrollaron las operaciones necesarias para llegar a la respuesta y justificaron los pasos que siguieron para obtener la solución. Esto lo podemos observar en el inciso *a* del Anexo 1.

Los alumnos que no participaron en las sesiones de trabajo, siguiendo la indicación de que era necesaria la justificación de su contestación, escribieron un poco más en sus hojas de trabajo sin llegar a la respuesta correcta. Establecen la relación entre el perímetro de cada figura, pero no identifican la información que solicita el problema (ver el inciso *b* del Anexo 1).

Prestamos atención en las respuestas dadas a otro problema y se muestran diferentes situaciones: a) alumnos que hicieron todos los pasos necesarios, pero no llegan a obtener la respuesta final; son claros sus conceptos y fórmulas, pero no identifican los datos que solicita el problema o pierden la relación entre su procedimiento y la solución del mismo; b) alumnos que sólo trabajan una parte de la información, no identifican el total de los triángulos y su respuesta es parcial; c) alumnos que trabajan únicamente la anotación ya sea de los datos en la representación dada o de la fórmula para obtener el área de un triángulo, sin llegar en ningún momento a una respuesta (ver Anexo 2).

Los alumnos que participaron en el piloteo de las actividades sitúan los datos en la representación dada. Identifican los datos que se dan en el problema y los que se buscan, el primer alumno nombra cada punto de la figura para identificar los diferentes triángulos que se forman, mientras el segundo representa por separado cada uno de los triángulos y ambos obtienen el área total. Explican el total de triángulos de cada medida que aparecen en la figura y justifican la suma total del área de todos los triángulos (ver Anexo 3).

Es necesario continuar el análisis de las diferentes respuestas que se presentaron en la evaluación general aplicada a todos los estudiantes del tercer grado y los procesos que siguieron los alumnos que participaron en el piloteo de las actividades al apoyarse en las diferentes representaciones (lingüísticas, corporales, dibujos, concretas, simbólicas).

Dicho análisis también servirá de apoyo para elaborar actividades que generen los elementos de representaciones y escritura con el fin de ampliar y mejorar el repertorio de herramientas metacognitivas para la resolución de problemas.

VI. Reflexiones actuales

Debido a los cambios del programa educativo y el tipo de evaluación que se aplica a los alumnos, se ha descuidado la atención a la escritura como tipo de representación que puede servir al estudiante para manifestar sus conocimientos y justificar sus respuestas; además para clarificar, organizar y formalizar su pensamiento. Consideramos necesario trabajar sobre las representaciones que el alumno realiza durante el proceso de resolución de problemas para indagar su nivel de conocimientos así como sus dudas o conceptos erróneos y así proponer cambios para lograr fortalecer su aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1998). *La téorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Hyde, A. A. y Hyde, P. R. (1991). *Mathwise: Teaching Mathematical Thinking and Problem Solving*. Portsmouth, NH: Heinemmann.

Laborde, C. (1988). Problemes de l'enseignement de la geometrie au college. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. IREM de Strasbourg, 1 (75-93).

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A. y Post, T (2000). Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers. *Handbook of research design in mathematics and science education*. London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Lesh, R. y Lehrer, R. (2003). Models and modeling perspectives on the development of students and teachers. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(2-3), 109-129.

Pólya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Schoenfeld, A. (1983). *Problem solving in the mathematics curriculum: A report, recommendation, and annotated bibliography*. Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

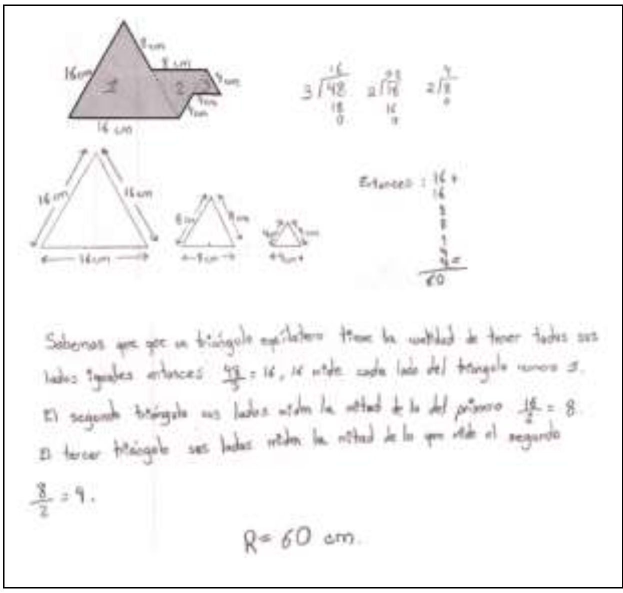
Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.

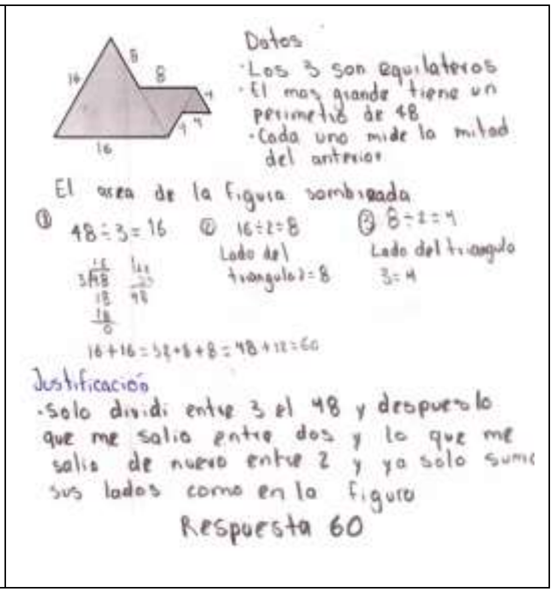
Schoenfeld, A. (1987). What's all the fuss about metacognition? En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp 1-31). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics, teaching and learning.* (pp. 334-370). National Council of Teachers of Mathematics. New York: Macmillan.

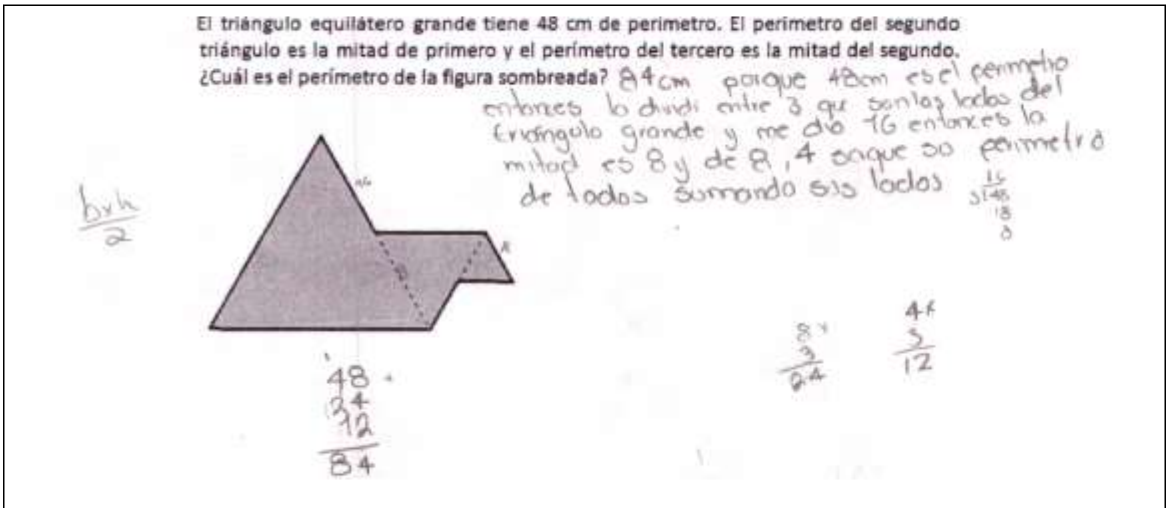
Anexo 1.

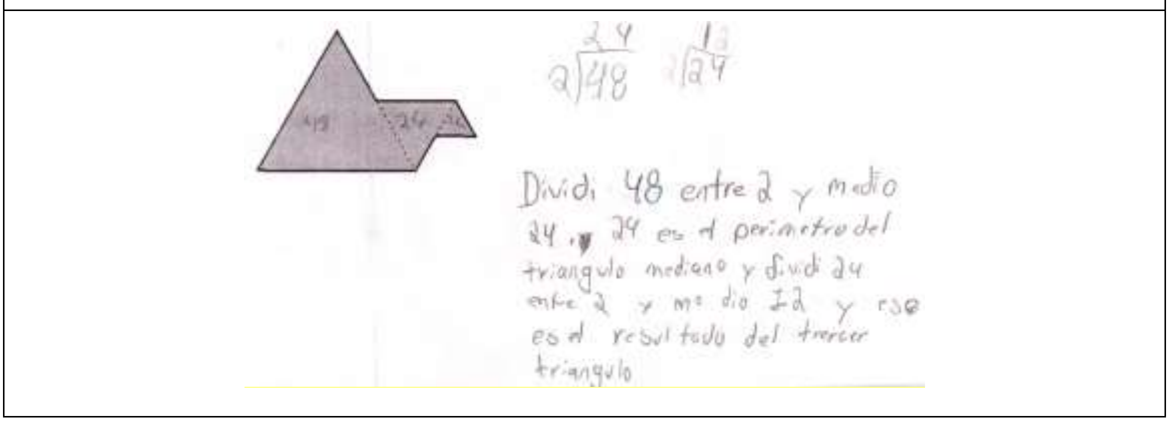
a) Respuestas de los alumnos que aplican las estrategias.





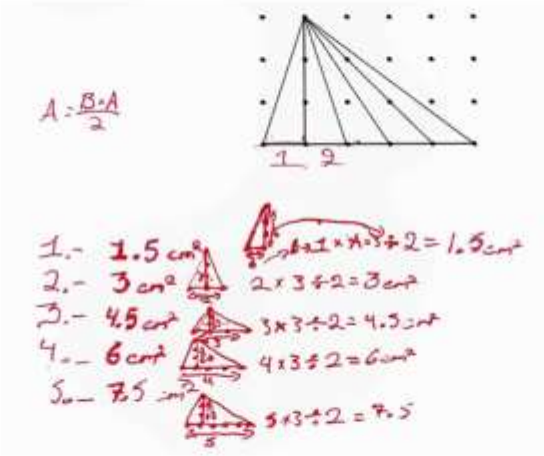
b) Respuestas de los alumnos que no aplican las estrategias.

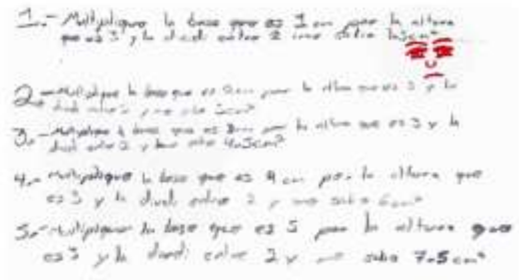




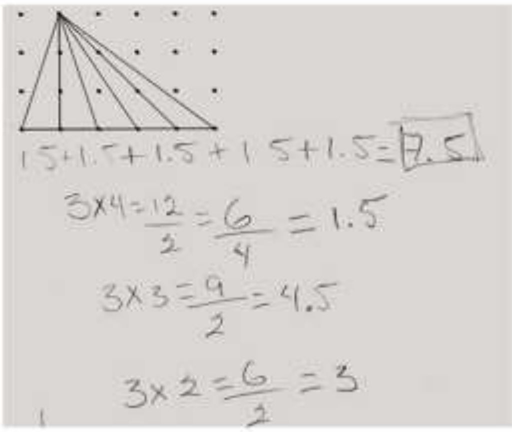
Anexo 2. Respuestas de los alumnos que no aplican las estrategias.

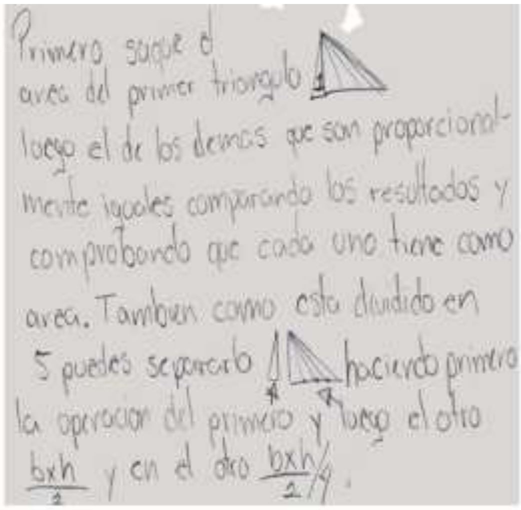
a)



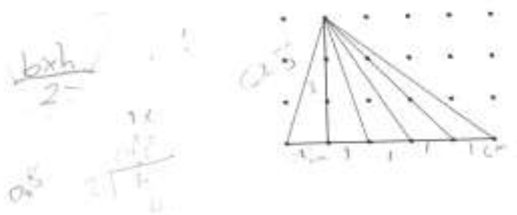


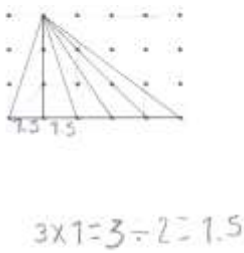
b)





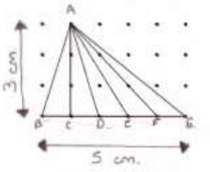
c)





Anexo 3. Respuestas de los alumnos que aplican las estrategias.

base 1 = 7.5 +
base 2 = 12.0
base 3 = 13.5
base 4 = 12.0
base 5 = 7.5 =
52.5



$R = 52.5\ cm^2$

Primero Se observa que la altura de todos los triángulos es igual a 3.

Primero saquemos los triángulos con base 1: $\underline{7.5 cm^2}$

ABC = 3x1 = 3 ÷ 2 = 1.5 pero como son 5 triángulos entonces 1.5 x 5 = 7.5 cm

Luego saquemos los triángulos con base 2 = $\underline{12\ cm^2}$

ABD = 3x2 = 6 ÷ 2 = 3 pero como se Formaron 4 triángulos = 3x4 = 12 cm

Despues con base 3 = $\underline{13.5\ cm^2}$

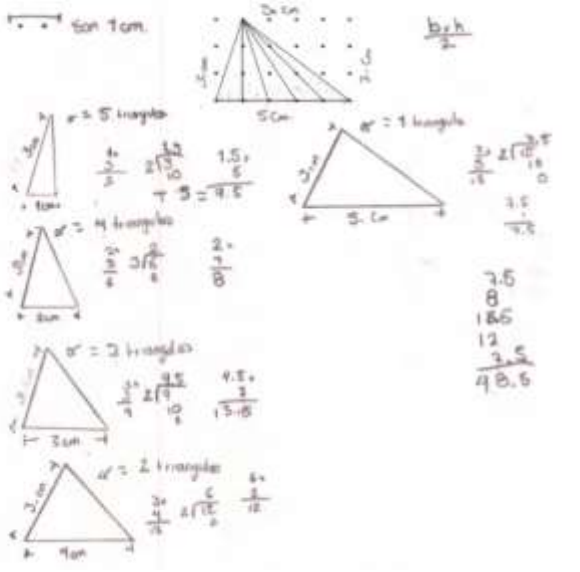
ABE = 3x3 = 9 ÷ 2 = 4.5 pero como son 3 triángulos = 4.5 x 3 = 13.5 cm

Luego con base 4 = $\underline{12\ cm^2}$

ABF = 3x4 = 12 ÷ 2 = 6 pero como son 2 triángulos = 6 x 2 = 12 cm

Despues con base 5 = $\underline{7.5\ cm^2}$

ABG = 3x5 = 15 ÷ 2 = 7.5



Justificacion

Busque en el triangulo mayor cuantos triangulos habia de h3 x b1 y asi, y me salieron 5 triangulos con una area de 1.5 . Busque los de h3x2b. y salieron 4 triangulos con un area de 2 tambien los de h 3x3 b salieron 3 triangulos con area de. 4.5
y los de h3 x 4 b fueron 2 triangulos con area de 6
y por ultimo los de h 3x5 b con area de 7.5 y solo 1 triangulo
despues multiplique el area de cada triangulo por la cantidad de triangulos.

los de 3x1 fueron 1.5 x 5 = 7.5
" " 3.2 " 2 x 4 = 8
" " 3x3 " 4.5 x 3 = 13.5
" " 3x4 " 6 x 2 = 12
" " 3x5 " 7.5 x 1 = 7.5

Sumando todo resulta = $\underline{48.5}$