ES POSIBLE QUE LOS ESTUDIANTES EN EDAD EXTRA ESCOLAR APRENDAN A DEMOSTRAR

Alejandro Robayo - Carolina Luque – Oscar Molina
luisalejandroleon@yahoo.com - Carolina.luque@live.com - oscarjmolina@gmail.com
Corporación Universitaria del Meta-Universidad Manuela Beltrán-Universidad Pedagógica Nacional, Colombia

Tema: Pensamiento Geométrico.
Modalidad: CB.
Nivel educativo: No específico.
Palabras clave: Estudiantes en edad extraescolar, geometría dinámica, actividad demostrativa, producción de teoremas.

Resumen

Este comunicado presenta los resultados de un estudio asociado al grupo de investigación Æ•G de la Universidad Pedagógica Nacional, en el que se busca identificar las acciones de los estudiantes que evidencien la posibilidad del aprendizaje de la demostración en la escuela. Para responder a esta cuestión, se trabajó con estudiantes en edad extraescolar quienes validaban su educación media. Se implementó una metodología de clase en la que a través de la participación, trabajo en grupo y uso de la geometría dinámica se inició el estudio de la geometría euclidiana. A partir de categorías de análisis se examinaron y clasificaron las acciones de un grupo de tres estudiantes al resolver dos situaciones problema. Se encontro que en el marco de su actividad los estudiantes dieron muestras de acciones como: visualizar, explorar, generalizar, verificar, que hacen parte de la conjeturación; y algunas de justificación: explicar y probar. Estos hallazgos sugieren la posibilidad de pensar que una continuidad mayor en el trabajo con los estudiantes, puede conducir a que ellos produzcan justificaciones próximas a una demostración formal.

Introducción

En la Educación Matemática hay un tema en constante debate, es pertinente la enseñanza y aprendizaje de la demostración en el ámbito escolar. Existen dos posiciones: los que piensan que llevar la demostración en la escuela es un rotundo fracaso y los que por el contrario, señalan que la demostración es fundamental para comprender las matemáticas (Perry, Camargo, Samper y Rojas, 2006). En Colombia, se creó el grupo Æ•G de la Universidad Pedagógica Nacional, quienes defienden la segunda posición, se han interesado en indagar sobre la importancia de la demostración en la clase de matemáticas, y sus investigaciones se han enfocado en las aproximaciones para su enseñanza y aprendizaje en diferentes niveles y bajo diversos contextos. Asociados a este grupo de investigación y compartiendo sus intereses, la investigación tiene como propósito identificar acciones de estudiantes en edad extraescolar que reflejan el surgimiento de un ambiente de actividad demostrativa en la clase de geometría. El objetivo del comunicado es mostrar a grosso modo el marco teórico del estudio, y describir cuatro aspectos de su metodología: la descripción de la población del estudio, la fase de implementación, el diseño de las categorías de análisis y el análisis de los datos. Finalmente, se esbozan algunas de las conclusiones del estudio.

Marco Teórico

El marco teórico del estudio se centró en tres aspectos: constructo de actividad demostrativa (demostración desde el enfoque de proceso), hechos geométricos y la aproximación metodológica de la actividad demostrativa.

Actividad Demostrativa

Es común que en el aula no se enseñe a demostrar sino que se muestran una serie de pasos realizados por otra persona para validar algo. Sin embargo, no se evidencia las acciones que se siguen para descubrir y conjeturar lo que ha de ser demostrado e incentivar la necesidad de hacerlo. En la enseñanza de la demostración, debe cobrar importancia el razonamiento inductivo y las acciones empíricas que preceden el descubrimiento de una regularidad y las justificaciones de la misma. De acuerdo a los aspectos anteriores, el grupo Æ•G ha desarrollado la Actividad Demostrativa como un constructo teórico que describe la demostración como la conformación de una serie de acciones específicas (visualización, exploración, generalización, validación) que permiten el descubrimiento de una regularidad y desencadenan en una conjetura, y posteriormente, su justificación (explicación, prueba o demostración formal). En la figura que aparece a continuación se define cada una de estas acciones.

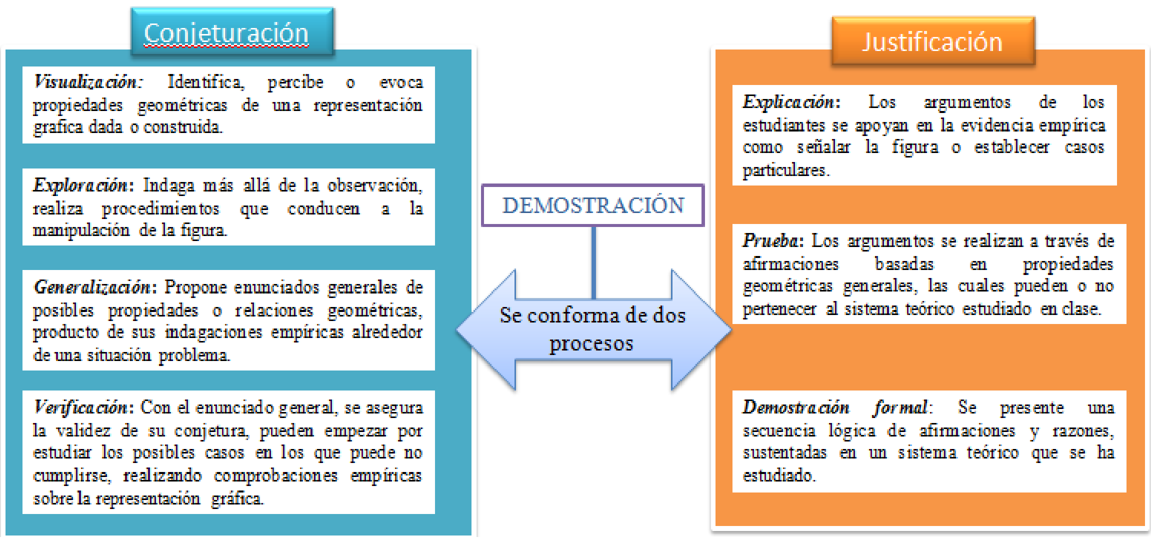


Figura 1. La demostración desde el constructo Actividad Demostrativa

Teoremas en la escuela = Hechos geométricos

Los teoremas no sólo se refiere a enunciados que tienen el estatus de verdad matemática, según Mariotti (1997) un teorema se constituye en la articulación de tres elementos en el campo teórico de las matemáticas: *afirmaciones o enunciados, demostración y teoría*. En este sentido, la definición propuesta por Mariotti, es inherente a una construcción axiomática, rigurosa y formal, la cual es afortunada en una comunidad de matemáticos pero no en una comunidad de principiantes (personas que están iniciando el estudio de las matemáticas a nivel no profesional). Es importante reconocer esta complejidad y a repensar la idea de teorema para aterrizarla al contexto escolar. Por ello, se realiza una analogía entre los elementos que componen la definición de teorema por Mariotti (1997) y que consideramos están inmersos en la actividad demostrativa y en la comprensión del teorema en el contexto escolar.

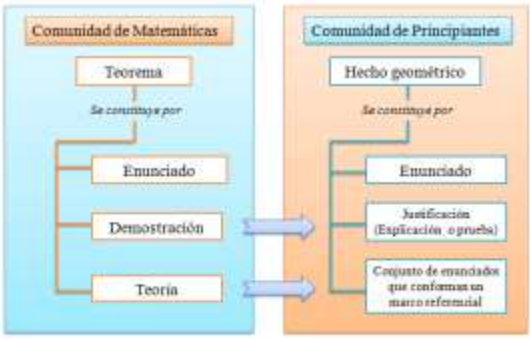


Figura 2. Caracterización de teorema en la escuela

En la escuela no se construye teorías matemáticas ni demostraciones formales y rigurosas como las que elaboran los expertos de esta ciencia, pero si se formulan conjeturas que se pueden justificar con base en un sistema teórico local o en reglas sociomatemáticas que determinan los modos de validación en la clase. El reconocer que en la escuela no se producen teorías y demostraciones a un nivel formal supone el reconocimiento de la aproximación teórica de la matemática que pueden hacer los estudiantes en la escuela: *enunciado o conjetura*, *justificación* y *conjunto de enunciados que conforman un marco referencial.*

El reconocimiento de dicha aproximación teórica a las matemáticas en el contexto escolar conduce a adoptar el término teorema para hacer referencia a aquellos enunciados que adquieren el estatus de verdad matemática dentro del aula sino más bien a utilizar el de "*hecho geométrico*". En vista de que a nivel escolar se hace una aproximación teórica a las matemáticas a partir de un conjunto de enunciados que no necesariamente pertenecen a un sistema teórico explicito para los estudiantes, se considera conveniente no precisar un estatus teórico para las proposiciones matemáticas estudiadas en el aula; es decir, no discriminar entre aquellas proposiciones que serían teoremas y aquellas que serían postulados sino optar por denominarlas como *hechos geométricos*. Así, existen sólo dos tipos de enunciados en dicho marco: hechos geométricos y definiciones.

Las categorías de análisis se basaron en las fases de la producción de conjeturas y construcción de pruebas matemáticas propuesta por Boero (1999) el cual se describe en los anexos del documento.

Aproximación metodológica de la Actividad Demostrativa

El grupo Æ•G además de desarrollar el constructo de Actividad Demostrativa ha propuesto un enfoque metodológico para la enseñanza de la demostración en la geometría. Este enfoque se enmarca en una perspectiva sociocultural en la que profesor y estudiantes conforman una comunidad de clase con un objetivo común, construir colectivamente un sistema teórico local. Para su desarrollo se destaca tres elementos: *las situaciones problema propuestas*, *la interacción social de la clase* y *el uso de la geometría dinámica*. Las *situaciones problema* deben propiciar a los estudiantes de experiencias de carácter empírico que conduzcan a la comprensión de la situación, a conjeturar y a buscar una justificación. La *interacción social* entre los miembros del grupo (estudiantes-profesores y estudiante-estudiante) generan discusiones en el que se manifiestan puntos de vista, los cuales son escuchados, interpretados, modificados y aceptados (o rechazados) por los demás miembros del grupo. El *software de geometría dinámica* provee a los estudiantes de un recurso que permite explorar las figuras geométricas ya sea en la identificación o en la validación de regularidades, dado que: (*i*) cuenta con herramientas que permiten tomar medidas exactas y obtener representaciones precisas de los objetos geométricos, (*ii*) permite la manipulación de estos a través de la acción de arrastre.

Metodología de la Investigación: Implementación, categorías de análisis y análisis de los datos.

Descripción de la población

El estudio se llevó a cabo en el Colegio Gabriel Echavarria de Madrid (Cundinamarca) con un grupo de 35 estudiantes, quienes se encontraban nivelando los grados octavo y noveno de educación básica secundaria en jornada nocturna, el trabajo de campo se realizó en el segundo semestre de 2010. Los estudiantes se encontraban en edades que oscilaban entre los 24 y 57 años de edad. Su ocupación, en la mayoría de los casos, estaba relacionada con oficios operarios en empresas de flores, vidrios y panadería.

Uno de los aspectos característicos de este grupo de estudiantes fue la discontinuidad que presentaban en toda su experiencia escolar previa. Es decir, en la mayoría de los casos eran personas que habían dejado de estudiar formalmente por un largo periodo de tiempo y que habían ingresado a la institución a lo más, desde hacía año y medio. Sus conocimientos en geometría estaban ligados al reconocimiento de representaciones gráficas de algunas figuras que asociaban con sus respectivos nombres, con el uso de fórmulas para hallar áreas y perímetros, y la identificación de algunos instrumentos de medida (regla y transportador). También eran estudiantes que no tenían un alto dominio del computador.

Implementación del estudio

Con base en el marco de referencia y el propósito del estudio, se construyó un espacio en la clase de geometría que respondía a la aproximación metodológica propuesta por el grupo Æ•G para lograr construir algunos hechos geométricos que culminarán en un sistema teórico local. En la construcción de este sistema local debían surgir acciones propias del constructo de la Actividad Demostrativa. Para ello, la implementación del estudio se dividió en dos fases denominadas: *fase de inducción* y *fase de obtención de datos*. La primera fase tenía dos propósitos: que los estudiantes conocieran la metodología de clase, es decir, reconocieran los tipos de situaciones problema que se plantearían, la importancia de la participación e interacción entre los miembros de la clase para el desarrollo de estas situaciones y aprendieran a manipular el software de geometría Cabri. Por otro lado, dado que la inducción se aplicaría a todo el grupo (35 estudiantes) se seleccionarían tres personas que incorporaran el grupo de estudio. Es importante señalar que la selección de éste grupo conto con algunos criterios, por ejemplo, exhibir dominio y apropiación de las herramientas de Cabri, participar activamente en la clase, mostrar disposición e interés frente a la misma, asistir regularmente a las clases, entre otras. En la *fase de obtención de datos*, se propuso dos situaciones problema:

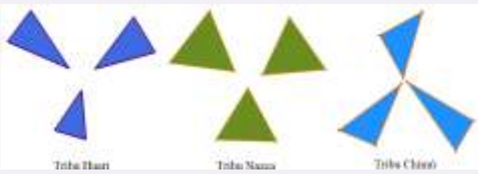
Enunciado de la situación	Enunciados posteriores	Hechos geométricos y definiciones que surgían de la solución de cada situación.
Situación 1: **¿Para qué tipo de triángulo la suma interna de sus ángulos es 120? Formule una conjetura**	Ninguno	**Hecho geométrico**: Si se suman las medidas de los ángulos de un triángulo entonces su suma siempre es 180.
Situación 2 **Algunas tribus indígenas para mantener la armonía de su pueblo distribuyen su territorio de tal manera que todos los clanes de la tribu se organicen de la misma forma. Tribus indígenas como los Huari, Nazca y Chimú han construido las viviendas en su territorio de tal manera que cada clan (conformado por tres familias) debe edificar sus casas logrando que estas queden ubicadas en forma triangular.** **La ubicación de las viviendas en estas tres tribus coincide en su forma triangular, pero la disposición de cada clan en cada uno de estas tribus es diferente.** 	a) Encuentre las propiedades invariantes que tienen en común los clanes de la tribu Chimú.	**Definición de triángulo rectángulo**: Es un triángulo que tiene uno de sus ángulos de 90 grados.
	b) Además de tener un ángulo de 90 grados, ¿qué otra característica tienen los ángulos de un triángulo rectángulo?	**Definición ángulo recto**: Es un ángulo cuya medida es de 90 grados. **Definición ángulo agudo**: Es un ángulo cuya medida es menor de 90 grados. **Definición de ángulo obtuso**: En un ángulo cuya medida es mayor de 90 grados. **Hecho geométrico**: Si un triángulo tiene un ángulo recto entonces los otros dos son agudos.

Figura 3. Situaciones problema planteados en la fase de obtención de datos.

Estas situaciones se diseñaron y plantearon con miras a lograr que los estudiantes formularán y justificarán el hecho geométrico del triángulo rectángulo. *Si un triángulo tiene un ángulo recto entonces los otros dos son agudos.* Se esperaba que tal hecho surgiera con la solución de la Situación 2 y que se justifique con base en la conjetura que emergía al solucionar la Situación 1.

¿Cómo se analizaron los datos?

En la implementación del estudio se registraron, en audio y video, las acciones del grupo de estudio al resolver las dos situaciones problema y dos entrevistas posteriores.

Estas se trascribieron y se revisaron junto a los registros para someterlos a un primer filtro y seleccionar episodios que evidenciaran posibles acciones de la Actividad Demostrativa. Finalmente, estos episodios serían analizados con unas categorías de análisis diseñadas previamente. Estas categorías se construyeron paralelo a la implementación del estudio con base en el marco de referencia descrito previamente.

Dado que tanto las categorías de análisis y la revisión de los episodios son extensos ara describirlos en el presente escrito, en **ANEXOS** ***Descripción de las categorías de***

análisis y* ANEXOS *Ejemplo de Análisis se explica cómo fueron diseñadas las categorías de análisis y a través de un ejemplo se expone el análisis de un episodio.

Resultados del análisis y conclusiones

En las dos situaciones problemas implementados se revisaron las acciones de los estudiantes con las categorías de análisis. El surgimiento de estas acciones fue tabulado en una tabla de frecuencias como se muestra en la **Figura 4.**

Proceso de Conjeturación

Categoría	CI: Reconocimiento de la propiedad invariante.												CII: Formulación del enunciado de la conjetura.									
Indicador	1				2	3	4						1	2		3				4	5	
Acción	1	2	3	4	3	1	2	3	4	5	6	8	1	1	2	1	2	4	5	2	2	3
Frec.	3	5	3	1	1	1	1	4	2	1	2	3	4	2	4	1	2	1	1	1	1	1
Actividad Demostrativa	Visualizar						Visualizar, explorar y generalizar						Verificar	Generalizar							Visualizar, verificar y generalizar	
	Cantidad de acciones que reflejan el proceso de conjeturación						46															

Proceso de justificación

Categoría	CIII: Exploración del contenido de la conjetura y los límites de la validez de la misma.			CIV: Selección y encadenamiento de argumentos teóricos coherentes con la cadena deductiva.	
Indicador	2	3		2	
Acción	1	1	4	1	3
Frec.	1	3	1	1	1
Actividad Demostrativa	Explicar			Probar	
	Cantidad de acciones que reflejan el proceso de justificación	7			

Figura 4. Frecuencias de acciones del proceso de conjuración y justificación de la Actividad Demostrativa en las dos situaciones problema.

Respecto a la actividad del grupo de estudio al resolver las dos situaciones problema, se consideró que sus acciones son reflejo de la posibilidad de aprender a demostrar (en el sentido de la actividad demostrativa) en la escuela. En el marco de su actividad ellos dieron muestra del surgimiento de acciones de la actividad demostrativa: *visualizar*, *explorar*, *generalizar*, *verificar*, *explicar* y *probar*, lo cual es indicio de la posibilidad de generar procesos de conjeturación y justificación en un contexto escolar particular. De estas acciones las que se presentaron con mayor frecuencia en la actividad de los estudiantes fueron las asociadas al proceso de conjeturación. En el marco de las dos situaciones propuestas, los estudiantes partieron de la visualización y exploración de representaciones gráficas para encontrar invariantes de las mismas y establecer conjeturas al respecto, las cuales verificaban con ayuda de Cabri. Las acciones de explicar y probar del proceso de justificación fueron menos frecuentes en la actividad de los estudiantes tal vez porque apenas se estaban iniciando en dicho proceso. A pesar de ser la primera vez que proponía a loes estudiantes elaborar una justificación de un hecho geométrico, ellos mostraron apropiación de los conocimientos abordados.

En relación con los resultados obtenidos mediante el análisis de la actividad de los estudiantes, nos ha llevado a considerar este tipo de estudios aún hay cuestiones por solucionar, que podrían convertirse en el foco de indagación de futuros estudios. En particular ha surgido el interrogante: *¿Es posible pensar que una continuidad en el trabajo con los estudiantes, puede conducir a que ellos produzca justificaciones próximas a una demostración formal?*

Referencias Bibliográficas

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. International Newsletter on the teaching and learning of mathematical proof. Traducción realizada por Patricio Herbst.

Mariotti, A. (1997). Justifying and proving in geometry: the mediation of a microworld. En Hejny. M, Novotna. J. (eds.). Proceedings of the European Conference on Mathematical Education, 21-26. Prague: Prometheus Publishing House.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., Echeverry, A., & Molina, O. (2008). *Innovación en la enseñanza de la demostración en un curso de geometría para formación inicial de profesores.* En A. Cano; F. Contreras; E. Olvera (*eds*.). Libro electrónico del XVII Simposio Iberoamericano de Enseñanza de las Matemáticas: “Innovando la enseñanza de las matemáticas”, 1-18. Toluca, México: Universidad Autónoma del Estado de México.

ANEXOS

Dado que los procesos de descripción de las categorías de análisis y el análisis de los datos son extensos para exponer en el comunicado, en esta sesión se ejemplifican cada uno de estos, con el objetivo de dar a conocer cómo se llevaron a cabo. Inicialmente, se describe a grosso modo una de las categorías de análisis, y posteriormente, cómo se usó en el análisis de un episodios.

Descripción de las categorías de análisis

Las categorías de análisis se basaron en las fases de la producción de conjeturas y construcción de pruebas matemáticas propuesta por Boero (1999). Estas son:

I. *Producción de conjeturas (En el estudio se denominó "Reconocimiento de la propiedad invariante)*
II. *Formulación del enunciado de acuerdo con convenciones culturales compartidas.*
III. *Exploración del contenido (y límites de la validez) de la conjetura.*
IV. *Selección y encadenamiento de argumentos teóricos coherentes en una cadena deductiva.*
V. *Organización de la cadena de argumentos en la forma de una prueba que es aceptable desde el punto de vista de los estándares matemáticos vigentes.*
VI. *Aproximación a la prueba formal.*

Cada una de estas fases conforma una categoría a la cual se asignó indicadores y acciones codificadas. Tal codificación se realizó de la siguiente manera: Las categorías se denotan por una "C" seguidas por un número romano que indica a cuál de las seis categorías se hace alusión. Posteriormente, el indicador se codificaba con la letra "i" seguida de un número en su escritura inudarábiga. Por último, se indica la acción la cual se denota añadiendo la letra "a" seguida de un número en su escritura inudarábiga. Se diseñó un total de 6 categorías, 19 indicadores y 53 acciones para el análisis de las actividades del grupo de estudio al resolver las dos situaciones problema, dada la extensión de estos solo se presente la Categoría I: Reconocimiento de la propiedad invariante para ejemplificar su distribución y organización.

CATEGORÍA I: RECONOCIMINETO DE LA PROPIEDAD INVARIANTE (CI).		
Indicadores	**Posibles acciones de los estudiantes.**	**Acciones de AD**

Interpretación de la situación **(CI, i1)**	Identifica objetos geométricos involucrados en la situación propuesta **(CI, i1, a1)**.	Visualizar
	Reconoce y señala qué es dado y/o qué se pide resolver **(CI, i1, a2)**.	
	Manifiesta implícita o explícitamente posibles estrategias o hipótesis de solución **(CI, i1, a3)**.	
	Realiza conceptualizaciones (implícitas o explicitas) de objetos involucrados en la situación **(CI, i1, a4).**	
Exploración de la construcción **(CI, i4)**	Utiliza herramientas de Cabri para determinar propiedades específicas (paralelismo, perpendicularidad, etc.) de la representación gráfica **(CI, i4, a1)**.	Visualizar Explorar Generalizar
	Toma medidas para inferir propiedades (congruencia, semejanza, perpendicularidad, etc.) de la representación gráfica construida **(CI, i4, a2).**	
	Usa el arrastre para identificar propiedades invariantes **(CI, i4, a3).**	
	Estudia hipótesis de solución mediante la acción de arrastre, herramientas de medición y construcción de Cabri, para aceptarlas o rechazarlas **(CI, i4, a4)**.	
	Relee la situación para orientar la exploración de la construcción. **(CI, i4, a5)**.	
	Comprueba objetos construidos para visualizar relaciones entre ellos o propiedades comunes **(CI, i4, a6).**	
	Comprueba resultados obtenidos al operar o manipular datos provenientes de la construcción con miras a reconocer un patrón invariante **(CI, i4, a7)**.	
	Reconoce elementos constitutivos de una figura construida o dada en Cabri **(CI, i4, a8)**.	

Ejemplo de Análisis

Para las dos situaciones problema planteado a los estudiantes se organizó el análisis de la siguiente manera: en primer lugar, se describe de manera general la actividad de los estudiantes aludiendo a los momentos en los que esta fue dividida para su análisis. En segundo lugar, se presenta para cada uno de los momentos en los que se subdividió a actividad de los estudiantes una descripción de la misma y el análisis respectivo con base en las categorías de análisis. Finalmente, se sintetiza la información mostrando resultados generales de la actividad de los estudiantes.

Por ejemplo, después de hacer una descripción de la Situación 1: *¿Para qué tipo de triángulos la suma de sus ángulos interiores es 120?* La sesión de trabajo se dividió en siete momentos:

- ***Momento 1****. En la búsqueda de un triángulo particular: Interpretan la situación como la búsqueda de un triángulo específico que cumpla con la condición propuesta.*
- ***Momento 2.*** *Suman la medida de los ángulos: Utilizan una estrategia de solución sugerida por la profesora sin apropiarse de ella.*
- ***Momento 3.*** *¿Cómo disminuir la medida de los ángulos?: Plantean y verifican hipótesis buscando disminuir la medida de los ángulos del triángulo.*
- ***Momento 4.*** *El triángulo rectángulo y equilátero: Exploran e identifican la regularidad luego de generar y descartar varias estrategias de solución de la tarea.*
- ***Momento 5.*** *Nuevamente suman la medida de los ángulos: Identifican la regularidad luego de haber generado y descartado varias estrategias de solución de la tarea.*
- ***Momento 6.*** *¿Pero por qué siempre da 180?: Justifican por qué es válido el invariante encontrado.*
- ***Momento 7.*** *¿Cómo escribimos el hecho geométrico?: Formulan el hecho geométrico correspondiente a la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo.*

A estos siete momentos se le realizo una revisión exhaustiva para identificar los posibles indicadores que evidenciarán acciones de la Actividad Demostrativa. En el momento 1 se describió de esta manera.

Luego de proponer la tarea a los estudiantes, ellos inician el desarrollo de la misma construyendo un triángulo con la herramienta correspondiente del programa. Posteriormente toman las medidas de los ángulos y lados del triángulo construido.

1.	Sandra	[Construye un triángulo, nombra sus vértices, mide sus tres lados y dos de sus ángulos,] Estamos hablando de ángulos, solo hay necesidad de medir los ángulos. ¿Ahí falta un ángulo, cierto? [Se refiere a que falta medir el ángulo BAC] El ABC, el ACB ¿Cuál falta?

2.	Diego	Es el de acá [Señala el $\angle CAB$].
3.	Sandra	ACB, ABC, falta uno. [señalan los ángulos del ΔABC] ¿CAB? Sumándolos.

En esta primera intervención, Sandra utiliza herramientas de Cabri para construir una representación de la situación planteada. Específicamente, utiliza las herramientas: triángulo, medida de lados, medida de ángulos y nombrar. La toma de medidas (**CI, i4, a2**) se constituye en una acción de exploración, que le permite a la estudiante buscar características particulares de la figura construida, concernientes a las medidas de los elementos que la componen. Medir los lados y ángulos del triángulo implica visualizar los segmentos y ángulos como elementos constitutivos del mismo (**CI, i4, a8**), dado que para tomar dichas medidas debe identificar los vértices del triángulo que los definen. Consideramos que la visualización de sus partes es la que permite a Sandra identificar que aún falta la medida de uno de los ángulos del triángulo y nombrar ($\angle ABC$ y $\angle ACB$) los que ya ha medido [1,3]. Tal visualización también pudo estar influenciada por la definición de triangulo, dado que pudo haber considerado que un triángulo determina tres ángulos y aún falta uno de ellos por medir.

Al finalizar se realiza una descripción de las categorías que se evidenciaron en el trabajo de los estudiantes.