

## O ENSINO DE PROBABILIDADE A PARTIR DA GEOMETRIA PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO: O JOGO DA ROLETA

Ailton Paulo de Oliveira Júnior – José António Fernandes – Gustavo Alves Caetano Neto – Alessandra Nepomuceno Prata  
ailtonpaulo@matematica.uftm.edu.br – jfernandes@ie.uminho.pt –  
gustavo20mg@netsite.com.br – alessandra\_nepomuceno@hotmail.com  
Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Brasil – Universidade do Minho, Portugal  
– Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Brasil – Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Brasil

Tema: I.5 – Pensamento relacionado com Probabilidades e Estatística

Modalidade: Comunicação Breve (CB)

Nível educativo: Médio

Palavras-chave: Probabilidade. Geometria. Jogo. Ensino Médio.

### Resumo

*A partir da utilização de conceitos da geometria e da ludicidade do jogo da roleta, foi desenvolvida uma sequência didática pensando em possibilitar aos alunos do Ensino Médio uma melhor apreensão dos conceitos básicos da probabilidade. A opção pelo uso da geometria no ensino de probabilidade oferece ao estudante a oportunidade de rever alguns conceitos geométricos, que resgatem a construção do conhecimento matemático. A sequência foi aplicada a turmas do 3º ano do Ensino Médio de duas escolas estaduais em Minas Gerais, Brasil. Antes da aplicação da sequência didática, aplicamos um teste diagnóstico visando aferir o nível de conhecimento dos alunos acerca dos conceitos básicos de probabilidade. Posteriormente a aplicação da mesma sequência didática, aplicamos um teste final para comparar os resultados deste teste com o resultado do teste diagnóstico inicial. Por fim, aplicamos um questionário para saber o nível de aceitação dos alunos das atividades propostas. A realização de experimentos de probabilidade utilizando estratégias lúdicas, como o jogo da roleta, foi apreciada pelos alunos, identificado pelas declarações de aceitação das atividades, e contribuiu para uma aprendizagem significativa dos conceitos básicos da probabilidade indicados por um melhor resultado no teste final de conhecimento quando comparado aos conhecimentos iniciais.*

### Introdução

A Probabilidade é uma área da Matemática que trata do estudo e da modelagem de fenômenos aleatórios ou não determinísticos. Todos os resultados dessa teoria estão alicerçados em conceitos matemáticos. Segundo os *Parâmetros curriculares nacionais do Ensino Médio* (PCN+), o aluno deve ser capaz de compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculo de probabilidades.

Dentro do contexto escolar, a Probabilidade é ensinada de maneira quase sempre parecida, mas é preciso que o seu ensino seja feito de modo a fugir do tradicional,

aumentando o interesse dos alunos pelo conteúdo. Os conceitos podem ser construídos de modo experimental, observando padrões e estabelecendo as fórmulas a partir disso.

Coutinho (2002) discutiu uma atividade para a introdução ao conceito de probabilidades através de um enfoque experimental, permitindo um processo de modelização. Esse enfoque permite a confrontação de dois pontos de vista, quais sejam, o clássico ou laplaciano e o frequentista. Sob este enfoque, a construção do conceito pelo aluno seria feita de forma a que ele tenha menos possibilidades de mobilizá-lo fora do seu domínio de validade, ou seja, com menos possibilidades de que esse conceito se torne um obstáculo para aprendizados futuros no domínio do cálculo de probabilidades. Tais atividades favorecem para os alunos a construção da relação entre uma ideia intuitiva de probabilidade e a frequência estabilizada como medida aproximativa dessa probabilidade.

O trabalho de Oliveira (2010) teve como objetivo diagnosticar quais concepções probabilísticas são construídas e mobilizadas pelos alunos do Ensino Médio em situação de resolução de problemas, quando a aprendizagem é feita, tendo como material didático o *Caderno do professor* e o *Caderno do aluno*, elaborados segundo a nova proposta curricular implementada no estado de São Paulo em 2008. A partir da aplicação de um questionário a três grupos de alunos voluntários, cursando o segundo e o terceiro ano do Ensino Médio, foram identificadas concepções do enfoque clássico de probabilidade, porém a partir de uma visão puramente determinista.

Abe e Bittar (2010) apresentam em seu trabalho a aprendizagem de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental confrontados com situações envolvendo diferentes visões de Probabilidade (frequentista, laplaciana e geométrica). Para tanto, foi utilizada, como referencial teórico, a Teoria das situações didáticas; e, como metodologia de pesquisa, a Engenharia didática. Partiu-se do pressuposto de que situações envolvendo essas diferentes visões podem ser propostas aos alunos, pois contribuem para uma aprendizagem que desenvolva suas potencialidades probabilísticas, ampliando sua capacidade de tomar decisões, de forma que também faça sentido fora do contexto escolar.

Assim, a Probabilidade deve ser vista como um conjunto de ideias e procedimentos que permitem aplicar a Matemática em questões do mundo real, quantificar e interpretar conjuntos de dados ou informações que não podem ser quantificados direta ou exatamente (Brasil 2002, p. 126).

Os *Parâmetros curriculares nacionais* – PCN – (Brasil 2000) estabelecem como principal finalidade para o estudo de Probabilidade que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano é de natureza aleatória e que é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos.

### **Metodologia**

Elaboramos uma sequência de ensino que visou contribuir para o processo de ensino e aprendizagem sobre conceitos de probabilidade de forma a favorecer a apropriação significativa destes conceitos. A ênfase conceitual foi em probabilidade geométrica e, para tal, trabalhamos o conceito de probabilidade frequentista articulada a conceitos geométricos elementares, como comprimento da circunferência, normalmente já abordadas desde as séries finais do Ensino Fundamental. A partir desse nível de escolaridade, entendemos que, a critério do professor, esta sequência é apropriada para ser aplicada.

A Geometria pode ser utilizada na compreensão de vários conceitos de Probabilidade e vice-versa, numa mistura denominada Probabilidade Geométrica, pois os alunos deverão utilizar os conhecimentos geométricos já aprendidos em séries anteriores, e terão mais uma oportunidade de rever e utilizar o que já aprenderam.

As atividades da sequência de ensino explicitada visa desenvolver os conceitos iniciais de probabilidade e utilizam a ludicidade do jogo da roleta para facilitar o entendimento dos alunos.

A utilização de jogos em sala de aula pode se tornar uma maneira eficaz de familiarizar o aluno com o mundo probabilístico. Experiências desse tipo traduzem modelos espontâneos dos alunos, e as dificuldades neles encontradas podem ajudar a transpor obstáculos que residem nos aspectos básicos e de valores constitutivos do conhecimento.

A sequência didática foi aplicada a uma turma do terceiro ano do Ensino Médio das escolas: Escola Estadual Professora Corina de Oliveira e Escola Estadual Santa Terezinha na cidade de Uberaba, região do Triângulo Mineiro, Minas Gerais, Brasil.

### **Resultados da pesquisa**

Vamos analisar primeiramente os resultados do teste diagnóstico, conforme o Quadro 1.

Quadro 1 - Resultados e análises das questões iniciais do teste diagnóstico.

Questão	Descrição Questão	Resultados e Análises
1	Sair sete no lançamento de um dado.	A maioria dos alunos das duas escolas, 71,4% no ST e 92,9% no CORINA acredita que é impossível sair o número sete no lançamento de um dado. Porém, alguns alunos responderam erradamente à questão, seja por não prestar atenção à pergunta ou desconhecimento de que um dado padrão apresenta os seguintes valores: 1, 2, 3, 4, 5 e 6.
2	O Brasil ganhar a próxima Copa do Mundo de Futebol.	A maioria dos alunos, 71,4% no ST e 53,6% no CORINA considera pouco provável que o Brasil ganhe a próxima Copa do Mundo de Futebol. No CORINA 35,7% dos alunos acha muito provável que isto aconteça. Visto que a pergunta é subjetiva, não podemos apontar uma resposta correta para a questão.
3	Chover em Uberaba durante o mês de dezembro.	No ST a maioria dos alunos, 57,1%, considerou pouco provável que chova no mês de dezembro em Uberaba. Já no CORINA, 60,7% dos alunos consideram que isto seja muito provável. Outra questão subjetiva e que admite opiniões divergentes. Normalmente o mês de dezembro é um mês chuvoso na cidade e em 31 dias pode-se esperar que chovesse ao menos em um dia do mês. Porém, a escassez de chuva nos últimos tempos pode ter induzido os alunos a crer que não irá chover.
4	Alguém ganhar na Megasena.	A questão foi formulada de maneira que poderia gerar confusão entre “alguém” ou a “própria pessoa” ganhar na Megasena. Os alunos das duas escolas, em sua maioria, 100% no ST, e 67,9% no CORINA, acreditam ser pouco provável que alguém ganhe na Megasena. Estes alunos devem ter entendido a questão como eles próprios ganharem.
5	Rubens Barrichello ser campeão da Fórmula 1.	No ST, mais de 70% dos alunos e no CORINA, 92,8% dos alunos, acredita ser impossível ou pouco provável que Rubens Barrichello seja campeão da Fórmula 1. Levando em consideração que o piloto em questão já está no fim da sua carreira, os alunos parecem ter razão em sua resposta. Seis alunos das duas escolas pensam ser muito provável que o fato ocorra. Estes alunos podem não acompanhar Fórmula 1 ou talvez acreditarem que isto seja possível.
6	Sair um número entre 1 e 6 no lançamento de um dado.	A maioria dos alunos das duas escolas, 85,7 % no ST e 75% no CORINA acredita ser um evento certo. Porém, é preocupante que alguns alunos considerem o evento somente muito provável ou pior ainda, pouco provável. Pode demonstrar, ou falta de conhecimento sobre os conceitos de probabilidade ou desconhecimento dos valores possíveis no lançamento de um dado de seis faces.

Fonte: Análise própria.

Na questão “Num café estão 20 pessoas. Sabendo que 8 são mulheres, investigue a probabilidade de que, ao escolher uma das pessoas ao acaso, escolhemos um homem”, muitos alunos até calcularam a probabilidade para o caso de ser uma mulher a escolhida, mas pararam por aí, embora a probabilidade pedida fosse para a escolha de um homem. O método mais utilizado foi a regra de três. Alguns alunos fizeram corretamente as contas e acertaram a resposta. Outros acertaram a resposta, mas, por não terem registrado as contas, não foi possível saber se eles apenas haviam copiado de outro colega ou se haviam acertado, mesmo. Outro grupo de alunos apenas disse que a probabilidade de escolher um homem era maior, pois havia mais homens, o que não está errado.

Para a questão “Um doente que está prestes a ser operado sabe que a probabilidade de sucesso da operação é 99 %. Antes de ser operado, perguntou ao médico quantas operações já tinha efetuado antes. Noventa e nove - respondeu o médico - e foram todas bem sucedidas. O doente, muito abalado, decidiu que não queria ser operado, pois, segundo os seus cálculos, a sua operação não teria sucesso. Concorda com o doente? Justifique.”, tivemos respostas bastante interessantes. Alguns alunos justificaram muito bem sua resposta, como a seguir:

Aluno 1: “O doente achou que seria o 1% faltando dos 99% do sucesso da operação, mas 99% de dar sucesso a operação é individual. Cada caso é um caso!”

Aluno 4: Não, porque a chance da operação sair bem sucedida é 99%.

Outros preferiram pensar que, como as operações anteriores vinham tendo sempre sucesso, esta provavelmente teria, mas não tiveram uma boa argumentação:

Aluno 5: “Eu discordo do doente, pois se o médico já havia feito 99 operações com sucesso e as chances de correr tudo bem com o doente também é 99%, certamente o 100º paciente também seria bem sucedido.”

Aluno 11: “Não, pois se a probabilidade de ser um sucesso a operação é de 99% e o médico já fez noventa e nove operações bem sucedidas, a dele provavelmente também será bem sucedida.”

Aluno 14: “Não, porque se a probabilidade de sucesso da cirurgia é 99% e o médico já fez 99 cirurgias ele não correria risco.”

Outros, ainda, pensaram que o doente tivesse achado arriscado tentar com 1% de chance de erro, tal como:

Aluno 9: “Sim. Porque de 100% de operações pelo menos uma terá a probabilidade de não ser bem sucedida. E a probabilidade de sucesso da operação é de 99% é este 1% que fez o doente desistir.”

Houve alguns bastante confusos em sua resposta:

Aluno 6: “Não, porque o cálculo do doente é diferente dos dados do doente. 99 seria 100% no caso do médico.”

Aluno 8: “Ele não concordou porque o médico deveria ser 100% e ele é 99% e o 1% morreu ou deu errado.”

Na questão “Uma equipe de futebol é composta por: 5 jogadores portugueses, 3 brasileiros, 2 angolanos e 1 espanhol. Escolhido um jogador ao acaso, qual a probabilidade desse jogador ser angolano?”, a maioria dos alunos organizou bem os dados e tentou resolver por regra de três. Porém, a organização da regra de três foi falha em um caso, gerando resposta errada de dois alunos, pois provavelmente eles fizeram juntamente esta questão.

Para responder a questão “Numa turma de 28 alunos: 9 só praticam natação, 12 praticam apenas futebol e o restante pratica as duas modalidades. Escolhido um aluno ao acaso, investigue a probabilidade de que este aluno pratique as duas modalidades? Escreva todo o seu raciocínio.”, a maioria dos alunos organizou bem os dados que oferecidos e chegou à conclusão de que 7 alunos praticam as duas modalidades. Alguns deles fizeram uma regra de três para chegar à probabilidade pedida.

### Teste de avaliação final

No Quadro 2 mostraremos os resultados e algumas análises do teste final de avaliação.

Quadro 2 - Resultados e análises das questões iniciais do teste final de avaliação.

Questão	Descrição Questão	Resultados e Análises
1	Uma pessoa viver menos de 30 anos.	A questão é de análise subjetiva. Porém, como a expectativa de vida da população é maior do que 30 anos, a maioria dos alunos, 61,5% no ST e 75% no CORINA, consideram pouco provável que uma pessoa viva menos de 30 anos. Porém, 38,5% dos alunos do ST consideraram muito provável a sua ocorrência. Estes alunos podem ter levado em consideração que ocorra uma fatalidade com esta pessoa ou que esta pessoa não se cuide o bastante para morrer antes dos 30 anos.
2	Uma pessoa viver mais de 100 anos.	Apesar de a questão ser subjetiva, como a expectativa de vida das pessoas não chega aos 100 anos, todos os alunos nas duas escolas considerou pouco provável que uma pessoa viva mais de 100 anos.
3	Nevar na cidade de Uberaba.	Como é um fato que raramente ocorre em uma cidade como Uberaba, todos os alunos nas duas escolas considerou como impossível ou pouco provável que isto ocorra.
4	Você tirar nota máxima em uma prova de Matemática.	Uma questão que dependia da relação de cada aluno com a disciplina de matemática e do nível de dificuldade das provas elaboradas pela professora. No ST, 84,7% dos alunos considerou pouco provável ou impossível tirar nota máxima. Já no CORINA, 62,5% dos alunos considerou certo ou muito provável que isto ocorra, enquanto que somente 33,3% dos alunos disse ser pouco provável.
5	Acabar a água no mundo.	Uma questão que gerou polêmica refletida nas respostas apresentadas nas duas escolas. No ST, 61,5% dos alunos considerou muito provável e 23,1%, pouco provável. Já no CORINA, 51,2% dos alunos pensa ser impossível ou pouco provável, enquanto que 41,7% considera muito provável que isto ocorra.
6	Uma mulher ficar grávida de quadrigêmeos (4 filhos).	A maioria dos alunos das duas escolas, 100% no ST e 70,8% no CORINA considera que é pouco provável que este fato ocorra. Porém, 16,7% dos alunos do CORINA, consideram o fato muito provável. Como o fato em questão é difícil de ocorrer, portanto, somente os alunos que consideram a alternativa como impossível estão equivocados.

Fonte: Análise própria.

Observamos que os alunos apresentam uma melhor compreensão da análise de situações que se associam a fenômenos aleatórios.

### Instrumento de aceitação das atividades

Houve uma diferença entre as duas escolas na aceitação das atividades por parte dos alunos: enquanto no ST elas foram muito bem aceitas, no CORINA as opiniões divergiram bastante. Indicamos 1 ou 2 para “menor aceitação”, 3 para “indiferente” e 4

ou 5 para “maior aceitação”, como o instrumento de avaliação das atividades propostas apresentado neste trabalho.

Todos os alunos, no ST, revelaram uma maior aceitação, quando perguntados se gostaram de realizar as atividades. Já no CORINA, 54,5% dos alunos indicaram uma maior aceitação e 22,7% dos alunos, uma menor aceitação, enquanto 22,7% se mantiveram indiferentes.

Também no ST, 84,6% dos alunos responderam positivamente, quando perguntados se haviam passado a compreender melhor os conceitos de Probabilidade, a partir da realização da atividade. Já no CORINA, 36,4% dos alunos se mantiveram indiferentes e 50,0% dos alunos manifestaram-se também positivamente.

Um total de 92,3% dos alunos do ST respondeu afirmativamente, quando perguntados se gostaram de trabalhar Probabilidade juntamente com Geometria. No CORINA, somente 45,5% dos alunos sentiram o mesmo, enquanto 31,8% dos alunos se mantiveram indiferentes.

A totalidade dos alunos do ST revelou uma maior aceitação do uso de jogos e consideraram que a maneira divertida de desenvolver as atividades aumentaria o seu interesse pela Matemática. Já no CORINA, pouco mais de 77,3% dos alunos pensam o mesmo.

Por fim, pedimos aos alunos que dessem algumas sugestões para a melhoria das atividades. No ST, a maioria dos alunos preferiu apenas elogiar as atividades e não deu sugestão alguma. Seguem alguns depoimentos:

Aluno 1: “... o trabalho foi bem complexo e que interessou a todos, uma forma diferente, fácil e divertida para entender. Parabéns.”

Aluno 2: “Acredito que da forma que vocês trabalharam as atividades está bem interessante, então, não precisaria melhorar.”

Aluno 9: “... eu gostei de tudo e um pouco, por que ajudou muito a minha cabeça funcionar.”

Aluno 10: “Achei muito bom essas aulas que tivemos, está certo a maneira de trabalhar, estagiários e futuros educadores [...]”.

Outro grupo de alunos indicou que gostaria que esse tipo de atividade ocorresse mais vezes em sala de aula, pois aumentou seu interesse:

Aluno 3: “Trabalhar mais vezes com nós e outros alunos de outras salas e escolas, porque foi muito bom e divertido, as vezes difícil mas divertido.”

Aluno 4: “Fazer mais aulas práticas, trazendo materiais para a sala de aula de acordo com o conteúdo estudado, isso faz com que o aluno tenha mais interesse pela matéria.”

Aluno 5: “Eu gostei muito das atividades e poderia ser usado pelos professores dentro de sala.”

Outro aluno destacou o envolvimento da classe na atividade:

Aluno 12: “[...] bastante interessante que envolveu todos os alunos.”

### Considerações finais

Mudar a forma de ensinar Probabilidade não é tarefa fácil, pois recebemos um ensino segundo o qual alguns poucos aprendem, mas a grande maioria dos alunos não consegue perceber a grandeza e a beleza dos conceitos que compõem esses conteúdos.

O uso desta sequência didática acarreta mais trabalho ao professor, mas acreditamos que, se adequadamente utilizada, pode contribuir significativamente com a melhoria do processo de ensino e aprendizagem.

Portanto, o objetivo principal desta proposta didático-pedagógica é fazer com que os próprios alunos construam e reconstruam o conceito probabilístico, com a orientação do professor.

Segundo os PCN, não existe um caminho único e melhor para o ensino de Matemática. “No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática” (Brasil 2000, p. 42).

O trabalho com conteúdos de Probabilidade é considerado difícil por muitos professores. Assim, nossa contribuição está em oferecer uma proposta de ensino diferente, a qual pode subsidiar a prática de sala de aula de professores que ensinam os conceitos iniciais de Probabilidade e colaborar com os docentes nessa tarefa.

### Referências

- Abe, T.S., Bittar, M. (2010). O ensino de probabilidades nas visões clássica, frequentista e geométrica, *In ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 10, de 7 a 9 de julho de 2010, Salvador. *Anais...* Salvador, Bahia.
- Brasil. (2000). Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN Ensino Médio*. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica.
- Brasil. (2002). Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Linguagens, códigos e suas tecnologias*. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica.
- Coutinho, C.Q.S. (2002). Probabilidade geométrica: um contexto para a modelização e a simulação de situações aleatórias com Cabri, *In REUNIÃO ANUAL DA ANPED – GT19*, 25, 29 de setembro a 22 de outubro de 2002, Caxambu, MG.
- Oliveira, P.G. de. (2010). *Probabilidade: concepções construídas e mobilizadas pelos alunos à luz da teoria das concepções (ckç)*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.