ESTUDO DE UMA ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA PARA CONSTRUÇÃO DE FÓRMULAS PARA A MEDIDA DE VOLUME DE SÓLIDOS

Maria José Ferreira da Silva e Saddo Ag Almouloud
zeze@pucsp.br e saddoag@pucsp.br
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – Brasil

Tema: VII.2 – Papel de la Teoria en la Investigación em Educación Matemática
Modalidade: CB
Nível: Médio (11 a 17 anos)
Palavras-chaves: Cabri 3D. TAD. Situações de ensino. Geometria.

Resumo
Na escola básica brasileira, geralmente, no que diz respeito ao ensino de Geometria espacial. as figuras são apresentadas como meras ilustrações e não é solicitado ao aluno nem suas construções, nem tão pouco um tratamento que possibilite a solução de alguma situação problema. Nesse sentido faremos uma análise praxeológica de algumas situações em que o software Cabri 3D pode ser utilizado para conduzir o aluno a buscar a construção de sólidos por truncaturas e caminhos para determinar a medida de seu volume. Para desenvolver e analisar estas situações, utilizamos a Teoria Antropológica do Didático – TAD, buscando identificar as organizações matemáticas envolvidas nessas situações e que podem ser propostas para o ensino e aprendizagem.

Introdução

Almeida e Silva (2012) afirmam que há carências de informações a respeito dos sólidos arquimedianos no ensino brasileiro. Foram encontrados dois livros de Desenho Geométrico um de 1897 e outro de 1960 em que esses sólidos são citados a partir das planificações das superfícies de alguns deles. Atualmente, esse assunto não é tratado no ensino. Por outro lado, com os computadores surge uma nova modalidade de tratamento para a Geometria a partir do dinamismo que alguns softwares apresentam em suas construções, o que nos leva a buscar novos caminhos para o ensino.

Por outro lado, em nossa vivência com professores do Ensino Médio (15 a 17 anos) percebemos que o trabalho com geometria espacial acontece de forma bastante precária baseada em sólidos como prismas e pirâmides, às vezes a esfera, mas totalmente voltado para a métrica com a disponibilização de fórmulas prontas. Os poliedros de Platão ou os poliedros regulares são apenas definidos para que os alunos memorizem que "todo poliedro regular é poliedro de Platão." Eventualmente, entregam a planificação de alguma superfície para que os alunos construam um modelo em cartão. Almeida (2010), no estudo desses poliedros, constatou que esse conteúdo já fez parte do Ensino Básico na disciplina de Desenho e que desapareceu completamente, quando essa disciplina deixou de existir para dar lugar à Educação Artística. Chevallard (1991) afirma que um objeto matemático não vive isoladamente Este autor introduz a noção de ecologia didática para nos induzir a pensar em um ecossistema como um conjunto de saberes que interagem entre si e na noção de habitat de um objeto matemático como a instituição onde se encontra esse saber e que, por sua vez, determina a função desse saber (seu nicho). Assim, os sólidos arquimedianos poderiam voltar ao sistema de ensino a partir da tecnologia Cabri 3D, que passaria a ser seu habitat, como afirma Almeida e Silva (2012). Para Almouloud (2007, p. 113) "a problemática ecológica amplia o campo de análise e permite abordar os problemas que se criam entre os diferentes objetos do saber a ensinar".

Almeida (2010), baseando-se na Problemática Ecológica de Chevallard, conjecturou que o Cabri-3D pudesse ser o ambiente para retomar o estudo desses sólidos por favorecer a representação de figuras espaciais, como também sua manipulação direta, possibilitaria a exploração de conjecturas. A partir de um estudo histórico encontrou, no Renascimento, as truncaturas de sólidos platônicos de Piero della Francesca (1412-1492) e nele se baseou para construir no Cabri-3D alguns dos sólidos arquimedianos. Atualmente, baseado nesses estudos, estamos desenvolvendo atividades para levar o trabalho com esses sólidos para professores. São algumas dessas ideias que apresentaremos neste trabalho, além de tratar de outros conteúdos, mesmo que rapidamente, para melhor mostrar a compreensão de situações-problema para o ensino de Geometria utilizando o Cabri-3D.

A Teoria Antropológica do Didático – TAD de acordo com Almouloud (2007) pode ser um instrumento poderoso para análise de práticas docentes, Chevallard (1992) construiu um modelo, como evolução da noção de Transposição Didática, que foca o estudo de Organizações (ou Praxeologias) Didáticas (OD) elaboradas para o ensino e aprendizagem de Organizações (ou Praxeologias) Matemáticas (OM). A TAD estuda as condições de possibilidade e funcionamento de sistemas didáticos entendidos como relações entre sujeito, instituição e saber. Gascón (2011) considera na TAD a vida institucional de uma OM, a gênese, o desenvolvimento, a difusão intrainstitucional, a migração para outras instituições e o desaparecimento institucional de praxeologias matemáticas, como objeto principal de estudo, enquanto a relação pessoal é vista como objeto secundário, mas não menos importante. Assim, percebe-se que quando a disciplina Desenho deixa de ser oferecida a relação entre os sólidos arquimedianos e a instituição escolar deixa de existir e, consequentemente, a relação entre esse saber e os professores e alunos também deixa de existir.

Na TAD as noções de tipos de tarefa, de técnica, de tecnologia e de teoria permitem modelar as atividades matemáticas. Para uma determinada tarefa existe pelo menos uma técnica (maneira de fazer) reconhecida na instituição que problematizou a tarefa, embora outras instituições possam ter técnicas alternativas para o mesmo problema. Já, a ecologia das tarefas diz respeito às condições e necessidades que permitem a produção e utilização destas nas instituições.

Outro ponto que deve ser considerado na construção dessas organizações didáticas é o registro de representação semiótica que será utilizado, os tratamentos possíveis e ainda se a conversão para um outro registro poderá ocorrer ou não. Para Duval (2011, p. 84) "a Matemática é o único domínio em que o progresso dos conhecimentos está estreitamente ligado à invenção de novos sistemas semióticos." A respeito de figuras geométricas, o autor afirma que sua construção por instrumento ou softwares, dá maior confiabilidade e objetividade porque permite verificações e observações, que são atividades em que "ver" é importante. Acrescenta que o ensino deve assumir que as figuras formam um registro de representação semiótica específico em que é preciso descrever as operações puramente figurais que permitirão utilizar uma propriedade matemática e ainda transformar qualquer figura em outra. Quanto à geometria espacial, o autor afirma que há necessidade, por exemplo, do olhar que permite ver a forma 2D (duas dimensões) obtida pela intersecção de um sólido por um plano qualquer do espaço.

Partindo desses pontos e interessados em estudar as questões do ensino de volume de sólidos não usuais buscamos construir uma organização matemática que permitisse a alunos do Ensino Médio, a partir do cálculo da medida do volume de um cubo, generalizar outras fórmulas que não as dos clássicos: prismas e pirâmides encontrados em livros didáticos. Dessa forma, elaboramos uma organização matemática que não só tratará de um dos sólidos arquimedianos, mas também de um sólido de Platão, que embora definidos não tem seu volume discutido no ensino.

As tarefas e o Cabri 3D

O Cabri 3D, enquanto software de geometria dinâmica possibilita a manipulação do plano de base que permite olhar o objeto construído de vários pontos de vista e ainda, o corte de poliedros por planos que permite realizar construções de sólidos por truncaturas. Nesse sentido o Cabri 3D permite olhar todas as arestas dos sólidos construídos, a determinação de pontos em qualquer uma de suas arestas e ainda a identificação de polígonos quando se corta o objeto por um plano. Essa "desconstrução" dimensional, de acordo com Duval (1999), permitirá o desenvolvimento da visão que consiste em apreender simultaneamente diversos objetos e uma apreensão completa do objeto. No entanto é a visualização, enquanto atividade cognitiva, que permitirá ver ao olhar, para observar e compreender o que está realmente representado.

Para Laborde (2007), a tecnologia tem a capacidade de oferecer diversas representações para os objetos matemáticos e por meio de tecnologias digitais, novos sistemas são introduzidos para ampliar a capacidade de manipulação e processamento, tais como o arrastar nos ambientes de Geometria Dinâmica para alterar o tipo de representação que pode ser oferecido para a atividade matemática e a construção de significados para seus objetos.

Uma Organização Matemática para o cálculo da medida de volume de sólidos

Tipo de Tarefa: Desenvolver a fórmula para o cálculo da medida do volume de um poliedro.

Tarefa 1: Construir uma fórmula para o cálculo da medida do volume de um octaedro.

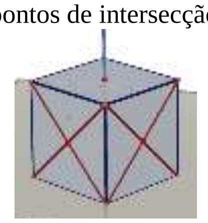
Subentende-se que o aluno já possua conhecimentos acerca do cálculo para a medida do volume de um cubo qualquer e que um octaedro pode ser obtido a partir dos pontos de intersecção das diagonais das faces de um cubo.

T1.1 Construir utilizando o Cabri-3D um cubo.

A técnica que permite resolver esta sub tarefa é abrir o programa Cabri 3D, esconder o referencial cartesiano, pois estamos trabalhando com Geometria, entrar no menu que permite construir poliedros regulares e construir um cubo qualquer.

O discurso tecnológico-teórico que justifica a construção está implícito no próprio software, pois a execução dessa tarefa no Cabri, não implica que o executor tenha os conhecimentos de Perspectiva necessários para justificar sua construção, mas conhecimentos de utilização das ferramentas do software.

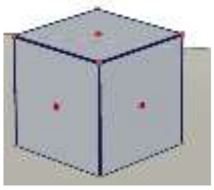
Figura 1: construção das diagonais das faces e pontos de intersecção



T.1.2 A partir desse cubo construa um octaedro.

Esta tarefa é resolvida em duas subtarefas: a obtenção dos vértices do octaedro e sua construção. A primeira pode ser resolvida pela obtenção dos centros dos quadrados que representam as faces do cubo a partir do traçado das diagonais de cada face do cubo e determinação de seu ponto de intersecção, como mostra a figura 1.

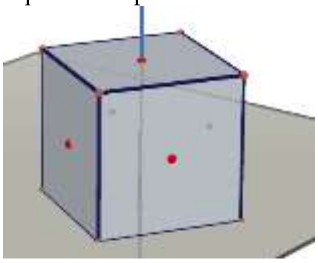
Figura 2: construção dos pontos médios das diagonais das faces



Outra técnica possível seria a obtenção do ponto médio das extremidades de uma diagonal da face de um cubo, como mostra a figura 2. Neste caso, além da justificativa da técnica anterior se acrescenta o conhecimento de que as diagonais de um quadrado se interceptam em seu ponto médio.

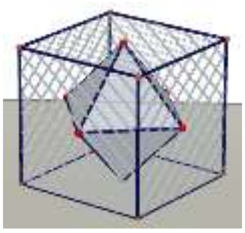
Outra maneira de obter os centros das faces seria perceber que o Cabri traça o centro da face que está contida no plano de base e, por esse ponto traçar uma perpendicular, como mostra a figura 3. A partir dessa perpendicular traçar a intersecção da perpendicular com a face superior da superfície cúbica e por simetria axial os outros dois centros das outras faces. Além das justificativas anteriores, nesta é necessário mobilizar o conhecimento de que os centros de faces opostas são simétricos em relação à reta que une outros dois centros opostos.

Figura 3: construção dos centros dos quadrados por simetria central



Para encontrar esses pontos, com qualquer das técnicas, será necessário girar a figura para acesso à todas as faces e ainda identificar os vértices de cada aresta, traçar as diagonais e identificar pontos de intersecção, de acordo com o caso.

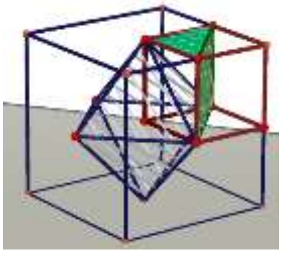
Figura 4: construção do Octaedro



Para a construção do octaedro execução da segunda subtarefa, no entanto, apenas girar a figura não permite que se veja todos os pontos e menos ainda o octaedro. É necessário alterar o aspecto da superfície, como mostra a figura 4, tornando-a de certa forma transparente, deixando assim de se tratar com um poliedro para se tratar apenas de sua superfície, ou seja de um objeto que, a princípio, seria um sólido e agora não tem volume, apenas capacidade, pois é oco. A partir dessa modificação visual do cubo inicial é necessário entrar no menu de poliedros e selecionar "poliedro convexo" para obter o octaedro a partir de seus vértices. O discurso tecnológico-teórico que justifica as técnicas utilizadas para resolver a tarefa T1 é a construção do octaedro a partir de um cubo que são justificadas pela Geometria e pelo Desenho Geométrico.

De acordo com Duval estamos desenvolvendo visualização na medida em que temos que ver além do que enxergamos, isto é, a princípio enxergamos um cubo, mas passamos a ver quadrados, arestas e pontos nessas arestas.

Figura 5: construções auxiliares para determinação da fórmula



T.1.3 Desenvolva uma fórmula para determinar o volume desse octaedro em função da medida a da aresta do cubo.

Para realizar essa tarefa, uma técnica possível seria construir segmentos e polígonos, como mostra a figura 5, para perceber que em cada oitavo do cubo existem dois prismas, cada um com três tetraedros de mesmo volume, sendo que um deles faz parte do octaedro e representa um oitavo de seu volume. Podemos concluir então que o cubo tem 48 tetraedros de mesmo volume e que 8 deles formam o octaedro. Logo o volume do octaedro será dado por $V = \frac{8}{48}a^3$ ou seja, $V = \frac{a^3}{6}$. Outras técnicas podem ser encontradas em sala de aula.

O discurso tecnológico teórico que justifica essa técnica está baseado nos conhecimentos de volume, principalmente, na propriedade que diz que "um prisma de base triangular pode ser decomposto em três pirâmides de mesmo volume." Além disso, baseia-se na relação parte-todo obtida pela decomposição da figura para determinar a expressão algébrica que relaciona a medida do volume do octaedro com a do cubo. Para a obtenção da fórmula foi necessária uma decomposição da figura que permitiu observar uma relação parte-todo entre o octaedro e o cubo e a associação do número 8/48, ou seja uma conversão do registro figural para o registro numérico. A partir dessa relação podemos obter uma representação no registro algébrico, da relação entre a medida do volume do octaedro e do volume do cubo.

T.1.4 Desenvolva uma fórmula para determinar o volume de um octaedro qualquer de aresta medindo x.

A técnica para a resolução dessa tarefa seria a generalização da fórmula encontrada na anterior, ou seja, reconstruí-la para um octaedro qualquer. Uma técnica possível, agora no registro algébrico seria perceber que a aresta do octaedro mede $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, pois é a diagonal de um quadrado de lado de medida $\frac{a}{2}$ e buscar o valor de x em função de a. Isto é, $x = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \frac{2x}{\sqrt{2}}$ que substituído na fórmula obtida anteriormente nos dá o volume: $V = \frac{1}{6}\left(\frac{2x}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{2x^3}{3\sqrt{2}} = \frac{x^3\sqrt{2}}{3}$.

O discurso tecnológico teórico que justifica a técnica da generalização seriam as próprias relações algébricas entre as medidas dos objetos geométricos em questão.

A validação empírica da fórmula obtida poderia ser obtida a partir da ferramenta medida de volume e a calculadora disponíveis no Cabri 3D, esclarecendo que esse procedimento não demonstra formalmente a veracidade da fórmula encontrada.

A partir da realização desta tarefa podemos solicitar outra para o desenvolvimento da fórmula da medida do volume de um cuboctaedro.

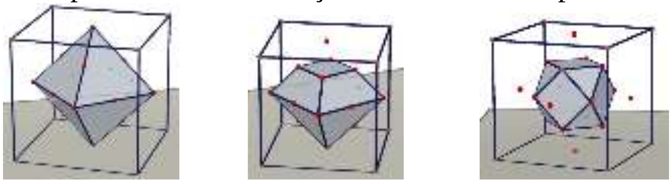
Tarefa 2: Construir uma fórmula para o cálculo da medida do volume de um cuboctaedro.

Para a realização desta tarefa é necessário mobilizar o conhecimento de que o cuboctaedro pode ser obtido por truncaturas do octaedro.

T.2.1 Construir um cuboctaedro.

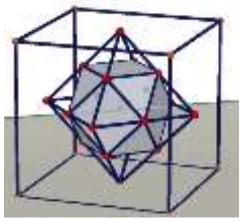
A partir do octaedro construído é necessário determinar os pontos médios de três arestas do octaedro, em torno de um vértice. Por esses três pontos construir um plano e recortar o poliedro determinado a partir desse vértice, como mostram as ilustrações da figura 6. Essa técnica é justificada pela própria construção do cuboctaedro a partir do octaedro e para realizá-la basta utilizar a ferramenta do Cabri para determinar o plano, a ferramenta de recorte de poliedro e a ferramenta que esconde o plano construído. O processo deve ser repetido para todos os vértices do octaedro.

Figura 6 - processo de construção do cuboctaedro por truncatura



T 2.2 Determinar a fórmula para a medida do volume do cuboctaedro em função da medida a da aresta do cubo.

Figura 7. Cuboctaedro inscrito em um octaedro.



Para desenvolver a fórmula solicitada temos que ter como referência o cuboctaedro e com as truncaturas das pirâmides, a partir dos vértices do octaedro, este desaparece. Para obtê-lo basta ligar seus vértices por segmentos e obter um modelo com as arestas do octaedro, como mostra a figura 7.

A técnica que resolve esta tarefa pode ser a constatação de que como o octaedro é regular e tem aresta medindo $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ a aresta do cuboctaedro tem medida igual à metade da aresta do octaedro, pois liga dois pontos médios de um triângulo equilátero (face do octaedro), ou seja mede $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. Da mesma maneira que fizeram na tarefa anterior concluir que do volume do octaedro foram retirados seis pirâmides de base quadrada e altura igual a $\frac{a}{4}$, o que nos dá um volume de $6 \times \frac{1}{3} \times \frac{a\sqrt{2}}{4} \times \frac{a\sqrt{2}}{4} \times \frac{a}{4} = \frac{a^3}{16}$. Assim, o volume do cuboctaedro é dado por $\frac{a^3}{6} - \frac{a^3}{16} = \frac{5a^3}{48}$ ou ainda que $\frac{5a^3}{48} = \frac{5}{8} \cdot \frac{a^3}{6}$ ou seja, o cuboctaedro tem cinco oitavos do volume do octaedro.

T.2.3 Determine uma fórmula para a medida do volume de um cuboctaedro qualquer de aresta medindo x.

A técnica, como na tarefa anterior, é a generalização da fórmula obtida, considerando que $x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, isto é, $a = \frac{4x}{\sqrt{2}}$. Substituindo este valor obtemos que $V = \frac{5\sqrt{2}x^3}{3}$.

Considerações finais

Estas organizações matemáticas podem ser levadas para a sala de aula a partir de organizações didáticas que a mobilizem. Isto significa que podemos escolher o contexto que será apresentado para o aluno. A análise por TAD nos possibilita isolar a tarefa do ponto de vista matemático e explorá-la no sentido de identificar as possíveis técnicas que a resolvem, bem como suas justificativas. Por outro lado, vimos que o Cabri 3D é um ambiente favorável para o trabalho com a construção de fórmulas para medidas de volume de poliedros não trabalhados geralmente no Ensino Básico.

Referências

Almeida, T.C.S. (2010). *Sólidos Arquimedianos e Cabri 3D: um estudo de truncaturas baseadas no renascimento.* (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP.

Almeida, T.C.S., Silva, M.J.F.. O Cabri 3D como habitat para o estudo dos sólidos de Arquimedes. In: *VI Congresso Iberoamericano de Cabri*, 2012, Lima. Ibero Cabri 2012. Lima: Editorial Hozlo S.R.L., 2012. p. 201-211.

Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da didática da Matemática.* Curitiba: Editora da UFPA

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas.* Tradução: Marlene Alves Dias. Proem Editora, São Paulo, Brasil.

_____. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Volume 1* (pp. 3-26). Cuernavaca, Morelos, Mexico.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del Álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investifación en Matemática Educativa.* 14(2), 203-231.

Laborde, C. (2007). The role and uses of technologies in Mathematics Classrooms: between challenge and Modus Vivendi. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education.* 7(1), 68-92.