

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2012). *Estrategias y representaciones usadas por un grupo de alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización*. Trabajo presentado en el grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico del XVI Simposio de la SEIEM, Jaén, España.

ESTRATEGIAS Y REPRESENTACIONES USADAS POR UN GRUPO DE ALUMNOS DE QUINTO DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN UNA TAREA DE GENERALIZACIÓN

Eduardo Merino
María C. Cañadas
Marta Molina
Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo se enmarca dentro de una investigación más amplia cuyo principal objetivo es indagar en las estrategias y representaciones que utilizan los alumnos de quinto de educación primaria cuando realizan una tarea de generalización. Recogimos la información en el aula habitual de un grupo de 20 alumnos del citado curso. Les propusimos una tarea de generalización a partir de un ejemplo genérico. Esta tarea está constituida por diez cuestiones. En este artículo presentamos el análisis y resultados de las respuestas a una de esas cuestiones. Destacamos la diversidad de representaciones utilizadas y el uso de diversos patrones como estrategia más empleada.

Palabras clave: Educación primaria, ejemplo genérico, generalización, patrón, representación.

Abstract

This paper is part of a wider research whose main objective is to investigate the strategies and representations used by fifth grade students in a generalization task. We collected the data in a regular classroom of a group of 20 students. We proposed them a generalization task starting from a generic example. This task has ten questions. In this paper we present the analysis and the results from the answers to one of the questions. We highlight the diversity of representations used, and the use of patterns as the most frequent strategy.

Keywords: Elementary education, generic example, generalization, pattern, representation.

Introducción

Las razones que impulsan esta investigación pueden asimilarse a las consideraciones de las que se nutre la propuesta *early algebra*. Esta propuesta consiste en la “algebrización del currículo” (Blanton y Kaput, 2005; Kaput, 2000) y sugiere promover en las aulas la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas en un ambiente escolar en el que se valore que los alumnos exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan y argumenten (Molina, 2009). El *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) argumenta que el álgebra ha de ser trabajada desde la educación infantil. La intención es ayudar a los alumnos a construir una base sólida de aprendizaje y experiencia como preparación para un trabajo en el álgebra de los grados medio y superior (NCTM, 2000, p. 37). La *early algebra* también aparece reflejada en documentos curriculares de otros países tales como Australia, Canadá o Portugal (Beberly, 2004, citado por Ali y Alsayed, 2010; Canavaro, 2009; Ontario Ministry of Education and Training, 2005; Watanabe, 2008). El currículo español no incluye contenidos relacionados con el álgebra en educación primaria o infantil, aunque se observa un tímido acercamiento a la *early algebra* porque recoge la necesidad de establecer y generalizar patrones numéricos geométricos y gráficos en la educación primaria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007).

Una de las aproximaciones al álgebra escolar recomendada para los alumnos de los primeros cursos de educación primaria es la que se centra en el pensamiento funcional. Esta concepción considera el uso del álgebra en situaciones concretas de una forma significativa, con la función como contenido matemático protagonista (Drijvers, Dekker y Wijers, 2011). Para el desarrollo del pensamiento funcional en los primeros niveles, entendido este como pensamiento sobre relaciones cuantitativas entre dos o más variables, la generalización y las representaciones son elementos fundamentales, (Warren, Cooper y Lamb, 2006). En relación con ambos elementos y en el marco de la visión funcional de la *early algebra*, destacamos el trabajo de Carraher, Martínez y Schliemann (2007), quienes examinan la capacidad de generalización de 15 estudiantes de 8 años que trabajan sobre patrones de figuras geométricas. En España, destacamos los trabajos de Castro (1995) y de Cañadas, Castro y Castro (2008). En el primero de ellos, la autora señala la efectividad de la enseñanza a través de las configuraciones puntuales en el reconocimiento de patrones, ya que puede facilitar la comprensión de las nociones de término general, patrones y relaciones numéricas, entre otras. Como

continuación de esta línea, Cañadas et. al. (2008) describen los patrones y generalización que llevan a cabo estudiantes de educación secundaria en la resolución del problema de las baldosas. En este ámbito, la mayoría de investigaciones desarrolladas en España se han realizado con alumnos de educación secundaria, donde el álgebra tiene un espacio específico. En nuestro trabajo avanzamos en esta línea para niveles inferiores del sistema educativo.

Nuestro foco de interés es la capacidad de generalización de un grupo de alumnos de 5º de educación primaria. En este artículo presentamos parte de un estudio más amplio (Merino, 2012). Describimos las representaciones y patrones que utilizan los estudiantes en una de las cuestiones planteadas a los alumnos en una tarea de generalización.

Marco conceptual

Los elementos clave del marco conceptual de este trabajo son (a) generalización, (b) patrones, y (c) representaciones (ver Figura 1). Destacamos el ejemplo genérico como caso particular de la tarea de generalización, que constituye un elemento diferenciador de este trabajo.

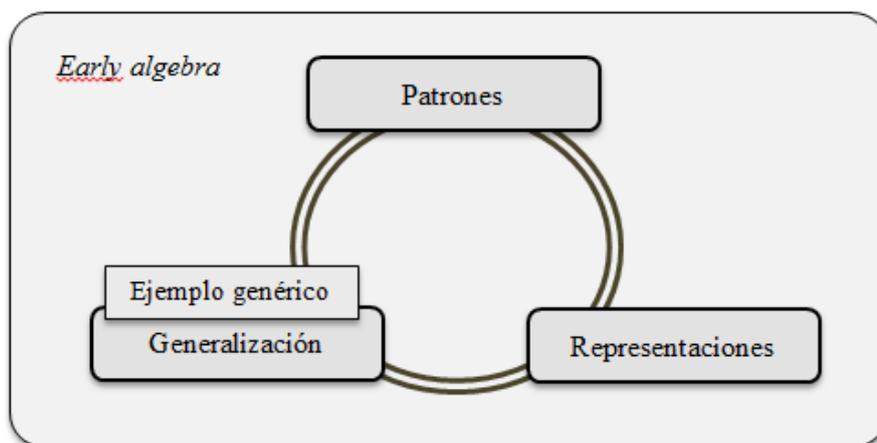


Figura 1. Esquema del marco conceptual

Patrones y generalización

Pólya (1966) señala que el reconocimiento de patrones es esencial para la generalización. El patrón se puede observar a partir de la repetición de una situación con regularidad (Stacey, 1989).

Kaput (1999) considera generalizar a

... extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo y entre ellos (p. 136).

Reid (2002) y Cañadas y Castro (2007) retoman la relación entre patrones y generalización para presentar diferentes pasos que permiten llegar a la generalización partiendo del trabajo con casos particulares. Estos autores utilizan tareas de generalización en las que, a partir de los casos particulares conocidos, se pide a los alumnos averiguar nuevos casos particulares o el término general. Para ello es necesario que generen una pauta o patrón que se dé en los elementos conocidos. Un caso particular de tarea de generalización es en el que se usa un ejemplo genérico, definido por Balacheff (2000) como el caso que es representante de una clase y del que se puede extraer información que sea común para su clase.

El uso de patrones es una de las posibles estrategias para resolver una tarea de generalización, entendiendo como estrategia un “procedimiento o regla de acción que permite obtener una conclusión o responder a una cuestión haciendo uso de relaciones y conceptos, generales o específicos de una determinada estructura conceptual” (Rico, 1997, p. 31).

Representaciones

En este trabajo nos centramos en las representaciones externas, definidas como “notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos, así como sus características y propiedades más relevantes” (Castro y Castro, 1997, p. 96). Dentro de estas representaciones, distinguimos los tipos considerados por Cañadas y Gómez (2012): (a) numéricas, (b) simbólicas, (c) tabulares, (d) gráficas, (e) geométricas, (f) pictóricas, (g) verbales, (h) manipulativas, (i) tabulares y (j) ejecutables (relacionados con las TIC). Describimos a continuación las que tienen mayor relevancia para nuestra investigación. Las representaciones verbales se sirven del lenguaje natural para referirse a los conceptos y procedimientos matemáticos que queremos representar. Las representaciones pictóricas utilizan recursos visuales, por lo general un dibujo, para plantear las relaciones entre datos e incógnitas de la tarea, sin ninguna notación que pueda considerarse de carácter simbólico (Cañadas y Figueiras, 2011). Las

representaciones numéricas se sirven de números y operaciones expresados mediante lenguaje matemático. Las representaciones simbólicas se caracterizan por el uso del simbolismo algebraico. Así mismo consideramos las representaciones múltiples, como aquellas que son combinación de dos o más de las representaciones mencionadas previamente (Kolloffel et al, 2009).

Objetivos

En este artículo abordamos dos objetivos específicos de la investigación recogida en Merino (2012): (a) identificar y describir las estrategias utilizadas por los alumnos, prestando especial atención al uso de patrones, y (b) describir las representaciones (verbal, numérica, pictórica, algebraica o tabular) que los alumnos utilizan en las tareas de generalización. Nos centramos en parte de los datos recogidos en ese trabajo, como muestra del trabajo realizado.

Método

Nuestro trabajo es de carácter exploratorio y descriptivo. Se llevó a cabo con una muestra intencional de 20 alumnos de 5º curso de educación primaria, con edades comprendidas entre los 10 y 11 años, en un colegio de Málaga en el curso académico 2011-2012.

Según la información suministrada por la maestra de los alumnos participantes, no habían trabajado tareas sobre patrones del estilo a la utilizada en este trabajo.

Recogida de información

El instrumento utilizado para la recogida de información es una prueba escrita para que los alumnos la resuelvan individualmente, elaborada por los autores de este trabajo tras la realización de dos estudios piloto. Consideramos diversas variables de tarea para proponer las 10 cuestiones que constituyen la tarea. La tarea comenzaba con el texto y la figura que podemos ver en las figuras 3 y 4.

“Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.

Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado”

Figura 3. Texto presentado en tarea

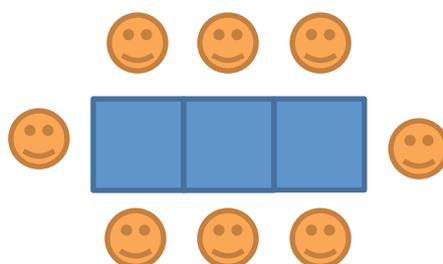


Figura 4. Imagen presentada en tarea

En este artículo nos centramos en la Cuestión 2 de las diez incluidas en la tarea: “¿Cuántos niños pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado”.

Esta primera cuestión buscaba dirigir la atención del estudiante hacia la estructura de la situación planteada e indagar en la percepción de la misma.

El primer autor aplicó la prueba en una sesión de clase 50 minutos, en el lugar habitual de clase.

Categorías de análisis

Teniendo en cuenta el marco teórico, los antecedentes de este trabajo y las respuestas de los alumnos establecemos unas categorías para el análisis de la información recogida..

Las categorías que conciernen a la Cuestión 2 son:

- representación: pictórica, verbal o numérica;
- estrategia: conteo o uso de patrón. Dentro del patrón, distinguimos entre patrón completo (incluye todos los niños y mesas) o incompleto (si no es

así); y apropiado (conduce a una respuesta correcta) o inapropiado (si no es así);

- respuesta: correcta o incorrecta;
- respuesta directa: respuesta sin explicación y, por tanto, no aportan información sobre la estrategia utilizada.

Resultados

Resumimos los resultados de las respuestas de los alumnos a la Cuestión 2 en la tabla 1. En las filas presentamos las estrategias que emplearon los alumnos para responder a la cuestión; y en las columnas, las representaciones. En cada celda recogemos los alumnos cuya producción corresponde con una categoría determinada, identificamos cada uno de ellos con un número que asignamos de forma aleatoria.

Tabla 1. Análisis de las respuestas a la Cuestión 2

	Representación				
	Pictórica			Verbal	Numérica
	C	I	NC		
	Estrategia				
Conteo	1, 6, 15* , 18		11	1, 6, 11 , 15 , 18	
Uso de patrón					
Mx8				2, 4	2, 4, 7
Mx2+2	5, 20			5, 13, 16, 20	13, 16
M+M+2	9			9, 17	17
Mx4				19	19
	Respuesta directa				
	3, 10, 12	8		3, 8, 10, 12, 14	

(*) Se resaltan en negrita las respuestas incorrectas.

Nota: E = estrategia; C = dibujo completo; I = Dibujo incompleto; NC = dibujo que no corresponde con el patrón; M = número concreto de mesas usado en el patrón.

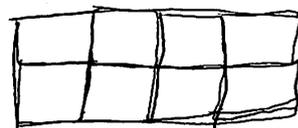
Como se deduce de la tabla 1, todos los alumnos (20) respondieron a la Cuestión 2. La respuesta directa fue la más frecuente (6 alumnos). Identificamos diversas estrategias en las respuestas de los alumnos. La más usada fue el conteo. El resto de estrategias implican el uso de patrones. Distinguimos cuatro patrones diferentes, dos de ellos son apropiados: M+M+2 y Mx2+2, siendo M el número de mesas en esta cuestión (8). Mx2+2 fue el patrón más utilizado (4). Por otro lado, el patrón incorrecto Mx4, fue

usado por A19¹ quien explica que lo obtuvo multiplicando 4 por el número de mesas, porque “en cada mesa caben 4”.

En cuanto a las representaciones, 12 alumnos utilizaron la representación pictórica. Cinco de estos utilizaron el conteo y reconocieron haberse basado en el dibujo. Como recogemos en la tabla 1, 10 alumnos hicieron un dibujo completo y correcto para la situación propuesta. A8 realizó un dibujo incompleto y respondió bien a la cuestión, siendo las líneas que delimitan las mesas entre sí el único elemento ausente en su representación. A11 distribuyó las mesas de forma diferente en su dibujo (ver figura 5), dando una respuesta correcta para esa disposición, pero no para la situación planteada. Todos los alumnos que realizaron el dibujo completo respondieron bien a la pregunta salvo A15, cuya respuesta fue 64 niños.

2. ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado.

Pueden sentarse 12 niños



Porque 8 mesas. Pues contando
cuál de ellos se puede
sentar en cada mesa.

Figura 5. Respuesta de A11 para la Cuestión 2

La representación verbal fue la más utilizada, ya que 19 alumnos (todos menos A7, que empleó una representación numérica) la usaron. Los alumnos siempre la utilizaron para explicar sus razonamientos o justificar su estrategia. La mayoría de ellos (18) utilizaron una representación múltiple, combinando la representación verbal con la pictórica o la numérica.

De la consideración conjunta de la información, destacamos que todos los alumnos que usaron la estrategia de conteo realizaron un dibujo y contaron los niños que aparecían en él. Además, entre los 7 alumnos con respuestas incorrectas, solo A15 y A11 realizaron dibujo.

Discusión de los resultados

La representación pictórica fue usada, principalmente, junto con la estrategia de conteo. Todos los alumnos que realizaron un dibujo completo, salvo A15, respondieron

¹ Nombramos a los alumnos por una A y el número que les asignamos por orden alfabético.

adecuadamente. Esto pone de manifiesto que la representación pictórica fue útil y eficaz para dar respuesta a esta cuestión.

Era de esperar que el conteo fuera una de las estrategias empleadas en la Cuestión 2, al tratarse de un número bajo de mesas. Destacamos que, entre los alumnos que identificaron patrones, hay cuatro alumnos que dieron respuestas incorrectas y seis correctas. Los patrones utilizados por los alumnos nos informan sobre el modo en que percibían la situación planteada, que fue variado. En el caso del patrón inapropiado $M \times 8$, el error podría deberse a que la cifra 8 es la cantidad de alumnos que corresponden al ejemplo genérico, por lo que los alumnos pueden considerar que lo adecuado es usarla para multiplicar al reconocer una situación de grupos repetidos. Las respuestas incorrectas también pueden ser debidas a percepciones inadecuadas de la situación descrita en la tarea a realizar (ver figura 4). Observamos que los alumnos no recurren a la respuesta directa o al conteo sin la ayuda de un dibujo.

Los resultados ponen de manifiesto que la representación pictórica y el conteo son la combinación más eficaz para la resolución de la Cuestión 2.

Conclusiones

Un primer objetivo de nuestro trabajo es *identificar y describir las estrategias utilizadas por los alumnos, prestando especial atención al uso de patrones*. En relación con él, en la Cuestión 2 se evidencia el uso de dos estrategias: conteo y uso de patrones. El conteo aparece relacionado con la realización de un dibujo en las respuestas de los alumnos. En cuanto a los patrones utilizados, se dan 4 variedades distintas, 2 correctos y 2 incorrectos.

Un análisis conjunto de las estrategias utilizadas en otras cuestiones permite concluir gran variedad de estrategias, destacando aquellas que hacen uso de patrones. La variedad de patrones que son capaces de identificar los alumnos de quinto de educación primaria es amplia, a pesar de no estar acostumbrados a este tipo de tareas. Observamos que la representación pictórica y las estrategias de conteo fueron las más utilizadas cuando el número de niños y mesas era pequeño, al igual que ocurrió en la Cuestión 2.

El segundo objetivo es *describir las representaciones (verbal, numérica, pictórica, algebraica o tabular) que los alumnos utilizan en la tarea de generalización*. Tanto en la cuestión analizada en este documento, como en un cómputo general de todas las cuestiones, el tipo de representación más usada por los alumnos es la verbal,

usualmente en las explicaciones que dan a su respuesta, tal como les solicitan las cuestiones. La representación verbal suele darse como parte de una representación múltiple.

La variedad de representaciones y de patrones identificados en una tarea de generalización a la que no están acostumbrados ponen de manifiesto que los alumnos de estas edades tienen conocimientos y herramientas necesarias para trabajar este tipo de tareas y podrían ser consideradas con la intención de fomentar el pensamiento funcional, como parte de la implementación de la *early algebra* en España.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido realizada en el seno del Grupo de Investigación FQM-193 del PAIDI “Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico”, y en el marco del proyecto de investigación EDU2009-11337 “Modelización y representaciones en educación matemática” del Plan Nacional de Investigación, Desarrollo e Innovación 2010-2012 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

Referencias bibliográficas

- Ali, O. y Alsayed, N. (2010). The effectiveness of geometric representative approach in developing algebraic thinking of fourth grade students. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 8, 256-263.
- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Una Empresa Docente.
- Blanton, M. L. y Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.
- Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, 1(2), 67-78.
- Cañadas, M. C., Castro, E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA*, 2(3), 137-151.
- Cañadas, M. C. y Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y aprendizaje*, 34(4).

- Cañadas, M. C. y Gómez, P. (2012). *Análisis de contenido. Apuntes de la Concentración en Educación del CIFE*. Universidad de los Andes, Colombia.
- Canavarro, A. P. (2009). El pensamiento algebraico en el aprendizaje de la Matemática los primeros años. *Quadrante*, 16(2), 81-118.
- Carraher, D. W., Martínez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, 40, 3-22.
- Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: ICE UB/Horsori.
- Drijvers, P., Dekker, T. y Wijers, M. (2011). Algebraic education: Exploring topics and themes. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education* (pp. 5-26). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.
- Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Kolloffel, B., Eysink, T. H. S., De Jong, T. y Wilhelm, P. (2009). The effects of representational format on learning combinatory from an interactive computer simulation. *Instructional Science*, 37(6), 503-517.
- Merino, E. (2012). *Patrones y representaciones de alumnos de 5º de primaria en una tarea de generalización*. Trabajo fin de máster. Universidad de Granada: Granada. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/1926/>
- Ministerio de Educación y Ciencia (2007). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la educación primaria (Vol. BOE N° 293, pp. 43053-43102). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.
- Ontario Ministry of Education and Training (2005). *The Ontario curriculum, grades 1-8: Mathematics, revised*. Ontario, CA: Queen's Printer.
- Reid, D. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(1), 5-29.
- Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-59). Barcelona: Horsori.
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 147-164.
- Warren E. A., Cooper T. J. y Lamb J. T. (2006). Investigating functional thinking in the elementary classroom: Foundations of early algebraic reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 25(3), 208-223.
- Watanabe, T. (2008). Algebra in elementary school: a Japanese perspective. En C. E. Greenes y R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (pp. 183-193). Reston, VA: NCTM.