ANÁLISIS DE LA UNIDAD COGNITIVA ENTRE LOS PROCESOS DE ARGUMENTACIÓN Y DEMOSTRACIÓN EN TRIGONOMETRÍA

Jorge FIALLO
jfiallo@uis.edu.co
Universidad Industrial de Santander - Colombia

Tema: Pensamiento Geométrico
Modalidad: CB
Nivel educativo: Medio
Palabras clave: unidad cognitiva, argumentación, demostración

Resumen

En este artículo analizamos, identificamos y caracterizamos algunos de los orígenes de las dificultades que se presentan en los procesos de planteamiento de conjeturas y de construcción de demostraciones en el contexto de aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica. Presentamos, a través de un ejemplo, una estructura de análisis de los tipos de demostración que se presentan en la escuela secundaria. La estructura está basada en la incorporación del modelo cK¢ (Balacheff, 1995) en el modelo de Toulmin (Toulmin, 1958) y una adaptación del constructo de unidad cognitiva (Boero, 1996), para el análisis de la unidad o distancia cognitiva entre el planteamiento de conjeturas y la construcción de demostraciones.

Introducción

Dentro de los trabajos que investigan las concepciones de los estudiantes sobre la demostración, algunos tratan las características del razonamiento relacionados con la demostración, principalmente sobre las relaciones entre la argumentación y la demostración (Boero, 2007). Estudian los aspectos cognitivos que entran en juego durante la construcción de una demostración para poner en evidencia ciertas dificultades que los alumnos enfrentan en su aprendizaje. Se busca dar respuesta a preguntas como las siguientes: ¿Existe continuidad o distancia cognitiva entre la argumentación producida en la construcción de una conjetura y su demostración? ¿De qué tipo de continuidad se trata? ¿Qué comparar? ¿Cómo comparar? ¿Cómo identificar la fase de producción de la conjetura y la fase de construcción de la demostración? (Pedemonte, 2005). En este artículo presentamos una estructura de análisis de los tipos de demostración que se presentan en la escuela secundaria.

Marco de referencia

Para analizar cognitivamente la continuidad que puede existir entre los procesos de argumentación que conducen a la explicación de una conjetura y su demostración desde el punto de vista estructural y del sistema de referencia, Pedemonte (2002, 2005) plantea una herramienta basada en la integración del modelo cK¢[1] (Balacheff, 1995, Balacheff y Margolinas, 2005) en el modelo de Toulmin[2] (1958). El modelo cK¢ es una herramienta metodológica propuesta por Balacheff para el análisis de los conocimientos que movilizan los estudiantes en la resolución de un problema. En el modelo se caracteriza una **concepción** por una cuádrupla compuesta de (Balacheff y Margolinas, 2005):

P: un conjunto de problemas.
R: un conjunto de operadores.
L: un sistema de representación.
Σ: una estructura de control.

El ámbito de la validez de la concepción, o esfera de práctica, está constituido por el conjunto de los problemas que la concepción permite solucionar.

Un *operador* es lo que permite la transformación de los problemas. Los operadores son visibles en las producciones y los comportamientos de los estudiantes.

Un *sistema de representación* (lingüístico o no) permite la expresión de los problemas y de los operadores. Las representaciones permiten la expresión de los controles, de las acciones y de los problemas, para la anticipación y la validación.

Finalmente, una *estructura de control* da y organiza las funciones de decisión, de elección, de juicio de validez y de adecuación de la acción.

El modelo cK¢ permite analizar el sistema de referencia - unidad cognitiva referencial - que toma en cuenta los sistemas de representaciones expresivas como el lenguaje, las heurísticas sobre el dibujo, etc. y los sistemas de conocimientos como las concepciones (Balacheff, 1995) y los marcos[3] (Douady, 1986) que están en juego durante la construcción de una conjetura y el desarrollo de su demostración. Como la demostración hace referencia a una teoría matemática, el sistema de referencia

---

[1] cK¢: conception, knowing, concept (Balacheff y Margolinas, 2005, p. 105)

[2] Toulmin elabora un modelo de representación de las argumentaciones matemáticas, en el que identifica seis características estructurales que se deben analizar y organizar durante el proceso de argumentación: el enunciado, los datos, los permisos de inferir, el indicador de fuerza del argumento, las refutaciones potenciales y el soporte del permiso de inferir.

[3] Un *marco* está constituido por objetos de una rama de las matemáticas, de las relaciones entre los objetos, de sus distintas formulaciones eventualmente e imágenes mentales asociadas a estos objetos y estas relaciones. Estas imágenes desempeñan un papel esencial en el funcionamiento como herramientas, de los objetos del marco. Dos marcos pueden implicar los mismos objetos y diferir por las imágenes mentales y la problemática desarrollada. (Douady, 1986 p.11)

representa una tentativa de organizar ciertos elementos que intervienen durante la argumentación para poder relacionarlos y compararlos con la teoría matemática que interviene durante la demostración.

El análisis estructural - unidad cognitiva estructural - puede ser realizado con el modelo de Toulmin. La estructura es la conexión cognitiva lógica entre afirmaciones (la inducción, o la deducción). La integración de los dos modelos se puede esquematizar de la siguiente manera (Fig. 1)

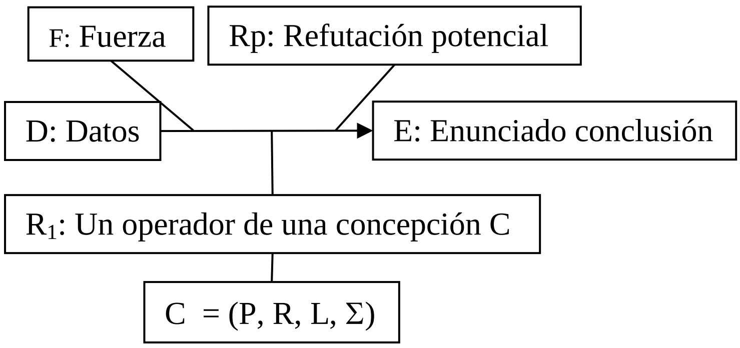


Figura 1: Integración del modelo cK¢ al modelo de Toulmin

Ejemplo de ruptura cognitiva

A los estudiantes se les plantea el siguiente problema, usando un archivo de software de geometría dinámica:

Conjeturando

¿Qué relación existe entre $cos(A)$ y $cos(-A)$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

Demostrando

Explica ***por qué*** es verdadera tu conjetura planteada.

Proceso de argumentación

[1] G2A: *Ahora sigue coseno.*

[2] Mabe: *No sé, coseno no cambia ni en el primero ni en el cuarto.*

[3] Cata: *Es lo mismo.*

[4] Mabe: *No sé, igual, si tú tienes, o sea.*

[5] Cata: *Ahí va a pasar lo mismo.*

[6] Mabe: *Mira, dale coseno de treinta y luego coseno de menos treinta, y verá que le va a dar, por que mira, si tienes treinta acá y tienes treinta acá* [señala los ángulos de 30º y –30º], *el coseno es positivo aquí y aquí, por lo que es x sobre r y aquí es x, digamos ciento cincuenta y menos ciento cincuenta…*

[7] Cata: *¿Qué vas a hacer?*

[8] Mabe: *¿Cuál es la conjetura?*

[9] Cata: *Que seno de A es igual a menos seno de…*

[10] Mabe: *Coseno.*

[11] Cata: *Perdón, coseno de A es igual a coseno de menos A, veamos otro ejemplo, o sea esto es lo mismo, pero con coseno y sin el menos. Coseno de A es igual a coseno de menos A.*

D$_1$: coseno igual en cuadrante I y IV [2]
D$_2$: $\cos(30) = \cos(-30)$[6]
D$_3$: $\cos(A) = \frac{x}{r}$ [6]

→ **E$_1$:** $\cos(A) = \cos(-A)$ [11]

R$_1$: Generalización sobre los enunciados

Marco perceptivo-numérico

Análisis y comentarios del proceso de argumentación

El grupo recuerda algunas propiedades visualizadas en la actividad anterior a la propuesta, prueba un caso particular y recuerda la definición de coseno para plantear la identidad trigonométrica que relaciona un ángulo *A* y su opuesto –*A*.

El operador de la concepción R$_1$ es la generalización de los datos obtenidos.

El sistema de representación L$_1$ es el lenguaje algebraico, expresado de manera verbal con el uso de variables y escrito en la hoja de trabajo.

El control Σ_1 es numérico, basado en el ejemplo realizado en la calculadora. Se puede intuir un control Σ_2 teórico, basado en la relación anterior $sen(A) = -sen(-A)$, en el dato D$_1$ y la definición de coseno en el plano cartesiano (D$_3$). Por analogía con el problema resuelto en la anterior actividad los estudiantes usan este control en la nueva conjetura [1] a [11].

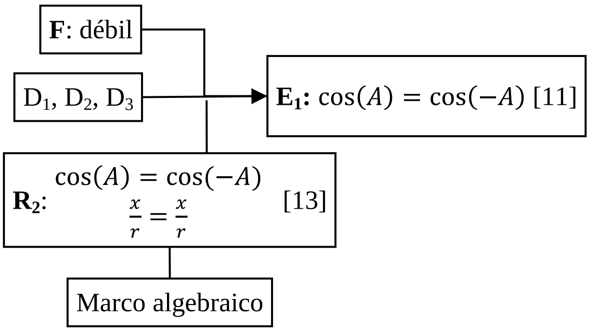
La forma de argumentación es constructiva, ayudada de la analogía con la actividad anterior.

La estructura de la conjetura es de una argumentación inductiva por generalización de los enunciados.

Proceso de demostración

[12] Mabe: *¿Cómo la demostramos?* […] *Cata eso es así porque…*

[13] Cata: *O sea, no sé, no sé porque, o sea, ¿cómo es la cosa de...? ¿de esto que? de…, es x sobre r ¿verdad?* [Escribe en la hoja de trabajo: $\cos(A) = \cos(-A)$ $\frac{x}{r} = \frac{x}{r}$]



[14] Mabe: *Esa no puede ser la demostración, la demostración, yo creo que es…porque…eh…*

[15] Cata: *Esa se puede demostrar igual que la de arriba, Jorge ven un segundo.*

[16] Inv.: *Cuénteme.*

[17] Cata: *¿Cómo se demuestra la de coseno? O sea, ¿simplemente porque si?*

[18] Inv.: *¿Cómo así? ¿Cuál es la relación entre el coseno?*

[19] Cata: *Es igual.*

[20] Inv.: *¿Cuál es la conjetura?*

[21] Cata: *Que el signo es el mismo.*

[22] Inv.: *No, ¿Cuál es la conjetura?*

[23] Mabe: *Que coseno de A es igual al coseno de menos A.*

[24] Inv.: *Exacto, la conjetura es que coseno de A es igual a coseno de menos A, ¿cómo se dieron cuenta de eso?*

[25] Mabe: *Es que como los ángulos salen del eje x positivo en el sentido de las manecillas del reloj o en contra, entonces, el coseno es positivo en el primero y en el cuarto cuadrante, entonces digamos, si tienes un ángulo agudo que mida setenta, entonces va a ser positivo, y si tiene uno que mida menos setenta en este cuadrante también va a ser positivo el coseno.*

[26] Inv.: *Bueno, y qué pasa si…*

[27] Mabe: *Porque es que está en el mismo lado la x.*

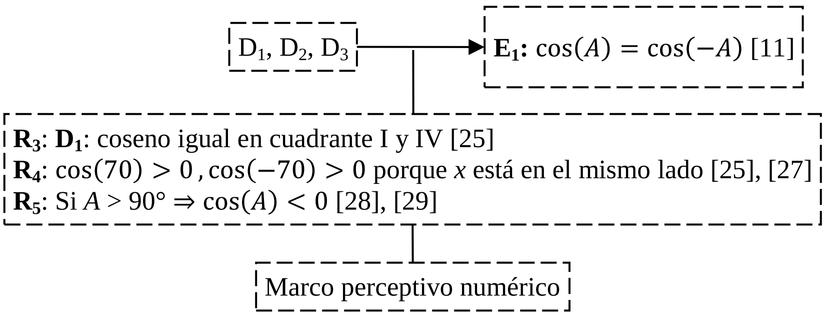
[28] Inv.: *¿Si el ángulo es mayor de noventa?*

[29] Mabe: *Es igual, van a ser negativos ambos porque aquí está en estos dos cosenos negativos.*

[30] Inv.: *Eso es correcto, entonces, eso les sirvió para darse cuenta que coseno de A es igual a coseno de menos A, bueno, esa es la conjetura, ¿ahora cómo demuestran la conjetura?*

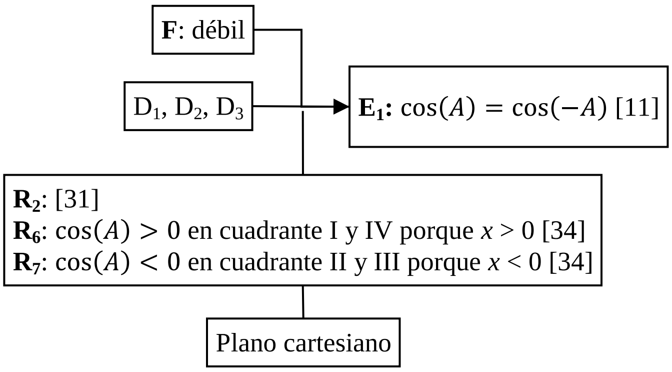
[31] Cata: *¿Es así?* [señala lo escrito en la hoja de trabajo en [13]], *es que Ruby me dijo que así no podía comprobar, la otra es que es muy obvio.*

[32] Inv.: *¿Qué es lo obvio?*



[33] Mabe: *Cata no sabe por qué es que en cada cuadrante, o sea, en el primero y en el cuarto, coseno es positivo, y en los otros dos es negativo, por lo…*

[34] Cata: *Es por la coordenada x, es que en estos dos cuadrantes la coordenada x es positiva* [señala los cuadrantes I y IV], *y en estos dos la coordenada x es negativa* [señala los cuadrantes II y III].



Análisis y comentarios del proceso de demostración

La fuerza de argumentación es débil porque no creen en su demostración, les parece obvio lo que hicieron, además que la profesora las confunde diciéndoles que así no pueden demostrarlo [tal vez porque no han demostrado que los valores de las abscisas son iguales]. Se observa cómo se pasa de una demostración con estructura deductiva, cuya fuerza de inferencia es débil, al uso de pasos inductivos y deductivos para justificar la demostración algebraica realizada. Esto indica que la demostración, aunque usa elementos y procedimientos teóricos, no se puede catalogar de demostración deductiva. Además, también se evidencia que las estudiantes solamente están considerando el ángulo *A* entre 0° y 180° y el ángulo –*A* entre 180° y 360°.

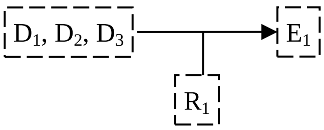
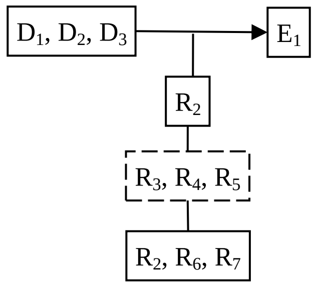
El operador R_2 es teórico, basado en la definición de coseno en el plano cartesiano y el uso de las propiedades de las operaciones de números reales, pero los operadores R_3 a R_7 son operadores perceptivos, basados en los datos observados en el archivo, de hecho el operador R_5 es erróneo al generalizar la relación para cualquier valor de $A > 90º$.

El sistema de representación va del algebra (L_1) al lenguaje natural (L_2) para expresar verbalmente las relaciones y propiedades (operadores R_2 a R_7) que usan para tratar de convencerse a sí mismos y al investigador de la demostración construida.

El control, inicialmente es teórico (Σ_2), caracterizado por la analogía con el anterior problema y por el uso de la definición de coseno en el plano y del algebra para verificar la igualdad, luego un control perceptivo numérico (Σ_3) basado en el uso de ejemplos y la visualización de relaciones en el diagrama dinámico.

La estructura de la demostración va de lo deductivo a lo inductivo. Analizando el proceso en general proponemos que la estructura es inductiva y el tipo de demostración es un Ejemplo Genérico Intelectual (Fiallo, 2010) al tratarse de una generalización inductiva con argumentos matemáticos sobre el proceso.

Análisis de la unidad cognitiva

Esquema global de la argumentación	**Esquema global de la demostración**
	

Análisis de la continuidad del sistema de referencia

ARGUMENTACIÓN **E_1**: $cos(A) = cos(-A)$			**DEMOSTRACIÓN** **E_1**: $cos(A) = cos(-A)$		
CONCEPCIÓN			CONCEPCIÓN		
OPERADORES	**SIST. DE REPR.**	**E. DE CONTROL**	**OPERADORES**	**SIST. DE REPR**	**E. DE CONTROL**
R_1: Generalización sobre los enunciados	**L_1**: Lenguaje algebraico.	**Σ_1**: numérico en la calculadora. **Σ_2**: Teórico (uso de la analogía con la actividad anterior). y de la definición de coseno en el plano.	**R_2**: $\cos(A) = \cos(-A)$ $\frac{x}{r} = \frac{x}{r}$ **R_3**: **D_1**: coseno igual en cuadrante I y IV **R_4**: $\cos(70) > 0, \cos(-70) > 0$ porque x está en el mismo lado **R_5**: Si $A > 90° \Rightarrow \cos(A) < 0$ **R_6**: $\cos(A) > 0$ en cuadrante I y IV porque $x > 0$ **R_7**: $\cos(A) < 0$ en cuadrante II y III porque $x < 0$	**L_1**: Lenguaje algebraico. **L_2**: Lenguaje natural.	**Σ_2**: Teórico (uso de la analogía con la actividad anterior) y de la definición de coseno en el plano. **Σ_3**: perceptivo.
Marco perceptivo – numérico			Marco algebraico – perceptivo		
RUPTURA DEL SISTEMA DE REFERENCIA					

Análisis de la continuidad estructural

ARGUMENTACIÓN	**DEMOSTRACIÓN**
FORMA DE ARGUMENTACIÓN Constructiva	
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Inductiva	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Inductiva (Ded – Ind – Ded).
	TIPO DE DEMOSTRACIÓN **EGI**: Generalización inductiva con argumentos matemáticos sobre el proceso
CONTINUIDAD ESTRUCTURAL	

Conclusiones

Hay ruptura cognitiva por la ruptura del sistema de referencia. En el proceso de demostración el grupo realiza algunos procedimientos que corresponden a pasos de estructura deductiva, pero luego usa argumentos inductivos y deductivos para dar soporte a estos argumentos deductivos. Esto se evidencia más en el esquema global propuesto para el proceso de demostración, en donde consideramos que las acciones y discusiones realizadas por el grupo, después de realizada la demostración algebraica, se deben a que los mismos estudiantes no están convencidos de su demostración; por ello recurren inicialmente a la convalidación del proceso por parte de la profesora. Al no obtener esta validación, intentan dar nuevos argumentos basados en ejemplos y propiedades trigonométricas perceptivas (R_3 a R_7) para validar el operador R_2.

El grupo ha aprendido algunos procedimientos necesarios para una demostración deductiva, pero hace falta comprensión y credibilidad en ellos. También concluimos que la intervención del profesor no fue la adecuada para el logro de la confianza y comprensión.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (1995). Conception, connaissance et concept. En D. Grenier (Ed.), *Didactique et technologies cognitives en mathématiques, séminaires 1994-1995* (pp. 219-244). Grenoble: Université Joseph Fourier.

Balacheff, N., Margolinas, C. (2005). cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. En A. Mercier, C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75-106). Francia: La Pensée Sauvage -Editions-.

Boero, P. (2007). Theorems in School: An introduction. En P. Boero (Ed.), *Theorems in School: From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* (pp. 19-24). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense Publishers.

Boero, P., Garuti, R., Lemut, E., Mariotti, A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems. *Proceeding 20th PME International Conference,Valencia, España, 2*, 113-120.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5-31.

Fiallo, J. (2010). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica*. (Tesis doctoral). Valencia (España):Universidad de Valencia.

Pedemonte, B. (2002). Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démostration dans le apprentisage des mathématiques. (Tesis doctoral). Université Joseph Fourier - Grenoble I, Grenoble, Francia.

Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l`analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. Recherches en didactique des mathematiques, 25(3), 313 - 348.

Toulmin, S.E., (1958). The use of argument, Cambridge University Press.