EL ESTATUTO ONTOLÓGICO DE LAS DEFINICIONES EN MATEMÁTICA

Daniel Eduardo Hillar
danielhillar@yahoo.com.ar
Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Delta, Argentina

Tema: 1.4. Pensamiento Matemático avanzado
Modalidad: CB
Nivel educativo: Terciario
Palabras clave: “formalismo lingüístico, integral, concepto de límite, las definiciones en matemática”

Resumen
El presente trabajo tiene por objeto exponer la manera en que se definen ciertos objetos matemáticos fuera de ella. Concretamente el caso de la integral curvilínea que, muchos autores, y así se emplea, la definen desde la física. Esto supone definir un objeto fuera de la propia disciplina que la crea y que por lo tanto pierde sentido ontológico.
Para definir esta integral matemáticamente hay que recurrir al conflictivo concepto de límite, el cual invoca los conceptos de métrica y los más abstractos fundamentos de la matemática.
No por ello debemos desechar dicha definición, ya que se mostrará las ventajas que esto tiene para obtener estas integrales, al punto de poder construir una potente herramienta programable en planillas de cálculo. Además con esta clase de procedimientos puede calcularse diversos casos que no se pueden llevar a cabo a través de su definición tradicional analítica, sino que hay que recurrir a este tipo de métodos numéricos.
Se trata de dar un enfoque teórico al concepto de integral, no empírica porque no está sistematizada; el mismo es de aplicación numérica y se puede calcular la integral aplicando planilla de cálculo, Excel, Maple, etc.

1. Introducción

En esta presentación se muestra como se suele presentar un mismo contenido matemático, concretamente la definición de integral de línea. Se hará de dos maneras, la primera desde la ciencia para la cual fue creado, y la segunda desde la ciencia que le da sentido ontológico.

Finalmente se analiza la conveniencia de definir un ente matemático dentro de ella misma.

2. Definición usual de integral de línea

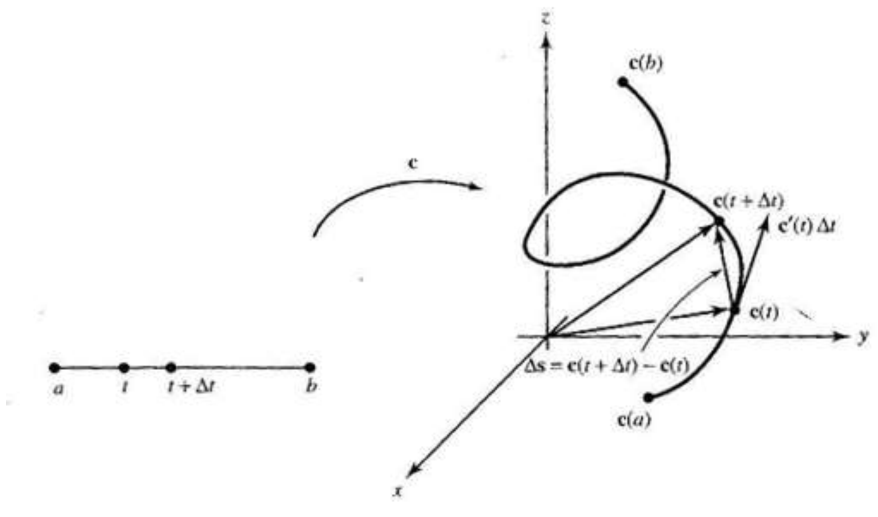
La mayoría de los textos utilizados en Análisis II introducen la definición de Integral de línea a través de la integral del producto escalar, dadas las condiciones necesarias. Tomemos la definición del texto usual de Análisis Matemático II (Marsden-Tromba, 2000:402-404) “Si ***F*** es un campo de fuerza en el espacio, entonces una partícula de prueba (por ejemplo una pequeña unidad de carga en un campo de fuerza eléctrico o una masa unitaria en el campo gravitatorio) experimentará la fuerza ***F***. Supongamos que la partícula se mueve a lo largo de la imagen de una trayectoria **c** mientras actúa sobre ella ***F***. Un concepto fundamental es el de trabajo realizado por ***F*** sobre la partícula, conforme describe la trayectoria **c**. Si **c** es un desplazamiento en línea recta dado por el vector ***d*** y ***F*** es una fuerza constante, entonces el trabajo realizado por F al mover la partícula a lo largo de la trayectoria es ***F · d**:*

F · d = (magnitud de fuerza) x (desplazamiento en dirección de la fuerza).

Si la trayectoria está curvada, podemos imaginar que está formada por una sucesión de desplazamientos rectos infinitesimales o que está aproximada por un número finito de desplazamientos rectos. Entonces (como en la deducción de las fórmulas para la integral de trayectoria en la sección anterior) llegamos a la siguiente fórmula para el trabajo realizado por el campo de fuerza de ***F*** sobre una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria **c**: $[a,b] \to R^3$:

$$\text{Trabajo realizado por } F = \int_a^b F(c(t)) \bullet c'(t)dt$$

Sin dar una demostración rigurosa, podemos justificar esta deducción como sigue.



Conforme c varia sobre un pequeño intervalo *t* a *t* + *Δt*, la partícula se mueve de c(*t*) a c(*t* + *Δt*), con vector de desplazamiento $\Delta s = c(t + \Delta t) - c(t)$

Para Δt pequeños, $\Delta s = c(t + \Delta t) - c(t) = c'(t)\Delta t$

3. Integrales de línea

De la definición de derivada, obtenemos la aproximación $\Delta s = c'(t)\Delta t$. El trabajo realizado al ir de c(*t*) a c(*t* + *Δt*) es, por lo tanto, aproximadamente:

$$F(c(t)).\Delta s = F(c(t)).c'(t)\Delta t$$

Si subdividimos el intervalo [a,b] en *n* partes iguales $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, con $\Delta t = t_{i+1} \rightarrow t_i$, entonces el trabajo realizado por F es aproximadamente

$$\sum_{i=0}^{n-1} F(c(t_i)).\Delta s = F(c(t)).c'(t)\Delta s$$

Cuando $n \rightarrow \infty$, esta aproximación se vuelve cada vez mejor, de modo que es razonable definir trabajo como el límite de la suma anterior cuando $n \rightarrow \infty$. Este límite está dado por la integral

$$F = \int_a^b F(c(t)) \bullet c'(t)dt$$

Este análisis nos conduce a la siguiente definición.

Definición: Integrales de Línea: Sea ***F*** un campo vectorial en R^3 continuo sobre la trayectoria C, c: $[a,b] \rightarrow R^3$. Definimos $\int_c F.ds$, la *integral de línea* de ***F*** a lo largo de ***c*** por la fórmula

$$\int_c F.ds = \int_a^b F(c(t)).c'(t)dt$$

Esto es, integramos el producto punto de F con c´ sobre el intervalo [a,b].

Como sucede con las funciones escalares, también podemos definir $\int_c F.ds \quad si \quad F(c(t)).c'(t)$ solo es continua por pedazos.

Para trayectorias **c** que satisfagan $c'(t) \neq 0$, hay otra fórmula útil para la integral de línea: a saber, si $T(t) = c'(t)/\|c'(t)\|$ denota el vector tangente unitario, tenemos:

$$\int F.ds = \int_a^b F(c(t)).c'(t)dt \qquad \text{(por definición)}$$

$$= \int_a^b \left[Fc(t).\frac{c'(t)}{\|c'(t)\|} dt \right] \|c'(t)\| dt \qquad \text{(cancelando } \|c'(t)\|\text{)}$$

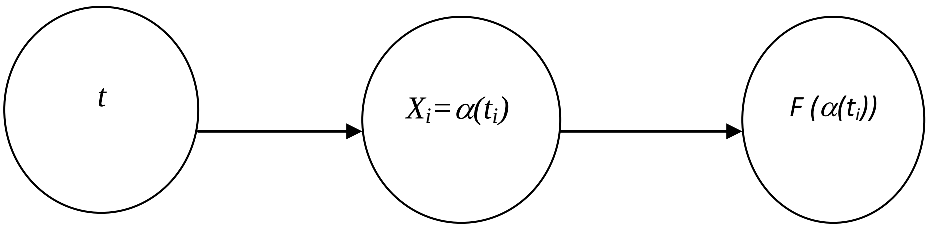
$$= \int_a^b [F(c(t)).T(t)] \|c'(t)\| dt$$

En esta fórmula se dice que $\int F.ds$ es igual a algo parecido a la integral de trayectoria de la componente tangencial $F(c(t)).T(t)$ de **F** a lo largo de **c**. De hecho, la última parte de la fórmula (1) es análoga a la integral de trayectoria de una función escalar ***f*** a lo largo de ***c***. Nota: Si ***c*** no se interseca a si misma (esto es, $c(t_1) = c(t_2)$ implica $t_1 = t_2$), entonces cada punto *P* de *C* (la curva imagen de *c*) se puede escribir de manera única como $c(t)$ para algún t. Si definimos $F(P) = f(c(t)).T(t)$, $\boldsymbol{f}$ es una función definida en C y por definición su integral de trayectoria.

4. Definición matemática de integral de línea

Sean $\alpha = (\alpha_1,\ldots..\alpha_n)$ una función continua $\alpha : [a,b] \to \mathrm{R}^m$ y $F = (f_1, f_2\ldots\ldots f_m)$ una aplicación acotada de $im(\alpha)$ en R^m; esto es $F : im(\alpha) \to \mathrm{R}^m$

$$[a,b] \xrightarrow{\alpha_{1(t)},\ldots\alpha_{n(t)}} \mathrm{R}^m \xrightarrow{F(\alpha_{1(t)},\ldots\alpha_{n(t)})} \mathrm{R}^m$$



Definición de Riemann-Stielges

Sean $\alpha = (\alpha_1,\ldots..\alpha_n)$ una función continua $\alpha : [a,b] \to \mathrm{R}^m$ y $F = (f_1, f_2\ldots\ldots f_m)$ una aplicación acotada de $im(\alpha)$ en R^m; esto es $F : im(\alpha) \to \mathrm{R}^m$.

Se dice que existe la integral de F a lo largo del camino α (o la integral curvilínea de F con respecto de (α), si existe un $\mathrm{I} \in \mathrm{R}$, tal que $\forall\ \varepsilon > 0$ existe una partición P_ε de $[a,b]$ tal que toda partición más fina $P = \{x_0,\ldots\ldots,x_n\}$ de $[a,b]$ más fina que P_ε y todo $ti \in [t_{xi},t_{xi+1}]$, con $i = 0,1,\ldots..n\text{-}1$ se verifica:

$$\left| f_1(\alpha(t_0))(\alpha_1(x_1) - \alpha_1(x_0)) + \ldots + f_m(\alpha(t_m))(\alpha_m(x_1) - \alpha_m(x_0)) + \ldots + f_1(\alpha(t_{n-1}))(\alpha_1(x_n) - \alpha_1(x_{n-1})) + \ldots + f_m(\alpha(t_{n-1}))(\alpha_m(x_n) - \alpha_m(x_{n-1})) - \mathrm{I} \right| < \varepsilon$$

Si existe la integral el número I es único y se denomina integral de F a lo largo de la curva α y se denota por:

$$\int_\alpha f d\alpha\ ,\ \int_\alpha f \ \text{ o } \int_\alpha f_1 d\alpha_1 + \ldots + f_m d\alpha_m$$

Sea $m = 1$, entonces es $f : im(\alpha) \to \mathrm{R}$ y la $\int_\alpha f d\alpha$ si $f\alpha$ es integrable Riemann-Stieltges respecto de α en $[a,b]$ y es $\int_\alpha f d\alpha = \int_a^b f\,\alpha\, d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)\,dx$

$$\int_\alpha f d\alpha = \int_a^b (f_1(\alpha(t)\alpha_1'(t)) + \ldots + f_n(\alpha(t)\alpha_n'(t)))dt \quad (1)$$

5. En cuanto al problema de límites

Esta última definición matemática de integral de línea, se concibe a través de complejos conceptos topológicos, especialmente el de métricas, con el concepto ínsito de límite.

Conocidas son las dificultades que implican este último concepto, lo que clásicamente constituye un obstáculo epistemológico. Puesto que los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico se pueden clasificar de acuerdo a su origen en obstáculos de origen ontogénico (son los que sobrevienen de las limitaciones del sujeto), obstáculos de origen didáctico (provocados por el sistema de enseñanza) y obstáculos de origen epistemológico (son aquellos derivados del rol constitutivo del saber mismo). Reconocer que los errores pueden deberse a causas epistemológicas y didácticas y no sólo de tipo cognitivo es un primer paso para encontrar posibles soluciones (Vrancken, 2009: 10-11).

Esta situación, puede colocarnos en una posición de análisis respecto a la conveniencia de exponer estas definiciones. Puesto que involucran cuestiones que llevan mucho tiempo de aprehender, conocidos obstáculos que pueden impedir o entorpecer la adquisición de los aprendizajes. Por este motivo, lo docentes debemos decidir que es lo más conveniente. A continuación, a manera de conclusión, se presenta la posición personal.

6. Conclusión

Las definiciones deben ser enunciadas desde la misma disciplina que las está estudiando y en forma general, no particularizarla, solo así servirá como aplicación para todas las disciplinas. Un concepto formal podrá ser de utilidad en todas las ciencias fácticas, sociales y hasta en economía. Si dejáramos una definición en función de una aplicación en física, la misma queda empobrecida, incompleta y mal desde el punto de vista ontológico.

El concepto de integral dado por la fórmula (1) se encuentra enmarcado dentro de lo que es el producto de la simple aprehensión, como una unidad ontológica definida universalmente aplicable a todo; y evita conceptos equívocos.

Asimismo en el anexo se muestra un programa que calcula integrales, lo cual da cuenta de lo que se quiere dejar expresado, ya que al definir matemáticamente esta integral, se puede hacer un programa que la calcule de manera numérica.

Por lo expuesto, considero que un objeto matemático debe definirse desde la disciplina que lo crea, aunque esto signifique dificultades y obstáculos, pero estos deben ser derribados y no esquivados para aprender los conceptos de manera correcta. Solo hay que dar el tiempo necesario, así como un día pudimos aprender a leer y escribir.

Referencias bibliográficas

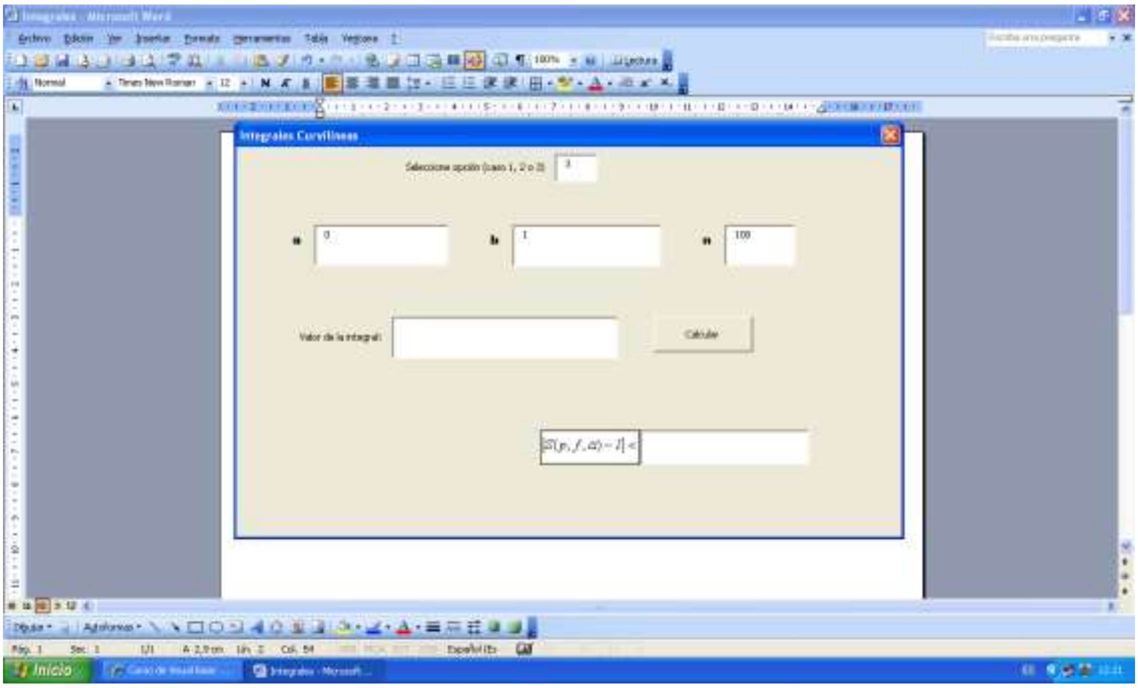
Marsden, J. & Tromba, A. (2000). Cálculo Vectorial. Estados Unidos: Addison-Wesley Iberoamericana.

Apostol, T. (2009). Análisis Matemático. España: Reverté.

Vrancken S., Gregorini M. I., Engler A., Müller D. & Heclein M. (2013) Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. Recuperado de: http://www.soarem.org.ar/documentos/29%20/vrancken.pdf/ Consultado 24/03/2013

Anexo:

El siguiente es un programa realizado por María Nieves Ortiz de Latierro, donde se muestra la interfase y el código fuente de un programa que calcula integrales de línea, utilizando la definición matemática de esta integral.




```
Private Sub CommandButton1_Click()
Dim t, h, dx, txint, dy, tyint, dz, tzint As Double
Dim f1, f2, f3, sumaf1, sumaf2, sumaf3, a, b As Double
Dim i, n, opcion As Integer
opcion = Val(TextBox6.Text)
a = Val(TextBox1.Text)
b = Val(TextBox2.Text)
n = Val(TextBox3.Text)
sumaf1 = 0
sumaf2 = 0
h = (b - a) / n
t = a

Select Case opcion

Case 1
For i = 1 To n
dx = (4 * Cos(t + h)) - (4 * Cos(t))
txint = ((4 * Cos(t + h)) + (4 * Cos(t))) / 2
dy = (4 * Sin(t + h)) - (4 * Sin(t))
tyint = ((4 * Sin(t + h)) + (4 * Sin(t))) / 2
dz = (3 * (t + h)) - (3 * t)
tzint = ((3 * (t + h)) + (3 * t)) / 2
f1 = txint
f2 = tyint
```

```
f3 = tzint
sumaf1 = sumaf1 + (f1 * dx)
sumaf2 = sumaf2 + (f2 * dy)
sumaf3 = sumaf3 + (f3 * dz)
t = t + h
Next
TextBox4.Text = sumaf1 + sumaf2 + sumaf3
TextBox5.Text = Abs(18 * 9.86960440108936 - (sumaf1 + sumaf2 + sumaf3))

Case 2
For i = 1 To n
dx = (Sin(t + h)) - (Sin(t))
txint = (Sin(t + h)) + (Sin(t)) / 2
dy = (Cos(t + h)) - (Cos(t))
tyint = ((Cos(t + h)) + Cos(t)) / 2
dz = h
tzint = ((t + h) + t) / 2
f1 = txint
f2 = tyint
f3 = tzint
sumaf1 = sumaf1 + (f1 * dx)
sumaf2 = sumaf2 + (f2 * dy)
sumaf3 = sumaf3 + (f3 * dz)
t = t + h
Next
TextBox4.Text = sumaf1 + sumaf2 + sumaf3
TextBox5.Text = Abs(2 * 9.86960440108936 - (sumaf1 + sumaf2 + sumaf3))

Case 3
For i = 1 To n
dx = h
txint = ((t + h) + t) / 2
dy = ((t + h) ^ 2) - (t ^ 2)
tyint = (((t + h) ^ 2) + (t ^ 2)) / 2
dz = 0
tzint = 1
f1 = (txint) * (txint)
f2 = (txint) * (tyint)
f3 = 1
sumaf1 = sumaf1 + (f1 * dx)
sumaf2 = sumaf2 + (f2 * dy)
sumaf3 = sumaf3 + (f3 * dz)
t = t + h
Next
TextBox4.Text = sumaf1 + sumaf2 + sumaf3
TextBox5.Text = Abs((11 / 15) - (sumaf1 + sumaf2 + sumaf3))
End Select
End Sub
Private Sub TextBox5_Change()
End Sub
```

```
Private Sub TextBox6_Change()
Dim opcion As Integer
opcion = Val(TextBox6.Text)

Select Case opcion

Case 1
Label8.Visible = False
Label6.Visible = True
Label7.Visible = True

Case 2
Label8.Visible = False
Label6.Visible = True
Label7.Visible = True

Case 3
Label7.Visible = False
Label6.Visible = True
Label8.Visible = True
End Select
End Sub
```