

OBSTÁCULO GEOMÉTRICO DEL CONCEPTO DE LÍMITE, UNA EXPERIENCIA CON FRACTALES

DIANA MARCELA CAMARGO. diacamargo@hotmail.com
LAURA BUSTOS GUTIÉRREZ. xlaurita@hotmail.com
UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Resumen. El concepto de límite es difícil de enseñar y aprender, dado que trae consigo diversos obstáculos que deben ser superados en su totalidad para aprender dicho concepto; por lo tanto crear actividades que permitan su comprensión contribuirá significativamente a facilitar este proceso (enseñanza- aprendizaje). De esta manera se proponen cuatro actividades que parten de la construcción del fractal “árbol pitagórico”; dicho fractal aporta al tratamiento del obstáculo geométrico del concepto de límite. Este obstáculo surge a través de la evolución del concepto de límite y es precisamente de la historia de donde surgen las actividades que se aplican a estudiantes de grado undécimo en entornos virtuales y presenciales, mediadas por el trabajo colaborativo.

Palabras clave. Obstáculo geométrico, fractales, evolución histórica, límite.

1. CONTEXTUALIZACIÓN.

A través de la historia se evidencian dificultades y obstáculos que surgieron en la construcción del concepto de límite; dichas dificultades aún se evidencian en muchos estudiantes. Es así, como Sierpinski (1990) menciona que conocer dichas dificultades, junto con las creencias que tienen los estudiantes sobre el límite, es una herramienta eficaz para su enseñanza.

De esta manera, en éste artículo se hace necesario mencionar la caracterización del obstáculo geométrico del concepto de límite, el cual parte de un contexto geométrico reflejado en la evolución histórica del obstáculo. Dicha evolución se ve reflejada en el diseño de actividades que se llevaron a cabo en grado undécimo. Se opta por el empleo de fractales (árbol pitagórico), pues se considera que se encuentran dentro de un contexto geométrico, ya que surgen de la repetición de un proceso geométrico elemental infinito. En este sentido, el objeto de estudio de esta investigación, parte de una concepción geométrica, en la cual, el límite se aplica a magnitudes y no a números. Esta concepción ha venido siendo desplazada por una concepción geométrico-gráfica; entiéndase esta última como aquella representación gráfica, empleada para el cálculo de límites. (Sánchez, 1997, Citado en Blázquez, 1999)

Para el tratamiento del obstáculo geométrico del concepto de límite, es necesario retomar aspectos que tiene que ver con la disposición del aula (tanto presencial como virtual) donde se brinde un ambiente caracterizado por promover una interacción del estudiante con las actividades

que se proponen. Cornu, (1991, citado en Blázquez, 1999, p. 42) observa que “No basta con presentar una exposición clara del concepto a los alumnos para que éstos lo adquieran” defiende, sin embargo, “la elaboración de actividades que les hagan darse cuenta de sus ideas espontáneas, imágenes, intuición, experiencias anteriores, etc.” de igual manera, defiende “la participación del estudiante en su proceso de abstracción y el uso del ordenador como herramienta para que el estudiante construya el concepto”.

De esta forma, un medio que facilita la interacción del estudiante con el concepto puesto en juego (obstáculo geométrico), es el computador. Es así, que con las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (TIC), se busca que tanto el profesor como el estudiante empleen herramientas, donde se dé un aprendizaje colaborativo, que integre entornos virtuales, con el fin de guiar al estudiante hacia un dominio autónomo del conocimiento matemático, donde debe asumir diferentes roles, que son fundamentales para la construcción del conocimiento; provocando así, que el estudiante tenga una motivación (compromiso tanto individual como grupal en cada sesión de clase) que lo conduzca al tratamiento de dicho obstáculo. De esta manera, se presenta el trabajo colaborativo como estrategia en sesiones presenciales y virtuales.

2. REFERENTES TEÓRICO-PRÁCTICOS BÁSICOS.

El concepto de límite trae consigo obstáculos epistemológicos; sin embargo, para que el estudiante logre adquirir en su totalidad el concepto, es necesario que supere todos ellos; tarea que no es fácil, ya que demanda un arduo trabajo, de esta manera en esta investigación sólo se hace énfasis en el obstáculo epistemológico geométrico; el cual se fundamenta en las representaciones y aproximaciones gráficas. Es importante mencionar que sólo se van a estudiar cuatro matemáticos que se vieron involucrados con éste obstáculo; a partir de ello se ha dividido la evolución histórica del obstáculo geométrico en tres etapas:

Etapas 1: Eudoxo de Cnido (408-355 a. C.). Se desenvuelve en una época donde se realizaban procesos geométricos. Uno de los problemas de Eudoxo, es el hecho que algunos segmentos no se podían medir con exactitud como la hipotenusa de un triángulo isósceles; en este orden de ideas, con la construcción del árbol pitagórico, se busca que el estudiante empiece a encontrar relaciones entre magnitudes y no a realizar cálculos numéricos, pues el objetivo es llegar a deducciones intuitivas a través de la construcción con regla rústica y compás.

Etapa 2: Arquímedes (287-221 a. C.) y Cavalieri (1598-1647). Se unifican en esta etapa las concepciones de éstos dos grandes matemáticos dado que acuden a la intuición geométrica y al uso de resultados cuantitativos en procesos geométricos; sin embargo, sus métodos se diferencian en la rigurosidad. Utilizan métodos infinitesimales intuitivos para resolver problemas de área, aproximaciones sucesivas, procesos geométricos infinitos y comparación de áreas, lo que le permiten aproximarse a la noción de límite de manera intuitiva; en este sentido, se busca que los estudiantes realicen cálculos numéricos (hallar áreas) a partir de la construcción geométrica del árbol pitagórico.

Etapa 3: Wallis (1616-1703). Esta se propone como la etapa final del obstáculo geométrico puesto que es Wallis quien hace la transición de la concepción geométrica a la aritmética. Su concepción es geométrica, pues aplica métodos geométricos que lo conducen a expresiones aritméticas, principalmente series infinitas que le permiten el estudio de algunos límites; de esta manera, logró aritmetizar la geometría de los indivisibles de Cavalieri. En este sentido, se busca que el estudiante empiece a generalizar cálculos aritméticos y algebraicos encontrados a partir de las construcciones geométricas, acercando al estudiante a una noción primitiva de límite.

El obstáculo geométrico del concepto de límite. Los estudiantes pueden valerse de representaciones geométricas, siempre y cuando éstas sean concretas (se pueden construir con regla y compas) por ejemplo dibujan polígonos y hallan áreas; pero cuando deben hallar áreas infinitamente pequeñas o infinitamente grandes; es decir, el hecho de pasar de algo concreto a algo abstracto en el contexto geométrico hace que el conocimiento anterior se convierta en un obstáculo para adquirir un nuevo conocimiento; pues, los estudiantes se pueden quedar en la representación geométrica dejando de un lado lo numérico.

Trabajo colaborativo y uso de medios informáticos en la educación. El aprendizaje en colaboración, en tanto hecho pedagógico, se sostiene en la interacción (presencial - online) entre pares. Cada uno de los integrantes del grupo aporta a éste conocimientos, experiencias, estilos y modos de aprender. Es un aprendizaje que redimensiona lo social, lo que implica producir con otros un itinerario y un producto común. Esto lleva a considerar nuevas alternativas y re- elaborar conceptos y prácticas, y es entonces cuando la interacción entre pares resulta genuinamente

significativa y se torna relevante para resolver problemáticas que supongan el descubrimiento y apropiación de conocimientos en un proceso común. (Rotstein, et al., 2006 p. 38)

3. DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA EXPERIENCIA DE AULA.

Las actividades fueron aplicadas en un curso de undécimo grado (36 estudiantes) con ocho sesiones de clase, distribuidas en cuatro sesiones virtuales y cuatro presenciales. Las actividades que se diseñan están apoyadas en la historia, puesto que es de la historia donde surgen los obstáculos epistemológicos. En esta medida, cada actividad tiene una estrecha relación con la evolución histórica del obstáculo geométrico:

ACTIVIDAD	OBJETIVO GENERAL	CONEXIÓN HISTÓRICA
Nº1: “En busca de estrategias de trabajo colaborativo”	Implementar una actividad introductoria en la que se dejen estipulados: acuerdos y roles, así como la interacción entre el medio (aula de clase y plataforma Moodle), el profesor y el grupo de trabajo colaborativo.	-----
Nº2: “La discusión, pensando y hablando matemáticamente”	Cuestionar las ideas sobre infinito que tienen los estudiantes de undécimo grado, a través de un ambiente colaborativo y participativo por medio de la construcción con regla y compas del fractal árbol pitagórico.	Eudoxo de Cnido.
Nº3: “Inicios de aritmetización”	Posibilitar la interacción y las estrategias grupales, para que los estudiantes encuentren el área de una o varias iteraciones utilizando un esquema o tabla donde se evidencie la relación entre ellas.	Arquímedes y Cavalieri.
Nº4: “De lo geométrico a lo numérico”	Realizar aproximaciones numéricas partiendo de la relación obtenida en las iteraciones, permitiendo que se llegue a la noción de límite a través del tratamiento geométrico que se ha dado en los grupos de trabajo colaborativo.	Wallis.

Las clases presenciales se realizaron dentro de las horas curriculares, mientras las clases virtuales se ejecutaron en horas extracurriculares, donde los estudiantes podían ingresar a la plataforma tecnológica (Moodle) en cualquier horario; así mismo podían realizar foros de discusión y dejar allí sus comentarios, inquietudes y demás.

4. LOGROS Y DIFICULTADES EVIDENCIADAS.

A partir del trabajo desarrollado se cumplieron los objetivos de las actividades propuestas, ya que con el proceso llevado a cabo por los estudiantes de grado undécimo se evidenciaron avances procedimentales y conceptuales en el tratamiento del obstáculo geométrico del concepto de límite.

Por lo anterior se puede inferir que la historia es una excelente herramienta didáctica al igual que el uso de fractales en el tratamiento del obstáculo geométrico pues a través los fractales, se vio reflejada la evolución histórica del obstáculo. Además, el uso del computador facilitó el acceso a la noción del límite a través de los fractales, pues softwares como Geogebra permitieron manipular un objeto tan abstracto como “el límite”.

En cuanto a la disposición del aula, se puede decir que no todos los grupos son grupos de trabajo colaborativo, si bien hay estudiantes que se dedican a otras actividades que no hacen parte de la clase, hay estudiantes “pasivos” que no participan en el grupo y estudiantes “distractores” que llevan al grupo hacia la dispersión.

5. REFLEXIÓN FINAL.

El trabajo colaborativo no disminuye la carga académica del profesor, por el contrario la aumenta; pues bien, al implementar estrategias de trabajo colaborativo en el aula, el profesor debe estar más activo, debe pasar varias veces por cada grupo cuyo proceso es diferente, debe identificar el proceso de cada grupo (puede haber grupos más avanzados que otros o viceversa) para así poder guiarlos y lanzar preguntas adecuadas que les permitan avanzar.

En las sesiones virtuales, a diferencia de las sesiones presenciales, existen más variables que se deben tener en cuenta como: la autonomía, la conectividad, acceso al medio, uso de herramientas virtuales, entre otras; que en el proceso educativo recaen sobre el docente, de esta manera se puede inferir que una sesión virtual solo funciona como apoyo a una sesión presencial pero no a tal punto de reemplazarla.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Blázquez María Sonsoles (1999): Noción de límite en matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid, España.

Medina, A. C. (2001): Concepciones del concepto de límite en estudiantes universitarios. Tesis de Maestría en Docencia de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Rotstein, Berta. Sáinz, Carmen. Otros (2006): El trabajo colaborativo en entornos virtuales de aprendizaje. Relato de una experiencia. “configuración y consolidación de un grupo de trabajo”. Revista cognición. Numero 7. Septiembre-octubre. Págs. 38- 45

Sierpinska, A. (1990): Someremarks on understanding in mathematics. For the Learning of Mathematics, Vol.10.3, pp. 24-36.