La noción de infinito en George Cantor. Un estudio histórico-epistemológico en la perspectiva de la educación matemática.

Mónica Andrea Aponte Marín.
moniapo68@gmail.com.
Universidad del Valle- Cali- Colombia.

Tema: Relaciones entre Historia de la Matemática e Investigación en Educación Matemática.
Modalidad: CB.
Nivel educativo: Terciario Universitario.
Palabras claves: Infinito, Teoría de Conjuntos, Axioma de Elección, Educación Matemática.

Resumen
En el presente escrito muestra adelantos del trabajo de grado de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad del Valle, en el cual se intenta caracterizar a partir de estudios históricos epistemológicos detallados, los procesos de consolidación del infinito matemático en el marco de la construcción de una teoría axiomática de conjuntos infinitos. De manera que se pueda establecer una comparación del desarrollo axiomático de esta teoría, desde el nacimiento del infinito matemático con el surgimiento de propuestas académicas en cursos de teoría de conjuntos de los programas de licenciatura de la Universidad del Valle, para intentar aportar reflexiones en cuanto a la fundamentación del desarrollo del pensamiento matemático avanzado. En este sentido se pretende, propiciar algunas innovaciones curriculares en los programas de teoría de Conjuntos, en pos de una mejora de la enseñanza de la Teoría de Conjuntos, de futuros Licenciados en Educación Matemática, bajo el análisis histórico de la noción de infinito cantoriano.

1 Presentación del Problema

La exploración de la historia por parte del docente contribuye a descubrir obstáculos y dificultades que se han presentado en las matemáticas, en ese sentido existe una necesidad de recuperar la historia de los objetos matemáticos, para favorecer una mirada distinta del aspecto dogmático, infalible e incuestionable con el que se suele caracterizar a las matemáticas, por ende la historia debe concebirse como una perspectiva modeladora del quehacer matemático y no sólo como algo anecdótico. (Freudenthal, 1973), señalaba que aprender matemáticas significa “re-inventarla”. La historia permite una profundización de lo que se enseña y aprende, así quien reflexiona sobre el desarrollo de la matemática debe necesariamente plantearse el problema de la historia de los conceptos, esto lo podemos sustentar desde Kant, quien afirmaba que la filosofía sin historia es *vacía*, y la historia sin filosofía es ciega. En este sentido, es pertinente indagar sobre el origen histórico, controversial y polémico del infinito cantoriano, como fruto de un trabajo colectivo y creación humana donde hay intrigas, tensiones y distenciones.

Es pertinente estudiar la manera como Cantor generalizó la teoría de conjuntos, pues esta se desarrolla bajo la idea que los conjuntos son colecciones infinitas que pueden ser contadas, modificando así nuestras concepciones acerca del infinito, y permitiendo el surgimiento de paradojas, que condujeron al desarrollo de varios sistemas formales de axiomas, entre los cuales se encuentran los axiomas de elección y de reemplazo, como búsqueda de la consistencia de la teoría. Ahora bien, podemos planearnos cuestiones sobre si es posible que sean estos axiomas los que permitan comprender el infinito cantoriano, y con ello validar el estudio de una teoría de conjuntos, además cómo puede afectar el no estudio de estos dentro de un curso de teoría de conjuntos.

Así, el siguiente trabajo pretende mostrar los adelantos del trabajo de investigación de la maestría en Educación Matemática de la Universidad del Valle, el cual se sustenta desde el siguiente interrogante: *¿Analizar cómo se aborda la noción de conjuntos infinitos, en los cursos de Teoría de Conjuntos del Instituto de Educación y Pedagogía, de la Universidad del Valle?* Y en este sentido *¿Indagar cuál es la importancia que esta tiene en el desarrollo del pensamiento matemático para un futuro licenciado?*

2 Marco Teórico

A lo largo de la historia el concepto de *infinito* se presenta como misterioso y perturbador dentro de las matemáticas, podemos decir que desde nuestra cotidianidad este expresa significados diversos en nuestra consciencia, que en la mayoría de los casos suelen diferir de los específicamente matemáticos. Y pese a la falta de sustento empírico para la noción de infinito, su existencia no se discute en virtud de que en la actualidad ella posee una estructura formal que la respalda, la cual ha sido fruto de un largo proceso de evolución histórica y filosófica.

Parece claro que desde sus orígenes el debate sobre la naturaleza del infinito tomó connotaciones teológicas más que matemáticas, al considerarse el infinito como propiedad de carácter divino. Se puede decir que solo hasta Bernhard Bolzano en el siglo XIX se logran dar las bases para la construcción de la teoría de conjuntos, lo que induce a un tratamiento para la formalización de la noción de infinito actual, sin embargo no hay que olvidar a otros filósofos y científicos, anteriores a Bolzano, que en sus trabajos encontraron situaciones paradójicas en torno a la noción de infinito, entre ellos Galileo en sus discursos y demostraciones matemáticas sobre dos ciencias nuevas. Obra en la cual pone en tela de juicio los adjetivos "más grande", "más pequeño", o "igual", en relación a las magnitudes infinitas; pues en el diálogo entre Simplício y Salvácio, Galileo concluye que al comparar "conjuntos infinitos" (como el de los números cuadrados y sus raíces [naturales]), se llega a que "la totalidad de los cuadrados no es menor a la totalidad de los números, ni superior a estos". Aspecto que, para Galileo, al igual que en el análisis de Bolzano, resulta paradójico.

Se tiene entonces que Bolzano en su obra las *paradojas del infinito,* defendió la existencia de un infinito actual y enfatizó que el concepto de equivalencia entre dos conjuntos era aplicable tanto a conjuntos finitos como infinitos. Él aceptó como algo normal que los conjuntos infinitos fueran equivalentes a una parte de ellos mismos. Esta definición de conjuntos infinitos: *Un conjunto es infinito si se puede poner en correspondencia biunívoca con un subconjunto propio*, fue utilizada posteriormente por Cantor y Dedekind, cabe resaltar que la autoría de la definición también es un hecho históricamente controversial. Fue enunciada explícitamente por Dedekind, pero Cantor se reclama el hecho por cuanto considera que ya aparece de manera implícita en sus artículos (Recalde ,2005, p. 1).

Hacia la segunda mitad del siglo XIX, Georg Cantor, se apoya en los trabajos de Bolzano, para buscar aclaraciones acerca del infinito actual, sobre la manera en que se constituye el universo de los conjuntos infinitos, aclaraciones acerca de lo que es el continuo; pues uno de los objetivos de su obra era demostrar que no había ninguna razón para aceptar las viejas ideas en contra del infinito actual, dado que si los conjuntos infinitos se comportaban de manera diferente a los conjuntos finitos no significa que estos sean inconsistentes, sino que obedecen a una aritmética diferente; además pensaba que sin ellos era imposible entender una realidad física, surgiendo así la necesidad de sustentar matemáticamente la noción de infinito.

A partir de los estudios realizados por Cantor, podríamos inferir que el acta de nacimiento de la teoría de conjuntos transfinitos lleva la fecha del 7 de diciembre de 1873 [Fer06, p. 12], cuando él logra demostrar, en una carta a Dedekind, uno de los resultados más importantes de su trabajo: que el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales no puede ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto $\mathbb{N}$ de los naturales, $\mathbb{R}$ es un conjunto no-numerable. Poco después Cantor logra la demostración de este teorema, dada una sucesión cualquiera de números reales del intervalo (0,1), demuestra la existencia de números reales no contenidos en dicha sucesión, pues si $\mathbb{R}$ fuera numerable, existiría una sucesión que contuviera a todos los números de [0,1], lo cual negaría el resultado anterior Ferreirós (1991, p. 211).

También se debe tener en cuenta que uno de los problemas centrales de la teoría de Cantor era demostrar que la potencia de cualquier conjunto tenía que ser un *aleph*. Para ello no era suficiente la definición incorporada en primera instancia por él. Así pues, en el desarrollo inicial de la teoría de conjuntos, Cantor no trabajó explícitamente a partir de axiomas, a pesar que el análisis de sus demostraciones indica que casi todos los teoremas demostrados por él pueden derivarse de tres axiomas: (i) el axioma de extensionalidad (ii) el axioma de abstracción; (iii) el axioma de escogencia.

3 **Metodología**

En el aspecto metodológico que se llevará a cabo en este trabajo se tienen en cuenta las metodologías trabajadas en la Historia de la Matemática, en este sentido se propone un análisis histórico- epistemológico con la finalidad de dar cuenta sobre la manera como se constituye el concepto de infinito matemático en Cantor, buscando aclarar algunos procesos que condujeron a que el infinito se convirtiera en un objeto matemático y en este sentido como este se puede volver en un objeto de enseñanza a través de cursos de matemática superior, como los cursos de Teoría de Conjuntos. De esta manera, se realizará un recorrido teórico tomando como referente especial las obras de Dauben, Ferreirós y Cantor, para determinar los fundamentos matemáticos necesarios en el surgimiento del concepto, a partir de los resultados de estos análisis se estudiaran algunos de los programas de Teoría de Conjuntos, propuestos en el Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, para los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, esto con el fin de poder caracterizar si existe una estructura formal de acuerdo a la Teoría de Conjuntos cantoriana para abordar o intentar desarrollar procesos de pensamiento matemático avanzado a partir de este concepto.

4 Consideraciones Finales

Considerando que la enseñanza de un objeto matemático es más significativa, si se tienen en cuenta los procesos y dificultades en la construcción y formalización de un conocimiento en torno a este objeto, y no solamente sus productos o resultados, se evidencia que es posible a través de los procesos de caracterización histórica-epistemológica de la noción de infinito matemático, realizar análisis que generan reflexiones educativas y cognitivas dentro de los procesos socio-culturales en los que se encuentran tanto docente como estudiantes.

No debemos olvidar que la Teoría de Conjuntos en realidad es teoría en la medida que se consideran los conjuntos infinitos. Así pues, pasar por alto una reflexión sobre el infinito en este curso constituiría un despropósito con el mismo espíritu de la teoría. Se justifica que el análisis de este objeto en los programas de Teoría de Conjuntos del IEP, puede propender en una reforma de los mismos, en pos de una mejora de enseñanza de estos cursos para los futuros licenciados.

Finalmente, la importancia de este tipo de estudios en historia de la matemática contribuye en la práctica educativa, en la medida que proporciona reflexiones hacia la exploración de un desarrollo adecuado del pensamiento matemático, dentro de cursos de educación superior, buscado favorecer en cierta medida la adquisición de conceptos matemáticos abstractos como el infinito y que suele generalmente ser en muchas ocasiones, mal interpretado y trabajado en el aula de clase. De este modo, este trabajo pretende ser el punto de partida, para un estudio adecuado de las temáticas abordadas en cursos fundamentales dentro del proceso de formación profesional de un Licenciado en Matemáticas, constituyéndose así en un punto de reflexión para el campo de la Historia y la Educación Matemática en nuestro país. Pues no se debe ignorar, que la Educación Matemática es un proceso sistémico, una actividad científica e intelectual de carácter explicativo, que conecta la teoría, su desarrollo y la práctica, conduciendo así a la clarificación de algunos aspectos fundamentales para nuestra reflexión como el aprendizaje de las cantidades infinitamente grandes de Cantor.

5 Referencias Bibliográficas

Cantor, G. (1895). *Fundamentos de una teoría general de las multiplicidades: una investigación matemático filosófica en la teoría del infinito*. Traducción y comentarios: Bares J y Climent J, 1983.

Cantor, G. (1895): *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.* pp. 207-246.

Cantor, G. (1897): *Mathematische Annalen.* vol ***46*** pp. 481-512, **49** (1897), pp. 207-246.

Dauben, J. (1990): *His mathematics and philosophy of the infinite*. Princeton University Press.

D´amore B, (1996): *El infinito: historia de conflictos y sorpresas*. En. Épsilon (España), 36, pp. 341-366

Ferreiros, J. (1991*): El nacimiento de la teoría de Conjuntos, 1854-1908*. En: Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid.

Ferreiros, J. (2006): *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta. Traducción comentada e introducción de José Ferreirós*. En: Editorial Crítica, Barcelona.

Montoro, V. & Scheuer, N. (2003): *Pensando el infinito. Concepciones de estudiantes universitarios*. En: Publicaciones de la Universidad Nacional de Comahue, Argentina.

Recalde, L. (2005): *Notas del curso de historia de las matemáticas*. Universidad del Valle, Cali-Colombia.

Tall, D, & Tirosh D. (2001): *Infinity- the never- ending straggle*. En: Educational Studies in mathematics studies 48 (2 y 3), pp. 129-136