CB-431

DE LOS REALES A LOS COMPLEJOS, SOLO HAY UN PEQUEÑO PASO

Marisol Radillo Enríquez – Vladimir Efremov – Juan Martín Casillas González
marisol.renriquez@academicos.udg.mx – vefremov3@yandex.ru –
martin.casillas70@gmail.com
Universidad de Guadalajara, México

Modalidad: CB
Nivel educativo: Universitario
Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas
Palabras clave: plano complejo, proyección estereográfica

Resumen

En nuestra experiencia, los estudiantes universitarios que comienzan el estudio de Análisis Complejo se enfrentan a algunas dificultades relacionadas con el concepto del infinito, mismas que pueden evitarse si se añaden unos cuantos conceptos a los cursos básicos que incluyen números reales y complejos. En este trabajo se presenta a los profesores de nivel medio y del primer año universitario, analizar las sutiles diferencias con las que el infinito es abordado tanto en el campo de los números reales como en los números complejos. Nuestra propuesta consiste en desarrollar el concepto del punto al infinito para el plano complejo en términos de la proyección estereográfica y compararlo con el concepto de puntos al infinito en la recta real, con apoyo de la computadora. Las demostraciones formales se dejan para cursos avanzados, en su lugar proponemos actividades de visualización que permitan a los estudiantes entender estos conceptos básicos. Se espera que con estas actividades, los estudiantes de cursos matemáticos elementales tengan un panorama más amplio de las matemáticas avanzadas.

Introducción

Los números complejos se abordan brevemente en los primeros cursos universitarios, como preámbulo a los cursos de Precálculo o Álgebra, para continuar con materias tales como Cálculo Diferencial e Integral. Aunque estos cursos son obligatorios en las todas carreras universitarias del área de Ciencias Exactas e Ingenierías, son menos frecuentes los cursos de Análisis Real y Análisis Complejo, que se restringen a las carreras de Física, Matemáticas y algunas Ingenierías. No obstante, es interesante analizar las sutiles diferencias con las que el infinito es abordado en los cursos mencionados, con la intención de ampliar el conocimiento matemático de los alumnos, y que ellos desarrollen el pensamiento matemático que se

ISBN 978-84-945722-3-4

requiere en las diversas carreras del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara, México.

Los primeros cursos de matemáticas en el CUCEI se enfocan en el campo de los números reales, pero incluyen una rápida “ojeada” a los números complejos. Se comienza con la necesidad de ampliar los números reales, se abordan sus formas de representación (binomial, trigonométrica y exponencial) y las operaciones básicas entre los números complejos (adición, sustracción, multiplicación, potencias, raíces). Después de esto, se abordan ramas de las matemáticas en las que solamente se manejan números reales, tales como Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo Vectorial, Álgebra Lineal, Análisis Numérico, Análisis Real, etc. Una vez concluidos estos cursos, en algunas carreras se ha incluido el estudio de la variable compleja. A su vez, el curso de Análisis Complejo, comienza desde los mismos temas con que se concluyó, un año antes, el estudio de los números complejos; en este nivel, los estudiantes son capaces de demostrar teoremas y propiedades de los números complejos.

Por otra parte, la proyección estereográfica, entendida como la transferencia de un elemento (punto) desde una esfera a un plano, o viceversa, es un ejemplo clásico de transformaciones, cuyas aplicaciones más comunes se encuentran en la topografía, la cartografía y la geología. En el ámbito matemático este procedimiento se discute en los cursos de geometría diferencial y representa un área de oportunidad valiosa, ya que atiende:

- la transformación entre espacios,
- la diferenciabilidad de estas transformaciones
- los límites de estas transformaciones
- los elementos geométricos y analíticos que se involucran.

Estas características no solo atienden a funciones de variable real, sino que aparecen en otros cursos, tales como el de variable compleja, donde pueden discutirse temas como el límite de una función compleja cuando su argumento tiende al infinito, y el límite al infinito de una función compleja.

Nuestra propuesta consiste en añadir al primer curso en el que se abordan los números complejos (Precálculo o Álgebra, según la carrera de que se trate), los conceptos de “punto al infinito”, “recta real extendida”, “plano complejo extendido”, “recta real proyectivamente extendida” y homemomorfismo, para lo cual es necesaria la proyección estereográfica. Para

ISBN 978-84-945722-3-4

facilitar el aprendizaje, dado que está dirigido a estudiantes de primer ingreso, hemos diseñado unas sencillas actividades mediadas por computadora, con el fin de que los estudiantes visualicen las relaciones entre conceptos.

En este trabajo no se pretende profundizar en el concepto del infinito, sino proponer una reflexión sobre posibles detalles que generan confusión en los estudiantes que transitan del Análisis Real al Análisis Complejo.

En la primera parte de este documento, dirigido a profesores de enseñanza media o de los primeros cursos del nivel superior, abordaremos los conceptos básicos involucrados en este trabajo, tales como el límite al infinito de una sucesión en el plano complejo, las igualdades básicas que involucran al infinito y las expresiones que carecen de sentido por llevar a incertidumbres.

En la segunda parte se abordan la proyección estereográfica y su visión geométrica, la cual involucra la noción de homeomorfismo. Aquí se incluyen algunos temas vinculados con el infinito y la proyección estereográfica, que se abordan en los cursos de Análisis Real. Aunque estos temas requieren diversas demostraciones en los cursos de Análisis Complejo, nuestra propuesta es abordarlos a un nivel acorde al programa de estudios del primer año universitario.

Finalmente, describimos unas actividades mediadas por computadora, para que el estudiante tenga la oportunidad de manipular los objetos matemáticos involucrados y así, construya activamente el significado del punto infinito y la proyección estereográfica.

Conceptos básicos

La propiedad de orden de los números reales establece que, si a y b son números reales diferentes, entonces $a < b$ ó $b < a$. Los números complejos carecen de esta propiedad de orden, ya que no es posible determinar, por ejemplo, si $3 + i5$ es mayor o menor que $5 + i3$, aunque sí existe una propiedad de orden parcial, si nos referimos al módulo de dichos números complejos.

Al comenzar el estudio del Análisis Complejo, se dice que la **recta real extendida** $\widehat{\mathbb{R}}$ debe contener dos **puntos al infinito** $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, para conservar dicha propiedad de orden. También se dice que el plano complejo extendido $(\overline{\mathbb{C}})$ naturalmente contiene solo un

ISBN 978-84-945722-3-4

punto infinito $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, que aparece como el "polo norte" en la esfera de Riemann S^2, como resultado de la proyección estereográfica.

Sin embargo, si estamos dispuestos a sacrificar el orden completo del eje real, podemos aplicar el análogo uno-dimensional de la proyección estereográfica y obtener la recta **real proyectivamente extendida** $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ que es topológicamente equivalente, es decir **homeomorfa**, a una circunferencia unitaria S^1. A continuación, explicaremos la relación entre todas estas nociones.

El punto al infinito

El concepto del **punto al infinito** se utiliza para hablar inteligiblemente sobre límites infinitos (Marsden y Hoffman, 1999). Desde los primeros cursos universitarios, los estudiantes conocen el conjunto de los números complejos (finitos) $\mathbb{C}$, y que cualquier elemento de ese conjunto ($z \in \mathbb{C}$) puede representarse en coordenadas cartesianas como $z = x + iy$ (forma binomial o cartesiana), donde x es la parte real de z ($x = Re\, z$) e y es la parte imaginaria de z ($y = Im\, z$). El número i se llama unidad imaginaria y tiene la propiedad determinante $i^2 = -1$.

Se define el punto impropio ∞, que no pertenece al conjunto de los números complejos finitos mediante una sucesión que tiene límite al infinito. Por definición, una sucesión $\{z_n\}$ de números complejos finitos, tiene límite al infinito ($\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$), si para cualquier $\varepsilon > 0$ se encuentra un número natural $N(\varepsilon)$ tal que el módulo de z_n, es mayor que $\frac{1}{\varepsilon}$, siempre que $n > N(\varepsilon)$. Este límite es lo que denominamos **punto al infinito** (∞).

Nótese que para el punto al infinito no están definidas ni la parte real, ni la parte imaginaria. Para el módulo del infinito ∞ se usa el símbolo $+\infty$, esto es $|\infty| = +\infty$, el cual pertenece a la recta real extendida $\widehat{\mathbb{R}}$.

Para ciertos propósitos, es posible definir algunas operaciones entre ∞ y cualquier número complejo, mediante algunas "reglas" que tienen sentido en el contexto de límites (Zill y Shanahan, 2011; Markushevich, 1987):

1) $\infty \pm z = z \pm \infty = \infty$;

2) $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty, si\ z \neq 0$;

3) $z/\infty = 0$; $\infty/z = \infty$;

4) $z/0 = \infty, si\ z \neq 0$;

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

5) $\infty \cdot \infty = \infty$

Algunas operaciones carecen de sentido, tal es el caso de: $\infty \pm \infty, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, pues en estos casos, la aplicación de los límites nos lleva a incertidumbres.

En consecuencia, se puede definir el plano complejo extendido $\bar{\mathbb{C}}$ como la unión formal del plano complejo $\mathbb{C}$ y el punto al infinito.

Proyección estereográfica

La representación geométrica del plano extendido en el espacio (tridimensional), se obtiene por medio del procedimiento denominado proyección estereográfica. En dicha representación es posible demostrar (en cursos avanzados) que el plano complejo extendido es equivalente a una esfera unitaria bidimensional S^2, conocida como esfera de Riemann (figura 1).

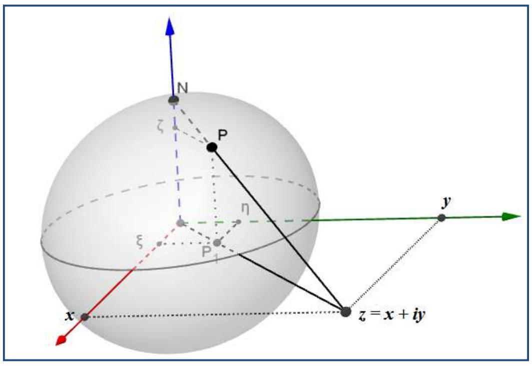

Figura 1. Esfera de Riemann y el plano complejo extendido

Para realizar la proyección estereográfica introducimos en un espacio euclidiano de tres dimensiones las coordenadas ξ, η, ζ, tales que los ejes ξ y η coinciden con el eje real (Re) y el eje imaginario (Im) en el plano complejo, respectivamente; el eje ζ es perpendicular al plano complejo y completa el espacio 3-dimensional. El plano complejo extendido se define por medio de la ecuación $\zeta = 0$. Luego se construye una esfera S^2, con radio 1 y centro en el inicio de coordenadas (figura 1), cuya ecuación es $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

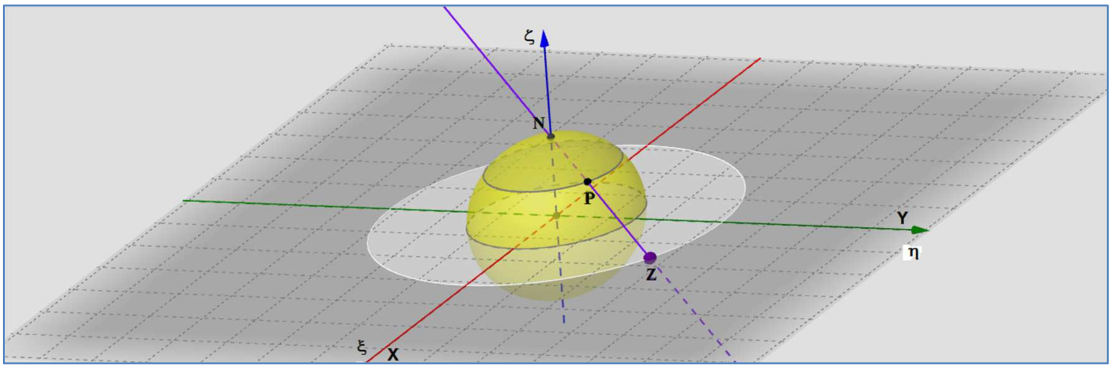

Figura 2. Proyección estereográfica entre la esfera S^2 y $\overline{\mathbb{C}}$.

Se construye una recta *r* que une al punto *z* del plano complejo con el punto $N(0,0,1)$, llamado polo norte de la esfera. A cada punto *z*, le corresponde un punto $P(\xi,\eta,\zeta)$ de intersección de la esfera S^2 con la recta *r*. Tal correspondencia $z \to P$ se llama proyección estereográfica.

Bajo la proyección estereográfica, tanto los círculos en $\mathbb{C}$ y las rectas en $\overline{\mathbb{C}}$, se transforman en círculos en S^2, y viceversa. De esta manera, es fácil identificar el significado geométrico del límite al infinito $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$, si se define una ε-vecindad del punto al infinito como el conjunto de puntos que están al exterior del círculo de radio $\frac{1}{\varepsilon}$ (Figura 2).

Comparación del concepto de puntos al infinito para el plano complejo y la recta real

Existe una fuerte diferencia entre la recta real $\mathbb{R}$ y el plano complejo $\mathbb{C}$. El conjunto de los números reales es completamente ordenado respecto a una relación "menor que", es decir para cualquier par de números reales diferentes, x_1 y x_2, siempre se cumple o $x_1 < x_2$ ó $x_2 < x_1$.

Para los números complejos existen solo órdenes parciales. El más natural de estos órdenes está conectado con las comparaciones de los módulos correspondientes, decimos que $z_1 \prec z_2$ si $|z_1| < |z_2|$. Este orden es compatible con la existencia del único punto infinito, que hemos definido por medio de la proyección estereográfica.

Para la recta real $\mathbb{R}$, existe un análogo de la proyección estereográfica: por el mismo procedimiento que en el caso $\mathbb{C}$, se obtiene la recta real proyectivamente extendida $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup$

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

$\{\infty\}$, la cual es homeomorfa a una circunferencia S^1(figura 3). El polo norte N corresponde al único punto al infinito. La recta real proyectivamente extendida $\overline{\mathbb{R}}$ pierde el orden completo que se tenía en la recta real ordinaria $\mathbb{R}$, ya que para cualquier par de números reales x_1y x_2 tales que $x_1 < x_2$, ahora debemos escribir $\infty < x_1 < x_2 < \infty$, que es una contradicción.

No obstante, existe la recta real extendida $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ que conserva el orden natural de la recta real $\mathbb{R}$. En este caso, la sucesión $-\infty < x_1 < x_2 < +\infty$ no es contradictoria. La recta $\widehat{\mathbb{R}}$ es homeomorfa a un segmento cerrado $[-1, +1]$. Aquí $+1$ corresponde a $+\infty$, -1 corresponde a $-\infty$.

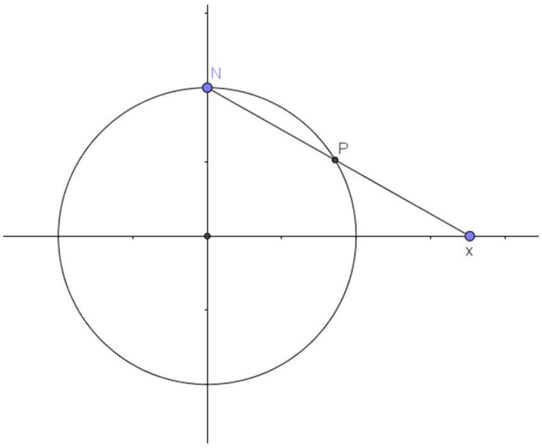

Figura 3. Análogo de la proyección estereográfica para el eje real.

Actividades mediadas por computadora

Nuestra propuesta incluye actividades de visualización, con apoyo del programa GeoGebra. Se guía al estudiante en la construcción de la representación geométrica de la proyección estereográfica de $\mathbb{R}$ en S^2, para que él mismo compruebe que $-\infty$ y $+\infty$ convergen en N.

Instrucciones.

1. Abrir GeoGebra con: vista algebraica, vista gráfica y vista gráfica 3D.
2. En la gráfica 3D, renombrar los ejes X como Re e Y como Im, para asociar el plano complejo con la gráfica 2D.
3. En vista gráfica 3D, crear una esfera con centro en el punto (0,0,0) y radio 1. Enseguida, quitar graduaciones y números de los tres ejes y mostrar la cuadrícula en el plano complejo.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

4. Renombrar el punto $A(0,0,0)$, centro de la esfera, como O y añadir el polo norte $N(0,0,1)$
.
5. En Vista gráfica 2D, colocar un punto Z sobre el eje X. En vista gráfica 3D, también aparece el punto Z; trazar el segmento $\overline{ZN}$ y solicitar sus intersecciones con la esfera. De manera automática, se asignan los nombres B y C. Ocultar el punto que coincide con N y renombrar el otro como P (ver figura 4).
6. En vista gráfica 2D, pedir animación del Z, y observar el desplazamiento de P en vista gráfica 3D. También es posible pedir la rotación de la gráfica 3D mientras se observa la animación de Z en el eje real.

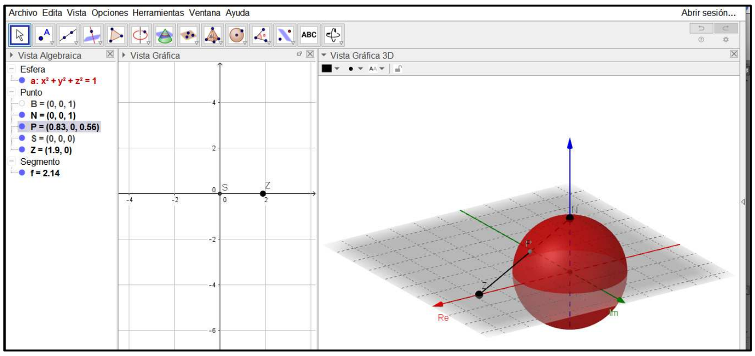

Figura 4. Proyección estereográfica de $\mathbb{R}$ en S^2, $-\infty$ y ∞ convergen en N

Se observa que al desplazarse el punto Z hacia $-\infty$ o $+\infty$ en el eje real (Vista gráfica 2D), la proyección de Z en la esfera, es decir, el punto P, se aproxima al polo norte (Vista gráfica 3D). Esto significa que en el complejo extendido existe un solo punto infinito.

Consideraciones finales.

En nuestro trabajo hemos abordado los conceptos básicos de la proyección estereográfica, con la finalidad de mostrar a profesores y estudiantes del nivel medio superior (o secundario) la relación entre los contenidos de cursos básicos de matemáticas, con el inicio del Análisis Complejo. Nuestra intención es que los estudiantes de bachillerato o ESO, vislumbren el enorme y fascinante campo de los números complejos, al mismo tiempo que se enriquece su proceso de aprendizaje.
Si bien solo describimos aquí solo una actividad mediada por la computadora, por razones de espacio, esperamos que al lector le sea posible construir todas las figuras incluidas en este

ISBN 978-84-945722-3-4

documento, para implementar más actividades de aprendizaje relacionadas con el campo de los números complejos y la proyección estereográfica.

Referencias bibliográficas

Marsden, J. E., Hoffman, M. J. (1999). *Análisis básico de variable compleja*. México: Editorial Trillas.

Markushevich, A. (1987). *Teoría de las funciones analíticas*. Vol 1. Moscú: Editorial Mir.

Zill, D., G., Shanahan, P. D. (2011). *Introducción al análisis complejo con aplicaciones*. México: Cengage Learning.

ISBN 978-84-945722-3-4