

## UNA INTRODUCCION INSTRUMENTADA A LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Francisco Javier Cortés González  
[fjaviercg65@yahoo.com.mx](mailto:fjaviercg65@yahoo.com.mx)  
CINVESTAV México

Tema: TIC y Matemática

Modalidad: Comunicación Breve

Nivel educativo: Terciario - Universitario

Palabras clave: Teoría instrumentalista, ambiente CAS, esquema de acción instrumentada, técnica instrumentada.

### Resumen

*Nuestra investigación considera la exigencia a los estudiantes de ingeniería en comunicaciones y electrónica de dominar la Transformada de Laplace. Desde un enfoque instrumental, en un ambiente CAS está orientada hacia el desarrollo de esquemas de acción instrumentada surgidos en la génesis instrumental. El ambiente CAS que la soporta es el software Derive. Las tareas involucran conceptos relacionados con la integración impropia y el uso del parámetro, tienen como objetivo identificar la relación funcional que se ajusta a la gráfica de los puntos definidos por los valores del parámetro y el valor de la integral impropia convergente. En una experiencia con estudiantes de cursos iniciales de ingeniería, consistente en una etapa de entrenamiento y en otra donde se realizan tareas diseñadas con un esquema de acción instrumentada establecido a priori, observamos que desarrollan esquemas de uso para cada uno de los comandos involucrados; muestran deficiencia en la identificación del parámetro como número real para aprovechar la potencialidad del comando “vector”; evalúan las integrales impropias aunque tienen dificultad en enunciar cuando estas son convergentes; utilizan de manera hábil y entrenada el comando “vector” para identificar el tramo de función que corresponde a la Transformada de Laplace de una función.*

### Introducción

En la ingeniería en comunicaciones y electrónica resulta importante el análisis de las señales, una herramienta utilizada para tal efecto es la transformación integral matemática conocida como Transformada de Laplace (TL), esta transformación nos ayuda a resolver sistemas complejos transformándolos en ecuaciones algebraicas sencillas, por ejemplo en lugar de utilizar una ecuación diferencial, mediante la TL convertimos dicha ecuación diferencial en un polinomio, que resulta ser de menor dificultad resolutive.

La TL de una función que depende del parámetro  $t$  es presentada por los profesores con la definición siguiente:

“Dada una función  $f(t)$  definida para  $t \geq 0$ , la Transformada de Laplace de la función  $f(t)$  es la función  $F(s)$  definida por la integral:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Siempre y cuando la integral sea convergente.”

Esta definición obedece a la manera en que se presenta en los libros de texto utilizados por los profesores; tales libros de texto plantean la enseñanza de la TL de manera muy uniforme. A partir de la definición se calcula una tabla de transformadas de algunas funciones, posteriormente se estudian sus propiedades y las condiciones de existencia. Se implementan algoritmos algebraicos para calcular la TL inversa usando técnicas de fracciones parciales, el teorema de convolución y el método de Heaviside. Finalmente, se aplica todo lo anterior a la resolución de algunas ecuaciones diferenciales lineales con condiciones iniciales (Spiegel, 1981; Edwards y Penney, 2001).

El objetivo de nuestra investigación es mostrar que si los estudiantes tienen habilidades en el uso del parámetro y dominan el concepto de integración impropia, un acercamiento basado en un entrenamiento y la realización de tareas en un ambiente CAS promueven en el estudiante el concepto de transformación integral de una función, a partir de un proceso constructivo que permite identificar la función transformada en su representación gráfica. El ambiente CAS que soporta nuestra investigación es el software Derive versión 6.1.

### **Marco Teórico**

La investigación está sustentada por el marco teórico de la teoría instrumentalista en la línea de la ergonomía cognitiva (Verillon y Rabardel 1995), en esta línea esencialmente se distingue un artefacto de un instrumento, es el instrumento el que un sujeto construye con el artefacto. Trouche (2005) argumenta que esta construcción, llamada génesis instrumental, es un proceso complejo y está ligado a las características del artefacto (sus potencialidades y restricciones), a la actividad del sujeto, a sus conocimientos y a su forma de trabajar.

Trouche (2005) apunta que la génesis instrumental tiene dos componentes, una dirigida hacia el artefacto (instrumentalización) y otra dirigida hacia el sujeto (instrumentación), utilizando la noción de esquema de utilización propuesta por Verillon y Rabardel (1995) para describir un esquema operativo con actividad mediada por un artefacto, propone entender los diferentes niveles y funciones del trabajo matemático a través de los esquemas de uso, correspondientes a las acciones y actividades específicas ligadas al artefacto, y de los esquemas de acción instrumentada, que son aquellos esquemas cuya

significancia está dada por la acción global tendiente a lograr las transformaciones en los objetos matemáticos de la actividad.

Drijvers y Gravemeijer (2005) consideran que un esquema de acción instrumentada es una organización mental estable, en la cual están incluidos tanto habilidades técnicas como conceptos y teoremas que soportan una manera de utilizar un artefacto para realizar una clase de tareas; utilizan la noción de técnica instrumentada desarrollada por Lagrange (1999), como un conjunto de reglas y métodos en un ambiente tecnológico que es usado para resolver un tipo de problemas específicos. Una técnica instrumentada es el lado técnico de un esquema de acción instrumentada. La técnica instrumentada es visible y externa, manifiesta parte del esquema de acción instrumentada, mientras que en el esquema de acción instrumentada se hace hincapié en los aspectos cognitivos y mentales que son invisibles.

La descripción a detalle que nos ofrecen Drijvers y Gravemeijer (2005) de un esquema de acción instrumentada para las diferentes tareas a resolver con el uso de un comando específico de una herramienta tecnológica con ambiente CAS incluye aspectos técnicos y conceptuales. Los esquemas de acción instrumentada formarán un listado de elementos clave, estos son elementos vivos en la génesis instrumental, su adquisición y dominio lo convierte en un esquema de uso, siendo la composición de dos o más esquemas de uso los que permiten emerger un nuevo esquema de acción instrumentada.

En esta investigación pretendemos realizar una lista de elementos clave que nos permita identificar un esquema de acción instrumentada en la realización de tareas relacionadas con el uso del parámetro  $s$ , el cálculo de integrales impropias de la forma  $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$  donde las funciones  $f(t)$  están definidas para  $t \geq 0$  y el uso del comando “vector” del software. Este esquema de acción instrumentada será una organización mental estable que el estudiante desarrollará y utilizará para la realización de una clase de tareas dadas.

### **Los instrumentos de prueba y el método de recolección de datos**

La investigación que reportamos es de tipo transversal realizada con estudiantes de cursos iniciales de la carrera de ingeniería en comunicaciones y electrónica, la experimentación es elaborada en dos etapas y llevada a cabo por el profesor investigador. La primera etapa consiste en un entrenamiento para el desarrollo de esquemas de uso de algunos comandos, entre los que se encuentran: expandir, factorizar, resolver expresión, ventana de gráficas, cálculo de derivadas e integrales y el comando “vector”. Las tareas realizadas durante el entrenamiento están relacionadas con temas y unidades de

enseñanza del curso de cálculo diferencial e integral de la carrera correspondiente. El objetivo del entrenamiento ofrecido a los estudiantes fue introducirlos en el conocimiento y manejo del software propiciando con ello esquemas de uso de los comandos más importantes y usuales que involucran conocimientos adquiridos a través de su formación escolar. La segunda etapa consiste en la realización de tareas conservadas en papel impreso con anotaciones realizadas por los estudiantes así como de un archivo del software que refleja las acciones y operaciones realizadas por el estudiante durante la elaboración de cada una de las tareas.

Para la identificación de un esquema de acción instrumentada como una lista de elementos clave para una tarea específica involucrando el uso de un comando del ambiente CAS, consideramos que un esquema de acción instrumentada establecido a priori es la guía en el diseño de las actividades a implementar (Drijvers y Gravemeijer 2005).

La primera tarea consiste en utilizar el comando “expandir” para desarrollar la expresión  $(x + y)^3 + 1$ , con la expresión desarrollada utilizar el comando “factorizar” para regresar a la expresión original (Drijvers, 2002); no resulta sencillo transformar la expresión desarrollada  $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + 1$  en la expresión original pues uno de los elementos claves del esquema de acción instrumentada es el aspecto de carácter conceptual relativo a la naturaleza simétrica de  $x$  y  $y$  en la expresión desarrollada, con ello proponer  $z = x + y$  y el cambio de variable  $x = z - y$  ó  $y = z - x$  en la expresión desarrollada.

La imagen 1 muestra la secuencia de acciones y operaciones que se espera el estudiante realice en el software, la secuencia refleja los aspectos técnicos y conceptuales del esquema de acción instrumentada establecido a priori para la tarea.

Se hace necesaria la intervención del profesor investigador para “ver” la simetría de las variables involucradas y con ello la realización de la tarea propuesta.

Con esta actividad pretendemos involucrar a los estudiantes en las potencialidades y restricciones del software y observamos que el elemento clave de aspecto conceptual es en el que se requiere de la intervención de profesor investigador.

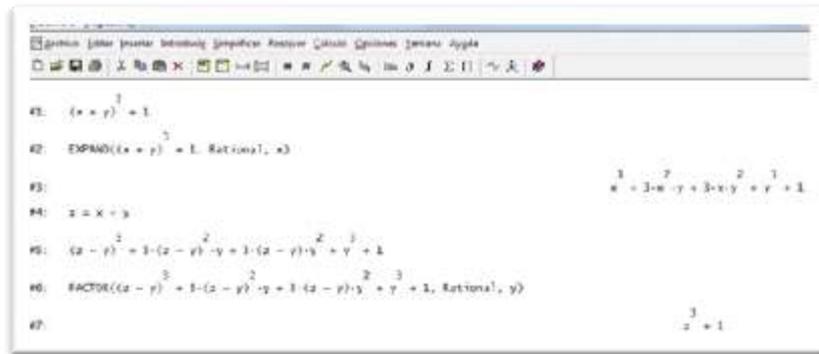


Imagen 1

La segunda tarea (Drijvers, Verweij y van Winsen; 1997) corresponde a la exploración de “Parábolas con un parámetro”, el propósito de la actividad demanda la exploración y explicación de los valores del parámetro  $p$  para el que la familia de parábolas generada por una expresión que contiene al parámetro, tiene raíces reales o no, además de explicar el comportamiento y características de la familia de curvas generada.

Los estudiantes deben ser capaces de graficar parábolas, resolver ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización o la fórmula general, se espera que utilicen los esquemas de uso de los comandos “simplificar”, “resolver” y la ventana de gráficas del software; el aspecto conceptual está relacionado con la interpretación de las raíces de una ecuación cuadrática y el uso del parámetro como un número real.

La clase de expresiones utilizadas en la tarea es de la forma  $x^2 + px + 4$  y se espera que identifiquen los puntos de intersección con el eje de las abscisas para diferentes valores de parámetro así como el punto en común de la familia de curvas generadas.

Los estudiantes muestran deficiencias para “ver” que el parámetro es un número real y con ello explorar e identificar el comportamiento en una infinidad de valores del mismo.

La tercera tarea consiste en la exploración de “Rectas con un parámetro”, se espera que los estudiantes muestren los esquemas de uso del comando “vector” y el comando “resolver” para explicar el comportamiento de la familia de curvas generadas y su intersección con el eje de las abscisas; para esta tarea se utilizan expresiones de la forma:  $y = -3x + b$  y  $y = mx + \frac{3}{2}$ .

Los estudiantes identifican la familia de rectas paralelas y el haz de rectas generadas en cada caso así como las coordenadas de intersección de cada recta y el eje de las abscisas. Los aspectos técnicos y conceptuales del esquema son dominados en esta tarea.

La cuarta tarea consiste en la exploración de la “Función exponencial con un parámetro”. La actividad solicita utilizar la función  $f(t) = e^{-st}$  y el comando “vector” para explicar

y describir el comportamiento de la función en el intervalo  $(0, \infty)$  para los valores posibles del parámetro  $s$ . Se solicita realicen el cálculo de la integral impropia  $\int_0^{\infty} e^{-st} dt$  registrando los valores del parámetro  $s$  y el valor de la integral impropia.

Los estudiantes emplean el comando “vector” para explicar el comportamiento asintótico o exponencial en el intervalo  $(0, \infty)$  de acuerdo a los valores del parámetro. El cálculo de la integral impropia  $\int_0^{\infty} e^{-st} dt$ , es realizado dando valores al parámetro en forma discreta utilizando la potencialidad del comando “vector”, la naturaleza del parámetro se observa empleada en la variable “paso” del comando; emplean el comando “vector” en la forma  $vector(e^{-st}, s, -10, 10, 1)$ , con ello identifican gráficamente el comportamiento de la función involucrada.

El cálculo de la integral impropia es realizado utilizando el comando “vector” con la sintaxis  $vector(\int_0^{\infty} e^{-st} dt, s, -10, 10, 1)$ , sin embargo el aspecto conceptual relacionado con la convergencia y divergencia de una integral impropia no es enunciado por los estudiantes, no pueden diferenciar una integral impropia convergente de una divergente.

La quinta tarea consiste en la exploración del “Producto de la función  $e^{-st}$  y la función  $f(t)$ ”. Utilizando el comando “vector” se solicita explicar el comportamiento de la familia de curvas generada por el producto  $e^{-st}f(t)$  en el intervalo  $(0, \infty)$  para los valores posibles del parámetro  $s$ ; se pide calcular la integral impropia  $\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt$  para algunos de los valores del parámetro y registrar los valores del parámetro  $s$  y el valor de la integral impropia; posteriormente se le pide graficar los puntos  $(s, \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt)$  y se pregunta si existe alguna función  $F(s)$  o tramo de función que se ajuste a los puntos graficados anteriormente.

La imagen 2 muestra la secuencia de acciones y operaciones en el software que se espera un estudiante realice reflejando los esquemas de uso de los comandos involucrados para la correcta realización de la tarea.

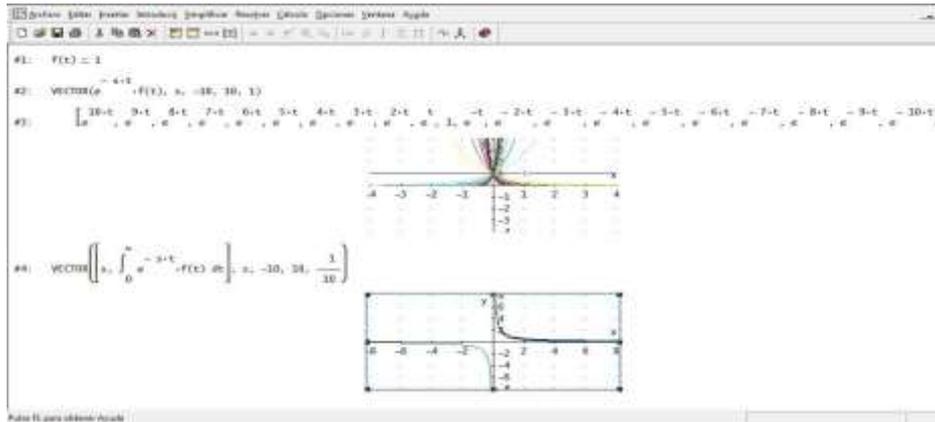


Imagen 2

Los estudiantes explican el comportamiento asintótico o exponencial de la familia de curvas generadas por el producto  $e^{-st}f(t)$  en el intervalo  $(0, \infty)$ , emplean el comando “vector” con la sintaxis  $vector(e^{-st}f(t), s, -10, 10, 1)$  y los recursos gráficos del software, el cálculo de la integral impropia lo realizan empleando el comando “vector” con la sintaxis  $vector(\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt, s, -10, 10, 1)$ , tales esquemas de uso del comando “vector” surgen en la realización de la tarea propuesta.

La identificación de la función que se ajusta a la representación gráfica de los puntos  $(s, \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt)$  la realizan empleando el comando “vector” con la sintaxis  $vector([s, \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt], s, -10, 10, \frac{1}{10})$ .

Los estudiantes emplean el comando “vector” del software con la sintaxis  $vector([s, \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt], s, -10, 10, \frac{1}{10})$  para identificar la relación funcional  $F(s)$  que se ajusta a la gráfica de los puntos definidos por el par ordenado  $(s, \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt)$ , puntos definidos por los valores del parámetro  $s$  y el correspondiente valor de la integral impropia  $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$  cuando esta es convergente; se trabaja con la funciones  $f(t) = 1$  y  $f(t) = \sin(t)$ .

**Observaciones generales**

No disponemos de un mecanismo o método para identificar el nivel de entrenamiento que logran y requieren los estudiantes en la etapa de entrenamiento, lo que si podemos argumentar es que en esta etapa los estudiantes desarrollan esquemas de uso correspondientes a cada uno de los comandos del ambiente CAS y cada esquema de uso requiere un aspecto conceptual relacionado con el objeto matemático involucrado.

Los esquemas de uso de los diferentes comandos empleados a lo largo de las tareas propuestas son conocidos y empleados, son los aspectos conceptuales involucrados en los comandos los que requieren de intervención por parte del profesor investigador.

Las tareas propuestas diseñadas con un esquema de acción instrumentada concebido a priori representan una continuidad en el entrenamiento ofrecido a los estudiantes y ofrecen la posibilidad de explorar y reafirmar los aspectos conceptuales relativos a la naturaleza de los objetos matemáticos con que se trabaja en cada tarea.

Los esquemas de acción instrumentada establecidos a priori para el diseño de las tareas nos permiten identificar las debilidades de los estudiantes como lo muestran los hechos relacionados con el manejo del parámetro como número real que toma una infinidad de valores y la dificultad de los estudiantes por identificar adecuadamente cuando una integral impropia es convergente o cuando es divergente.

La experiencia realizada nos muestra: es el esquema de acción instrumentada que involucra aspectos técnicos y conceptuales el que puede ser enseñado a los estudiantes en un ambiente escolar; las tareas diseñadas con un esquema de acción instrumentada establecido a priori permiten identificar las debilidades conceptuales que son demandadas en la tarea y con ello intervenir oportunamente, también se observan los aciertos y el surgimiento de esquemas de uso no contemplados en el diseño de la tarea.

### Referencias bibliográficas

- Drijvers, P. (2002). Learning mathematics in a computer algebra environment: obstacles are opportunities. *ZDM*, 34(5), 221-228.
- Drijvers, P. y Gravemeijer, K. (2005). Computer algebra as an instrument: examples of algebraic schemes. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (Eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a computational device into a mathematical instrument*, Capítulo 7, pp. 163-196. New York: Springer.
- Drijvers, P., Verweij, A., y van Winsen, E. (1997). Mathematics lessons with DERIVE. *ZDM*, 29(4), 118-123.
- Edwards, C. y Penney, D. (2001). *Ecuaciones diferenciales*. México: Pearson Educación.
- Lagrange J.B. (1999). Complex calculators in the classroom: theoretical and practical reflections on teaching pre-calculus. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 4, 51-81.
- Spiegel, M. (1981). *Ecuaciones diferenciales aplicadas*. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.
- Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculators environments. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (Eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a computational device into a mathematical instrument*, Capítulo 6, pp. 137-162. New York: Springer.
- Verillon P. y Rabardel P. (1995). Cognition and Artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European journal of Psychology of Education*, 10(1), 77-101.