DETERMINACIÓN DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS SIN NECESIDAD DEL CÁLCULO DIFERENCIAL.

Luis Manuel Hernández Gallardo.
lmhg@fciencias.unam.mx
Facultad de Ciencias, UNAM. México.

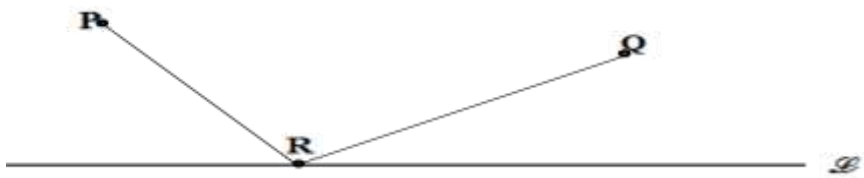
Tema: IV.2 - Formación y Actualización del Profesorado.
Modalidad: Mini Curso.
Nivel: Formación y actualización docente
Palabras clave: Máximo, Mínimo.

Resumen.
En las matemáticas los métodos y procedimientos generales y sistematizados que se han desarrollado para resolver los problemas de máximo y mínimo hacen uso de la derivada de una función, es decir, se sustentan en el Cálculo Diferencial. Sin embargo muchos problemas de este tipo se logran resolver por medio de la geometría y el álgebra elementales, sin recurrir al uso de la derivada de una función.
Sabemos de la geometría euclidiana que la distancia más corta entre dos puntos es la que se mide a lo largo de la recta que los une; que entre todas las curvas planas cerradas de la misma longitud, el círculo es la que encierra el área mayor. Estos y otros problemas de máximo y mínimo eran conocidos desde los griegos, aunque algunos de ellos se enunciaban sin la demostración correspondiente. En este trabajo se abordarán algunos problemas sobre máximo y mínimo sin el uso de la derivada, y se dará una metodología general para resolver una clase completa de ellos.

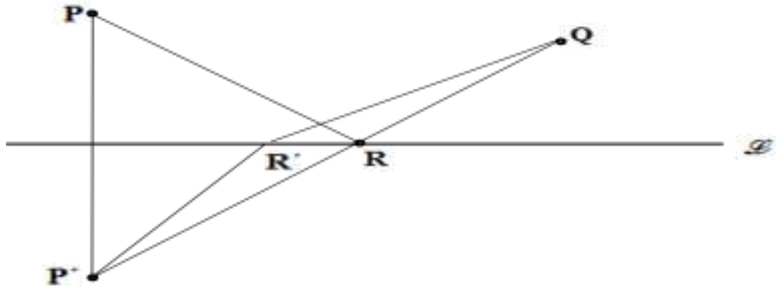
En una época tan remota como el siglo I antes de nuestra era, Herón de Alejandría ya sabía que un rayo de luz procedente de un punto P y que incide sobre un espejo plano L, en un punto R, se refleja en la dirección de un punto Q de tal manera que los rayos PR y QR forman ángulos iguales con el espejo. Herón encontró que si R' es cualquier otro punto sobre el espejo, la distancia total es mayor que la distancia $\overline{PR}+\overline{RQ}$.

El primer problema que vamos a analizar está relacionado con el rayo de luz de Herón.

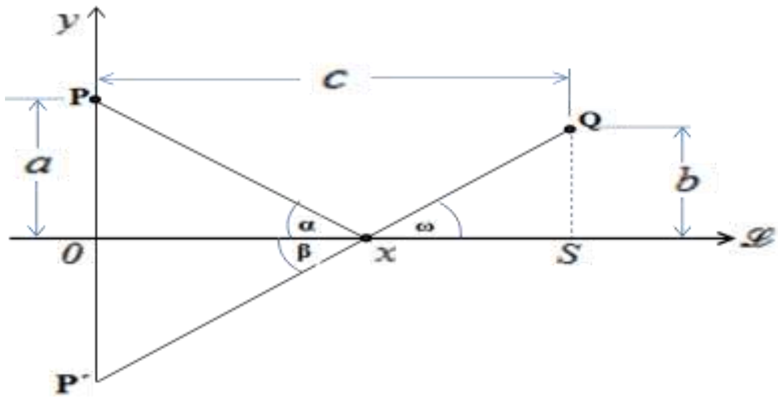
Problema. Si se tiene una recta ℓ y dos puntos **P** y **Q** que están colocados en un mismo lado de ésta, ¿Dónde se debe colocar un punto **R** sobre la recta para que la longitud $d=\overline{PR}+\overline{RQ}$ sea mínima?



Para determinar la posición del punto **R** **s**obre la recta reflejemos el punto **P** sobre la recta como si ésta fuera un espejo, se obtiene el punto **P´** y además la recta ℓ es la mediatriz del segmento **PP´**. Al trazar el segmento que une los puntos **P´** y **Q,** el punto donde este segmento corta la recta ℓ es el punto **R, ya** que si **R´** es cualquier otro punto sobre la recta, se tiene que $\overline{P'R}+\overline{RQ}<\overline{PR'}+\overline{R'Q}$, dado que la suma $\overline{P'R}+\overline{RQ}$ es la longitud del lado **P´Q** del triángulo **P´ R´Q**. Nos damos cuenta que este problema en realidad es el problema de Herón sobre el rayo de luz.



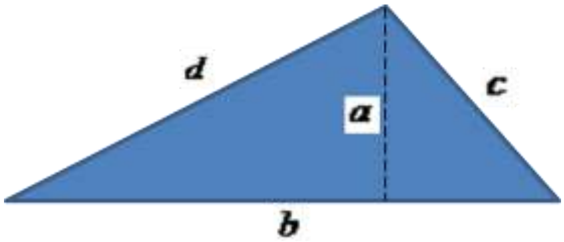
Además, si se tiene la información adicional que aparece en la figura siguiente, donde se ha trazado un sistema de coordenadas cartesianas cuyo origen es el punto de intersección de la recta ℓ con el segmento **PP´,** se puede determinar la abscisa x del punto R



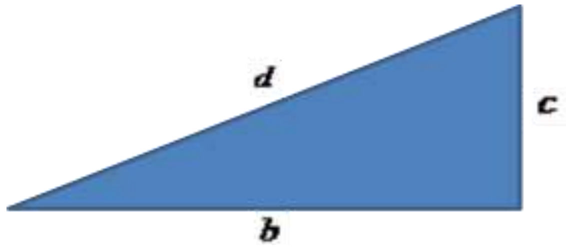
Como los ángulos β y ω son opuestos por el vértice, entonces son iguales, es decir, se tiene que $\beta=\omega$. Pero por construcción el triángulo **xP P´** es isósceles ya que la recta ℓ es la mediatriz del segmento **PP´,** en consecuencia $\alpha=\beta$. Por lo tanto $\alpha=\omega$ y en consecuencia los triángulos **OxP** y **xSQ** son semejantes. De la semejanza de estos triángulos se tiene que $\frac{x}{a}=\frac{c-x}{b}$, de donde se deduce que $x=\frac{c}{a+b}$.

Otro de los problemas de los que se pueden resolver sin el uso del Cálculo Diferencial es el de determinar el triángulo de área máxima cuando se mantiene fija la longitud de dos de sus lados. Este problema está entre los más sencillos

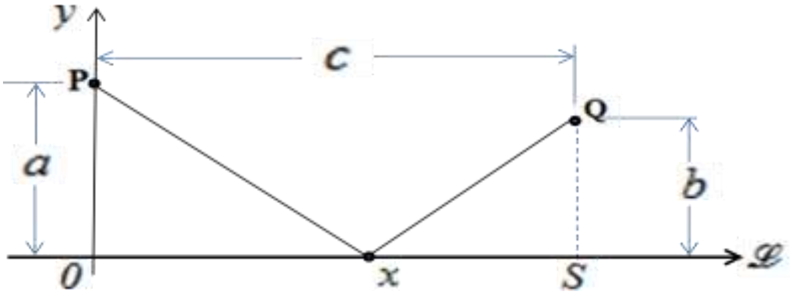
En efecto, si b y c son los lados cuya longitud es constante, y consideramos el triángulo cuya base es alguno de los dos, por ejemplo el lado b, entonces el área del triángulo es $A=\frac{1}{2}ba$, donde a es la altura del triángulo ($a\leq c$).



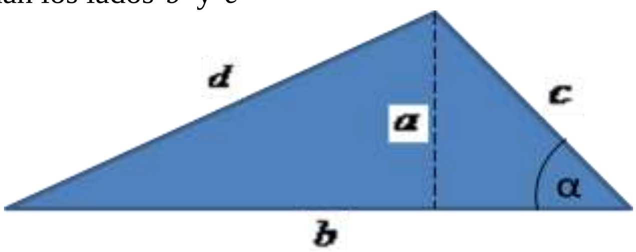
Pero el área es máxima si $a=c$, lo cual se traduce en que el lado c sea perpendicular al lado b. Por lo tanto el triángulo de área máxima es el triángulo rectángulo cuyos catetos son b y c.



Observemos que en el primer problema nos preguntamos por el valor mínimo de la función distancia dada por $d(x)=\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{(c-x)^2+b^2}$.



En el segundo problema nos damos cuenta de que el área del triángulo depende del ángulo α que forman los lados b y c



ya que $A(\alpha)=\frac{1}{2}bcsen\alpha$. Por lo tanto se trata de calcular el máximo valor de la función dada por $A(\alpha)=\frac{1}{2}bcsen\alpha$.

Consideremos ahora la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=7x^2+6$. Si nos preguntamos por el valor máximo de esta función, en forma inmediata nos damos cuenta de que tal valor no existe, ya que como $7x^2$ es no negativo y 6 es positivo, su suma puede hacerse tan grande como se quiera. Pero en cambio sí existe su valor mínimo, porque si $x=0$, se obtiene $f(0)=6$ como valor mínimo.

En general, se deduce que para cualquier función cuadrática $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=ax^2+b$, donde $a>0$ y $b\in\mathrm{R}$, ésta alcanza su valor mínimo en $x=0$ pero no tiene valor máximo.

Por otro lado la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=-4x^2+99$ toma valores negativos cuyo valor absoluto es tan grande como se quiera, en consecuencia no tiene valor mínimo. Pero si $x=0$, se obtiene $f(0)=99$ el cual es el valor máximo de la función.

En general, se deduce que para cualquier función cuadrática $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ dada por $f(x)=-ax^2+b$, donde $a>0$ y $b\in\mathrm{R}$, ésta alcanza su valor máximo en $x=0$ pero no tiene valor mínimo.

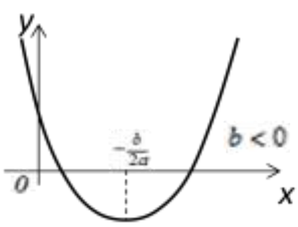
¿Qué se puede decir en el caso general para una función cuadrática $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=ax^2+bx+c$, donde $a,b,c\in \mathrm{R}$, respecto de si alcanza respectivamente sus valores máximo y mínimo?
Escribamos $f(x)$ en la forma

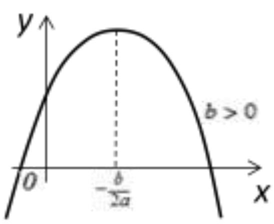
$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2+bx+c \\ &= a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x\right)+c \\ &= a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a} \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

De esta expresión se deduce que

1. Si $a>0$ el término $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ se puede hacer tan grande como se quiera, por lo cual los valores de la función son tan grandes como se quiera, entonces en este caso la función cuadrática no tiene valor máximo. Pero en $x=-\frac{b}{2a}$ el término $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ se hace cero, por lo cual se obtiene $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=c-\frac{b^2}{4a}$ como valor mínimo de la función cuadrática.
2. Si $a<0$, el término $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ se hace tan negativo como se quiera, en consecuencia los valores de la función se hacen tan negativos como se quiera, luego la función no tiene valor mínimo. Pero en $x=-\frac{b}{2a}$ el término $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ se hace cero, en consecuencia el valor máximo de la función cuadrática en este caso es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=c-\frac{b^2}{4a}$.

   En ambos casos la gráfica de la función es una parábola cuyo vértice está en $x=-\frac{b}{2a}$, sólo que en el caso 1 la parábola abre hacia la parte positiva del eje y, mientras que en el caso 2 la parábola abre hacia la parte negativa del eje y.





En general por medio de estos resultados que se han obtenido se pueden resolver problemas como los siguientes:

1. Descomponer un número positivo P en dos sumandos cuyo producto sea máximo.

2. Determinar el rectángulo de área máxima con perímetro dado p.
3. Inscribir un rectángulo de área máxima en un círculo de radio r.
4. Inscribir un cilindro de superficie lateral máxima en una esfera de radio r.
5. Inscribir un cilindro de superficie lateral máxima en un cono de radio r.

Problema 1. Si x es uno de los sumandos de P el otro será $P-x$, entonces se quiere determinar el valor máximo de $f(x)=x(P-x)$.

Como

$$\begin{aligned} f(x) &= x(P-x) \\ &= -x^2+Px \\ &= -\left(x-\frac{P}{2}\right)^2+\frac{P^2}{4} \end{aligned}$$

De donde se obtiene $x=\dfrac{P}{2}$ como el punto para el cual el valor de $f(x)$ es máximo. Por lo tanto los sumandos x y $P-x$ deben ser iguales.

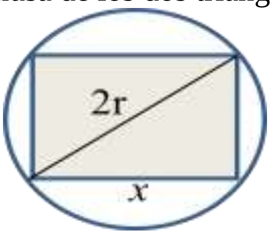
Problema 2. Si x es uno de los lados del rectángulo el otro será $\dfrac{p}{2}-x$. Entonces se debe calcular el valor máximo de $A(x)=x\left(\dfrac{p}{2}-x\right)$.

Pero

$$\begin{aligned} A(x) &= x\left(\frac{p}{2}-x\right) \\ &= -x^2+\frac{p}{2}x \\ &= -\left(x-\frac{p}{4}\right)^2+\frac{p^2}{16} \end{aligned}$$

De donde se obtiene $x=\dfrac{p}{4}$, valor para el cual el área es máxima, entonces el rectángulo de área máxima es un cuadrado de lado $\dfrac{p}{4}$.

Problema 3. Si x es la longitud de uno de los lados del rectángulo, por el Teorema de Pitágoras el otro lado mide $\sqrt{4r^2-x^2}$, ya que la diagonal del rectángulo es el diámetro del círculo y también es la hipotenusa de los dos triángulos rectángulos que se forman.



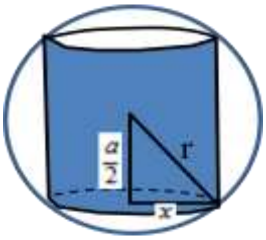
Entonces en el problema se debe determinar el valor máximo de $A(x)=x\sqrt{4r^2-x^2}$, es decir, el valor de x para el cual $A(x)$ sea máximo. Pero $A(x)$ tendrá su valor máximo donde $\left(A(x)\right)^2=x^2\left(4r^2-x^2\right)$ alcance su valor máximo.

Como

$$\begin{aligned}(A(x))^2 &= x^2\left(4r^2 - x^2\right)\\ &= -\left(x^2 - 2r^2\right)^2 + 4r^4\\ &= -\left(z - 2r^2\right)^2 + 4r^4\end{aligned}$$

con $z = x^2$ alcanza su valor máximo en $z = 2r^2$, es decir, cuando $x = \sqrt{2}r$, entonces el rectángulo inscrito debe ser un cuadrado de lado $x = \sqrt{2}r$.

Problema 4. Si denotamos con x el radio del cilindro y su altura por a, entonces el área lateral A_l del cilindro inscrito está dada por $A_l(x) = 2\pi ax$.



Como $a = 2\sqrt{r^2 - x^2}$, entonces $A_l(x) = 4\pi x\sqrt{r^2 - x^2}$. Sabemos que $A_l(x)$ alcanza su valor máximo en el mismo valor de x para el cual $\left(A_l(x)\right)^2 = 16\pi^2 x^2\left(r^2 - x^2\right)$ alcanza su valor máximo.

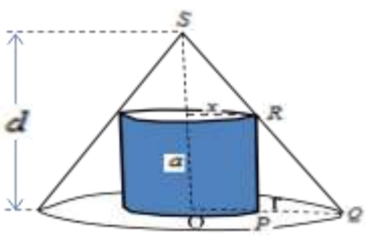
Pero

$$\begin{aligned}\left(A_l(x)\right)^2 &= 16\pi^2 x^2\left(r^2 - x^2\right)\\ &= -16\pi^2\left(x^2 - \frac{r^2}{2}\right)^2 + 4\pi^2 r^4\\ &= -16\pi^2\left(z - \frac{r^2}{2}\right)^2 + 4\pi^2 r^4\end{aligned}$$

con $z = x^2$ alcanza su valor máximo en $z = \frac{r^2}{2}$, es decir, cuando $x = \frac{\sqrt{2}}{2}r$. Con este valor del radio del cilindro obtenemos el valor de su altura $a = \sqrt{2}r$. Entonces las dimensiones del cilindro inscrito en la esfera de radio r, con área lateral máxima son:

$$Radio = \frac{\sqrt{2}}{2}r,\quad altura = \sqrt{2}r.$$

Problema 5. Denotemos con r y d el radio de la base y la altura del cono respectivamente; por otro lado, con x el radio de la base del cilindro inscrito y con a su altura.



El área lateral A_l del cilindro inscrito está dada por $A_l(x) = 2\pi ax$. De la semejanza de los triángulos OQS y PQR se tiene que

$$\frac{a}{d}=\frac{r-x}{r}$$

de donde se obtiene $a=\frac{d}{r}(r-x)$, en consecuencia

$$\begin{aligned} A_l(x) &= 2\pi\frac{d}{r}(r-x)x \\ &= -\frac{2\pi d}{r}\left(x-\frac{r}{2}\right)^2+\frac{\pi r d}{2} \end{aligned}$$

Pero entonces $A_l(x)$ alcanza su valor máximo en $x=\frac{r}{2}$.

Por lo tanto las dimensiones del cilindro con área lateral máxima inscrito en un cono cuyo radio de la base es r y de altura d son:

$$Radio=\frac{r}{2},\quad altura=\frac{d}{2}.$$

Para resolver el problema siguiente: Descomponer un número positivo P en dos factores positivos de tal forma que su suma sea mínima, haremos uso de la llamada desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica, por lo cual vamos a demostrar el resultado siguiente.

Teorema. Para cualesquiera números $x, y\geq 0$ se satisface la desigualdad $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$.

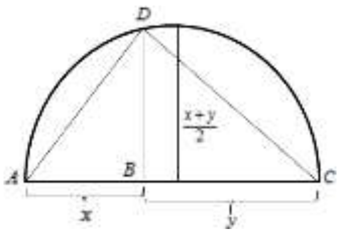
El resultado establece que la media geométrica $\sqrt{xy}$ de dos números no negativos x y y no es mayor que su media aritmética $\frac{x+y}{2}$.

Demostración. Sabemos que

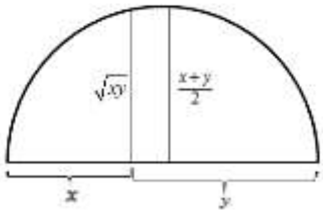
$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2=x+y-2\sqrt{xy}\geq 0$$

Luego $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$.

Se puede dar una interpretación geométrica de esta desigualdad. Si se traza el segmento de longitud $x+y$ y se dibuja el semicírculo de radio $\frac{x+y}{2}$ de tal forma que el segmento $x+y$ sea su diámetro, entonces podemos construir la figura siguiente



De la semejanza de los triángulos ABD y BCD se tiene que $\frac{x}{\overline{BD}}=\frac{\overline{BD}}{y}$. Por lo tanto $\overline{BD}=\sqrt{xy}$. Entonces la desigualdad es bastante clara geométricamente.



Esta desigualdad es un caso particular del resultado siguiente: Teorema. Para cualesquiera $x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0$ se satisface la desigualdad

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

Si ahora se denota con $x, y > 0$ los factores de P, es decir, $P = xy$ se tiene que $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, desigualdad que se convierte en una igualdad si y sólo si $x = y = \sqrt{P}$.
Por lo tanto la suma de los dos factores del número positivo P es mínima si los factores son iguales.
Este resultado se puede formular en términos de que la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = x + \frac{P}{x}$, $P > 0$ alcanza su valor mínimo en $x = \sqrt{P}$.
Otro problema que se resuelve en forma inmediata por medio de la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica es el que se refiere a determinar el rectángulo de área máxima y con un perímetro dado. En efecto, si x y y son los lados del rectángulo, lo que establece la desigualdad $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ escrita en la forma $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy$, es que el área del rectángulo no es mayor que el área del cuadrado cuya arista mide $\frac{x+y}{2}$. Por lo tanto el rectángulo de área máxima con perímetro dado $p = 2(x+y)$ es el cuadrado de arista $\frac{x+y}{2}$.
Ésta es sólo una muestra pequeña de los problemas de máximo y mínimo que se pueden resolver sin el uso del Cálculo Diferencial.

Bibliografía:

Courant R., Robins H., (1955) ¿Qué es la matemática? Madrid, Editorial Aguilar.
Natanson I. P., (1977) Lecciones populares de matemáticas. Problemas elementales de máximo y mínimo. Moscú: Editorial Mir
Rademacher Hans, Toeplitz Otto (1970) Números y figuras, Madrid: Alianza Editorial.