Universidad de los Andes
Centro de Investigación y Formación en Educación · Cife

G•E•M•A•D

Acercamiento del álgebra escolar a los estudiantes

María C. Cañadas
Universidad de Granada
mconsu@ugr.es

Ciclo de conferencias de Gemad

2 de febrero de 2013

Índice general de la presentación

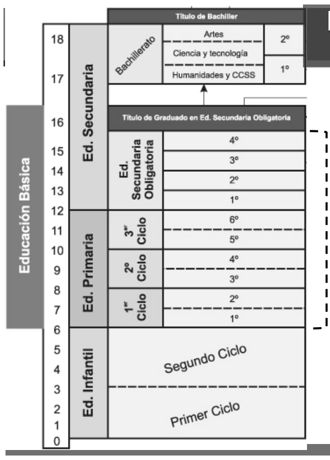
- Introducción-contextualización
  - Álgebra escolar
  - Niveles educativos en España
  - Álgebra en el currículo español
  - Contexto
  - Marco general
- Dos estudios en curso:
  - Educación secundaria
  - Educación primaria

I. Álgebra escolar

Álgebra que se enseña en los niveles educativos previos a los universitarios

---

II. Niveles educativos en España



Currículo español

- Currículo para todo el territorio nacional
- Variaciones locales según aspectos culturales en diferentes comunidades autónomas (no afectan al contenido matemático)

Contenido del currículo español

- Organización del currículo para los diferentes niveles:
  - Competencias/Objetivos
  - Contenidos
  - Orientaciones metodológicas
  - Evaluación
- Contenidos matemáticos en todos los niveles de la educación obligatoria (3-16 años)

III. Álgebra escolar en el currículo español

- En educación infantil (0-5 años) y educación primaria (6-11 años)
  - no aparece el álgebra como contenido matemático
  - elementos relacionados con el álgebra escolar: establecer y generalizar patrones geométricos y gráficos

Álgebra escolar en el currículo español

- El álgebra es un bloque de contenido del currículo educación secundaria (12-16 años)
  - Simbolismo algebraico. Relación con sistema de representación verbal
  - Regularidades
  - Manipulación del simbolismo algebraico

Algunas observaciones

- Desconexión entre primaria y secundaria. Patrones y regularidades versus manipulacion del simbolismo algebraico
- Diferencias con otros países (Australia, Canadá, China, Corea, Estados Unidos, Japón o Portugal), donde se propone una introducción al álgebra escolar desde la educación infantil (*early algebra*)

IV. Contexto

- Internacional
  - *DKR-12 Early Algebra* Project
  - *Algebraic Thinking* del CERME
  - ICCAMS Project
- Nacional
  - Grupo "Pensamiento Numérico y Algebraico" de la SEIEM
  - Grupo "Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico"
  - Proyectos I+D+i

Palabras clave: álgebra escolar; generalización; *early algebra*; patrones; representaciones (tabular, gráfica, simbólica, verbal y numérica); razonamiento inductivo; resolución de problemas

V. Marco general

- *Early algebra* como marco general
- Álgebra escolar como contenido matemático
- Sistemas de representación
- Razonamiento inductivo-generalización. Procedimiento que permite partir de casos particulares y llegar a hacer afirmaciones sobre un conjunto mayor de casos donde se encuentran incluidos los primeros
- Resolución de problemas como parte de la metodología

Punto de partida

- Dificultades de los estudiantes con el álgebra
- Preocupación del profesorado por la enseñanza y aprendizaje del álgebra en diferentes niveles educativos

Equipo de trabajo

- Equipo investigador de la Universidad de Granada: María C. Cañadas, Encarnación Castro, Marta Molina, Eduardo Merino y Susana Rodríguez-Domingo
- Reuniones periódicas
- Profesor/a-investigadora presente en el aula
- Recoger información en las aulas y clarar dudas durante el trabajo
- Análisis de datos e interpretación de resultados

Un estudio en educación secundaria
Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólico por estudiantes de secundaria

Susana Rodríguez-Domingo, 2011

http://funes.uniandes.edu.co/1751/

1. Problema de investigación

Lenguaje verbal ⟷ Simbolismo algebraico

Interés en investigaciones en Educación Matemática en el contexto de la resolución de problemas

Algunos estudios previos:
- Dominio y comprensión
(Ej: Arcavi, Bednarz, Kieran y Lee, Kaput)
-Clasificación de errores
(Ej: Socas, Palarea)

→ Aspectos por estudiar

→ Escasos trabajos sobre traducción entre sistemas de representación

Objetivos de investigación

Analizar el proceso de traducción entre los sistemas de representación verbal y simbólico de enunciados algebraicos que realizan estudiantes de educación secundaria

1. Construir instrumento para explorar el proceso

2. Analizar y clasificar errores al realizar las traducciones

3. Describir el trabajo de los estudiantes cuando se les pide que relacionen las representaciones simbólica (RS) y verbal (RV) de enunciados algebraicos (EA)

3. Marco conceptual

Enunciados algebraicos	Sistemas de representación	Errores y dificultades
Cerdán (2010) Caspi y Sfard (2011)	Kaput (1992) Gómez (2007) Ruano, Socas y Palarea (2008)	Domínguez, Hernández, Muñoz, Palarea, Ruano y Socas (2006) Arnau (2011)

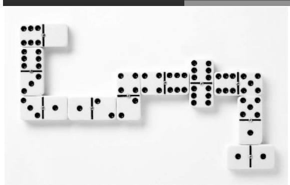
Enunciado algebraico: expresión que indica relaciones generales entre cantidades, algunas de ellas desconocidas

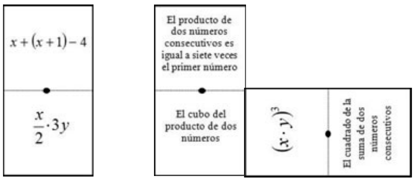
4. Método

- 26 alumnos de 4º de educación secundaria (15 años)
  - 6 repetidores
  - 14 con matemáticas suspensas en años anteriores
  - Absentismo escolar y falta de interés por las matemáticas
- Habían trabajado bloques de aritmética y álgebra

Juego: "pseudo-dominó algebraico". Unión de fichas vinculada a la equivalencia de enunciados algebraicos en los dos sistemas de representación (verbal y simbólico)

Diseño del juego





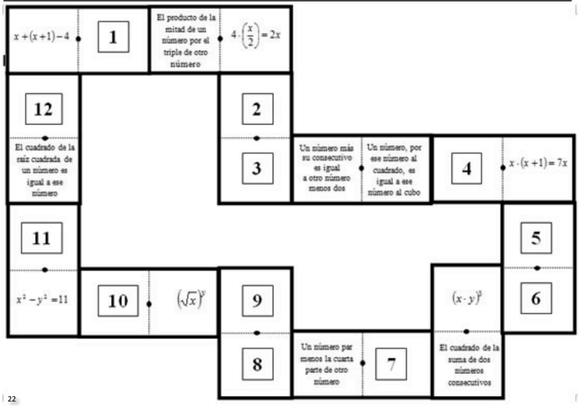
Enunciados algebraicos para el dominó

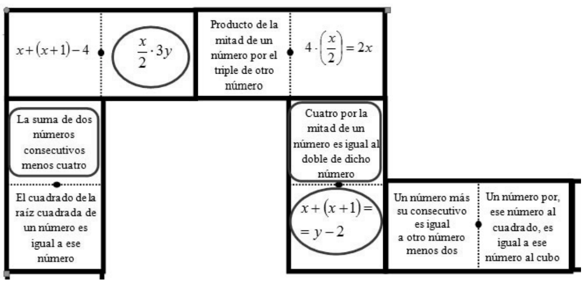
- Criterios para la selección de enunciados algebraicos:
  - Relaciones aditiva, multiplicativa y potencia
  - Una o dos variables algebraicas
  - Enunciados abiertos o cerrados
  - Secuenciales/no secuenciales
- 12 enunciados algebraicos

Fases del juego

- Fase 1 (individual). Completar las fichas del dominó
- Fase 2 (torneo). Jugar al dominó con unas reglas predeterminadas

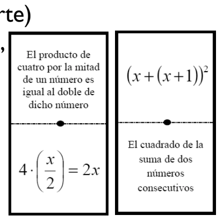
Fase 1



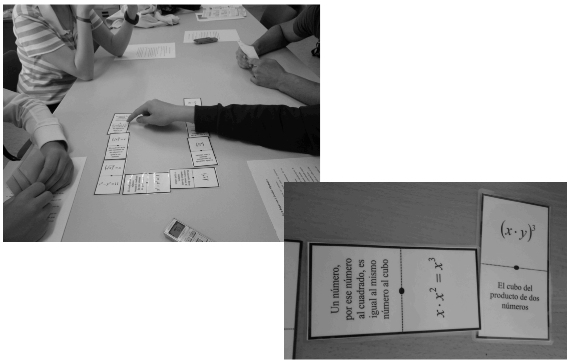


Fase 2

- Utilizamos las fichas (cumplimentadas correctamente) de la fase 1
- Añadimos fichas "dobles" pero con los mismos enunciados diseñados en la fase 1 (mismo enunciado algebraico, expresado verbalmente en una parte de la ficha y simbólicamente en la otra parte)
- 24 fichas: 12 "simples" y 12 "dobles"
- Insistencia en que den explicaciones



- Reglas del juego para la fase 2:
  - Torneo
  - 30 minutos jugando 4 alumnos (3 o 4 partidas)
  - Ganador: jugador > puntuación
  - Puntuación:
    - +1 punto si coloca la ficha correctamente y justifica su jugada atendiendo a los enunciados algebraicos
    - +2 si corrige a un compañero y justifica esa corrección
    - +1 primer jugador que se queda sin fichas



4. Resultados

Fase 1

Fase 2

4. 1. Resultados de la fase 1 del juego

- Clasificación de errores observados

I. Según la completitud del enunciado	Incompletos
	Desmedidos
II. Derivados de la aritmética	Paréntesis
	Fracción - Producto
	Potenciación – Producto
	Suma – Producto
	Fracción - Potenciación
III. Derivados de las características propias del lenguaje algebraico	Generalización
	Particularización
	Variables
	Complicación estructural

- Ejemplos de errores

Enunciado	Respuesta del estudiante	Tipo de error
Un número por, ese número al cuadrado, es igual a ese número al cubo	$x + x^2 = x^3$	II.4.-Suma-Producto
$4\frac{x}{2} = 2x$	Un número par multiplicado por la mitad de ese número es igual al doble de dicho número	III.1.-Generalización
$x \cdot (x+1) = 7x$	El producto de un número multiplicado por su consecutivo es igual a otro número multiplicado por siete	III.3.-Variables

- Las traducciones del SR verbal al simbólico parecen más difíciles para los estudiantes (representan el 75% de los errores identificados)
- Traducción del SR simbólico al verbal
  - Potencia-producto es el error más frecuente (estructura multiplicativa)
  - No hay errores que involucren otras operaciones

- Traducción del SR verbal al simbólico:
  - Errores relacionados con el álgebra, principalmente variables y complicación estructural
  - Solo un error de particularización (para número par)
  - Error de generalización solo en este sentido de la traducción

4. 2. Resultados de la fase 2 del juego

- Dificultades encontradas por los estudiantes
  - Unión de fichas: enunciado verbal-simbolismo algebraico
  - Detallar enunciados: "un número", "otro número", "este número"
  - Fichas dobles – similitud de enunciados
  - Inseguridad inicial les lleva a no colocar fichas por no hacer ganar puntos a otro jugador

- Lectura de los enunciados
  - "Lectura lineal". Leen primero el enunciado verbal y después el simbolismo algebraico. Ejemplo para x (x+1) = 7x, "el producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número, pues x por x más uno es igual a siete x"
  - "Lectura relacional". Alternan ambos sistemas de representación en sus respuestas. Ejemplo para x + (x+1) = y – 2, "un número, x, más su consecutivo, x más uno, es igual a otro número que podemos darle el valor que tú quieras, en este caso le damos y, menos dos" (sujeto 5B)

- Correcciones entre compañeros
  - Rectifican la lectura del enunciado o la colocación de fichas.

    No lo sé… el producto de la mitad de un número por el triple de otro… el producto porque está multiplicando, de un número que es *x*, por otro número elevado a dos es igual a ese número elevado a tres… al triple de otro número … (3B)

    No, está mal. De la mitad, y aquí pone de x al cuadrado (9B)

    Aquí sería, un número por otro número… por ese mismo número al cuadrado es igual a ese mismo número al cubo (sujeto 2C)
  - Autocorrección. Rectificación de la ficha propuesta por parte del propio estudiante.

    Un número por ese número al cuadrado es igual al mismo número al cubo porque *x* por *x* al cuadrado es igual a tres *x*… a *x* al cubo (3A)

5. Implicaciones docentes

- Más errores del SR verbal al simbólico. Interés de trabajar antes del simbólico al verbal y luego trabajar el otro sentido de la traducción
- Juego como elemento motivador
- Dominó para el uso en el aula de educación secundaria

6. Estado actual del trabajo y continuación

- Tesis doctoral en elaboración
- Cuestiones a considerar:
  - Resolución de problemas utilizando ambas representaciones (verbal y simbólica) de enunciados algebraicos en diferentes situaciones
  - Proponer enunciados verbales de problemas

Un estudio en educación primaria Patrones y representaciones de alumnos de quinto de educación primaria (9 años) en una tarea de generalización

Eduardo Merino, 2012

http://funes.uniandes.edu.co/1926/

1. Problema de investigación

Publicación	Foco de la publicación	Focos en nuestro trabajo
Stacey (1989)	Generalización	Generalización Patrones Representaciones Pensamiento funcional
Castro (1995)	Patrones	
Brizuela y Lara-Roth (2002)	Representación tabular y pensamiento funcional	
Moss y Beatty (2006)	Visualización	
Barbosa (2011)		
Blanton y Kaput (2004, 2011)	Pensamiento funcional	

Objetivos de investigación

Analizar los patrones y representaciones de un grupo de 20 estudiantes de 5º de educación primaria (9 años)

1. Identificar y describir las estrategias utilizadas por los alumnos, prestando especial atención al uso de patrones

2. Identificar y describir las representaciones (verbal, numérica, pictórica, algebraica o tabular) que los alumnos utilizan en las tareas de generalización

2. Marco conceptual

- Patrones-generalización
- Tareas de generalización. Ejemplo genérico: es particular, actúa como representante de su clase. Se trata de alcanzar la generalización a partir de él
- Sistemas de representación
- Funciones (variables, relaciones, sistemas de representación)

3. Método

- 20 estudiantes de 5° de educación primaria (9 años)
- Prueba escrita constituida por una tarea de generalización-ejemplo genérico

Diseño de la prueba

- Variables de tarea:
  - Relación entre variables: (a) directa, (b) inversa o (c) compuesta
  - Generalización: (a) cercana o (b) lejana
  - Sistemas de representación: (a) numérico, (b) verbal, (c) tabular y/o (d) pictórico

Dos estudios piloto

Versión final de la prueba

Tarea definitiva

"Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.

Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado".

Cuestiones de la tarea

1. ¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si se juntan 3 mesas?

2. ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado.

3. Y si tenemos 120 mesas ¿cuántos amigos pueden sentarse a merendar en ellas? Explica como lo has averiguado.

4. Organiza la información sobre el número de mesas y el número de amigos que se pueden sentar utilizando una tabla.

5. Si sabes el número de mesas que hay, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de amigos que pueden sentarse a merendar? Explica cómo lo has pensado.

6. Vamos a utilizar la letra n para indicar el número de mesas que hay. Escribe usando la letra n el número de amigos que se pueden sentar en esas mesas.

7. ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten a merendar 12 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

8. ¿Y para que se sienten a merendar 58 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

9. Si sabes el número de amigos que van merendar, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de mesas que se necesitan para que puedan sentarse? Explica cómo lo has pensado.

Cuestión 2. ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado.

ü Relación directa

ü Generalización cercana

ü Sistema de representación verbal

4. Resultados

Respuestas a cada cuestión	Comparación entre cuestiones
Alumnos en particular	

4. 1. Resultados

Respuestas a cada cuestión	Comparación entre cuestiones
Alumnos en particular	

Resultados Cuestión 2

2. ¿Cuántos pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica cómo lo has averiguado.

	Representación				
	Pictórica				
	C	I	NC	Verbal	Numérica
Estrategia					
Conteo	1, 6, **15**, 18		**11**	1, 6, **11**, **15**, 18	
Uso de patrón					
Mx8				**2**, **4**	**2**, **4**, **7**
Mx2+2	5, 20			5, 13, 16, 20	13, 16
M+M+2	9			9, 17	17
Mx4				**19**	**19**
Respuesta directa					
	3, 10, 12	8		3, 8, 10, 12, **14**	

Rojo = respuestas incorrectas; E = estrategia; C = dibujo completo; I = Dibujo incompleto; NC = dibujo que no corresponde con el patrón. M = número concreto de mesas

Resultados Cuestión 2

- Representación pictórica: útil y eficaz para dar respuesta a esta cuestión
- Representación pictórica y conteo es la combinación más eficaz al resolver la cuestión
- Variedad de patrones
- Utilidad de la representación verbal en las explicaciones

4. 2. Resultados

Respuestas a cada cuestión

Comparación entre cuestiones

Alumnos en particular

Preguntas sobre estrategias

- ¿Qué estrategias resultaron más eficaces en cada cuestión? ¿Y en las cuestiones que comparten la relación directa?
- ¿Se asocia el uso de alguna estrategia a respuestas erróneas o correctas?
- ¿Mantienen los alumnos una misma estrategia para las 4 cuestiones que involucran una relación directa?

Resultados sobre estrategias en cuestiones de "relación directa"

Alumnos	Estrategias			
	Cuestión 1	Cuestión 2	Cuestión 3	Cuestión 5
A1	Conteo	Conteo	M×3	Repite enunciado
A2	Conteo	M×8	M×3	M×3
A3	Respuesta directa	Respuesta directa	M×2+2	M×2+2
A4	Respuesta directa	M×8	M×8	Opera "dividiendo"
A5	Respuesta directa	M×2+2	(M:3) ×8	M×2+2
A6	Respuesta directa	Conteo	M:2+2	M:2
A7	Conteo	M×8	Opera 120+64	Opera "sumando"
A8	Conteo	Respuesta directa	M×2+2	Opera "dividiendo"
A9	N+N+1+1	M+M+1+1	M+M+1+1	M×2+1+1
A10	Respuesta directa	Respuesta directa	M×2+2	M×2+1+1

Alumnos	Estrategias			
	Cuestión 1	Cuestión 2	Cuestión 3	Cuestión 5
A11	Respuesta directa	Conteo	Mx3	Opera 3×8
A12	Respuesta directa	Respuesta directa	M×2+2	Repite enunciado
A13	Respuesta directa	M×2+2	M×2+2	M×2+2
A14	Conteo	Respuesta directa	M×2	M+M+2
A15	Respuesta directa	Conteo	-	-
A16	Conteo	M×2+2	M×2+2	(M-2) ×2+2×3
A17	N+N+2	M+M+2	M×2+2	Respuesta directa
A18	Respuesta directa	Conteo	-	Repite enunciado
A19	Conteo	M×4	M×4	Repite enunciado
A20	Conteo	M×2+2	M×2+2	M×2+2

- Respuestas directas disminuyen y respuestas incorrectas aumentan conforme aumenta el tamaño del caso particular
- Variedad de patrones: correctos e incorrectos
- Tienden a mantener estrategia en diferentes cuestiones (patrón determinado)

- El patrón utilizado con mayor frecuencia fue M×2+2

Se puedan sentar 8 amigos porque se sientan 1 a cada extremo y 3 niños a los lados

(120×2)+2 = 240+2 = 242

Se pueden sentar 242 niños. He multiplicado 120×2 para saber cuantos niños hay en el largo de la mesa +2 de los extremos.

5. Implicaciones docentes

- Algunas ideas para ayudar a los estudiantes a avanzar en el álgebra escolar (*early algebra*)
  - Utilización de la representación pictórica más a menudo y no solo relacionada con casos particulares: relaciones entre variables-generalización
  - Los estudiantes de estas edades son capaces de desarrollar estrategias para llegar a la identificación de patrones y captar la regularidad de forma general (no válida solo para los casos particulares con los que trabajan)
  - Ejemplos de tipos de tareas

6. Estado actual del trabajo y continuación

- Tesis doctoral en realización
- Cuestiones a considerar:
  - Relaciones entre elementos de las funciones
  - Profundizar en la relación estrategias-sistemas de representación utilizados
  - Pensamiento funcional
  - Inclusión de otros sistemas de representación
  - Utilización de materiales manipulativos con estudiantes de educación primaria/educación infantil
- Método: entrevistas

Universidad de los Andes
Centro de Investigación y Formación en Educación - Cife

G•E•M•A•D

Acercamiento del álgebra escolar a los estudiantes

María C. Cañadas
Universidad de Granada
mconsu@ugr.es

Ciclo de conferencias de Gemad

2 de febrero de 2013