

UN ESTUDIO DE SUPERFICIES CON MATHEMATICA

Jesus Flores – Cecilia Gaita – Nancy Saravia
jvflores@pucp.pe – cgaita@pucp.edu.pe – nsaraviam@pucp.edu.pe
IREM – Pontificia Universidad Católica del Perú

Tema: TIC y matemática

Modalidad: CB

Nivel educativo: Terciario

Palabras clave: superficies, Mathematica, visualización.

Resumen

La experiencia se desarrolló en un primer curso de matemática con estudiantes de la Facultad de Arquitectura y Urbanismo de la PUCP. Tuvo por finalidad explorar las representaciones gráficas de los estudiantes a partir de la ecuación de una superficie. Esta exploración fue realizada primero con lápiz y papel y después con el software Mathematica. Se eligió este software porque, entre muchas de sus funciones, permite representar superficies estáticas o dinámicas. Se trabajó una actividad introductoria para familiarizar a los estudiantes con el comando ContourPlot3D del Mathematica, que fue empleado posteriormente. Para el análisis de las respuestas se consideraron algunos elementos teóricos sobre visualización propuestos por Duval (2002; 2005). La identificación de distintas secciones cónicas que se generan cuando la superficie se interseca con planos paralelos a los planos coordenados XY, YZ, o XZ usando el ambiente tecnológico favoreció la adopción de una posición dinámica respecto al objeto matemático abordado, situación que no se consigue cuando se trabaja solamente con lápiz y papel. Además, este software permitió que los estudiantes verifiquen y/o validen sus representaciones gráficas.

Introducción

A partir de nuestra experiencia docente en el curso de Matemática I de la Facultad de Arquitectura y Urbanismo, hemos observado que los estudiantes tienen dificultades para identificar las distintas secciones cónicas que se generan cuando se interseca una superficie con planos paralelos a los planos coordenados XY, YZ, o XZ.

En el área de didáctica de las matemáticas, investigaciones como las de Salazar et al. (2012a; 2012b) muestran que existen preocupaciones cognitivas con relación a la matemática o a los significados construidos para su enseñanza cuando se desarrollan actividades mediadas por ambientes tecnológicos. Los investigadores afirman que al estudiar el impacto de la tecnología en la enseñanza de la matemática se debe considerar necesariamente relaciones recíprocas entre los ambientes tecnológicos y el desarrollo del pensamiento matemático. En cuanto al uso de ambientes tecnológicos, escogimos el software Mathematica porque consideramos que puede ser utilizado como mediador en

la enseñanza y aprendizaje de diferentes contenidos matemáticos, en particular en el tema de superficies.

Elementos teóricos

Tomamos como base teórica las investigaciones de Duval (2002; 2005) en lo que se refiere a visualización. Al respecto, el autor hace una distinción entre visión y visualización señalando que la visión como percepción, envuelve dos funciones cognitivas: función epistemológica, en la que el acceso es directo a cualquier objeto físico, a cualquier objeto que se ve. En ese sentido, la percepción visual siempre es tomada como modelo de la noción epistemológica de intuición; y la función sinóptica en la que la visión parece dar inmediatamente la aprehensión de cualquier objeto o situación.

El investigador señala que no puede existir visión sin exploración. Afirma que la diferencia entre visión y visualización consiste en que la primera permite un acceso directo al objeto y la segunda, se basa en la producción de una representación semiótica, “[...] la representación semiótica muestra relaciones, o sea, muestra la organización de relaciones entre unidades significativas. [...] no hay comprensión sin visualización”. (Duval, 2002. p. 321), ya que la visualización es una actividad cognitiva es intrínsecamente semiótica.

El investigador afirma que la visión provee un acceso directo al objeto, mientras que la visualización está basada en la producción de representaciones semióticas y por ello requiere de reglas que orienten la combinación de signos, de manera que el producto obtenido de la representación tenga sentido. Esas posibilidades de combinación de los sistemas de representación conceden a la visualización un potencial heurístico.

El software Mathematica

El Mathematica permite desarrollar cálculos simbólicos y numéricos, construir gráficos, editar texto, etc. lo cual lo convierte en una herramienta potente en el proceso de enseñanza y de aprendizaje. En este trabajo usamos específicamente el comando ContourPlot3D para graficar superficies e identificar las secciones cónicas que se generan cuando se interseca una superficie con planos paralelos a los planos coordenados XY, YZ, o XZ.

Un ejemplo sobre el comando ContourPlot3D

Para graficar la superficie S de ecuación $x^2 - 4z = 0$, ingresamos el siguiente comando:

```
ContourPlot3D[{x^2-4z == 0}, {x, -10, 10},
{y, -10, 10}, {z, -10, 10}, AxesLabel -> {"X", "Y", "Z"}]
```

Donde,

$\{x^2 - 4z == 0\}$ Es la superficie a graficar, note que tiene que digitar ($==$), que es característica del comando ContourPlot3D.

$\{x, -10, 10\}$ Indica el “dominio de definición” para x (de manera similar para y , y para z), ya que el software grafica una parte de la superficie.

AxesLabel \rightarrow {"X", "Y", "Z"} Nombra a los ejes correspondientes.

Shift + Enter Permite ejecutar el comando ContourPlot3D, para visualizar la superficie deseada.

En la figura 1, observamos la gráfica de la superficie S , después de ingresado el comando correspondiente.

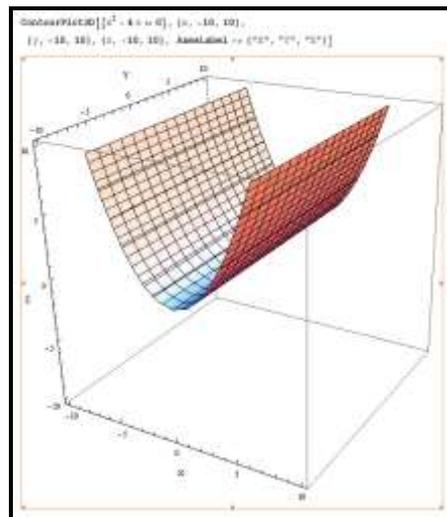


Figura 1. Gráfica de la superficie S

Percibimos que en la representación gráfica de la superficie hecha por el software, los ejes son presentados de manera diferente al convencional, ya que la simulación es presentada en una “caja”. Señalamos que los ejes coordenados deben tener el mismo “dominio de definición” para no distorsionar la parte de la superficie representada.

Descripción y análisis de las actividades desarrolladas

Participaron veinte estudiantes del primer curso de matemáticas de la Facultad de Arquitectura y Urbanismo de la PUCP. En la primera etapa, los alumnos desarrollaron la actividad con lápiz y papel; mientras que en la segunda etapa, usaron el *Mathematica*.

En el presente artículo, analizamos la producción del estudiante Miguel en la primera y segunda etapa del trabajo.

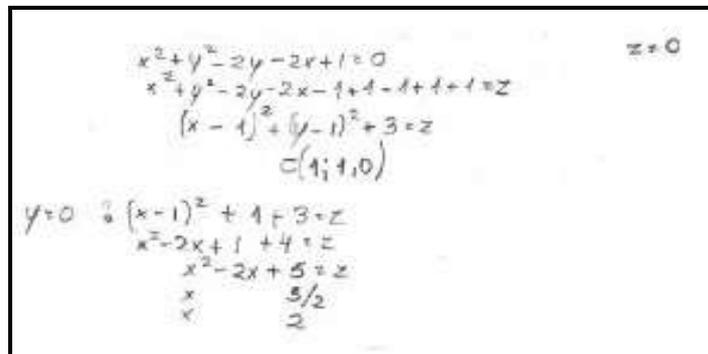
Primera etapa: actividad con lápiz y papel

Esta actividad consta de tres partes. Mostramos el trabajo de Miguel para cada parte con su respectivo análisis.

Considere la superficie S de ecuación $x^2 + y^2 - 2y - 2x + 1 = z$.

- a) **Escriba las ecuaciones que resultan de cortar la superficie S con los planos coordenados XY , YZ y XZ , en caso de obtener secciones cónicas, señale su nombre, centro, vértices y focos, según corresponda.**

La figura 2, presenta los tratamientos (registro algebraico) realizados por Miguel al desarrollar este ítem.



$$\begin{aligned}
 &x^2 + y^2 - 2y - 2x + 1 = z \\
 &x^2 + y^2 - 2y - 2x - 1 + 1 - 1 + 1 + 1 = z \\
 &(x-1)^2 + (y-1)^2 + 3 = z \\
 &\quad\quad\quad C(1; 1, 0) \\
 \\
 &y=0 \quad (x-1)^2 + 4 = 3+z \\
 &\quad\quad x^2 - 2x + 1 + 4 = z \\
 &\quad\quad x^2 - 2x + 5 = z \\
 &\quad\quad x \quad \quad \quad 5/2 \\
 &\quad\quad x \quad \quad \quad 2
 \end{aligned}$$

Figura 2. Respuesta de Miguel para la parte a

Observamos que Miguel realizó tratamientos en el registro algebraico para identificar las ecuaciones de las posibles secciones cónicas que resultan de cortar S con los planos coordenados XY y XZ . El estudiante identificó ($z=0$) la ecuación de una circunferencia, con centro en el punto $(1, 1, 0)$ a pesar de cometer errores en su tratamiento algebraico. Cuando realizó otro tratamiento en el registro algebraico ($y=0$), observamos que no concluyó. Sin embargo, pensamos que intentó identificar la ecuación de una parábola.

- b) **Corte la superficie S con dos planos diferentes a los planos coordenados (elegidos por usted), después grafique la proyección de cada una de estas intersecciones sobre el plano coordenado paralelo al plano de intersección.**

Observamos (ver figura 3) que el estudiante al hacer la conversión del registro algebraico (tomando aspectos de a)) al registro gráfico (intersección de S con el plano $z=1$), representa una circunferencia.

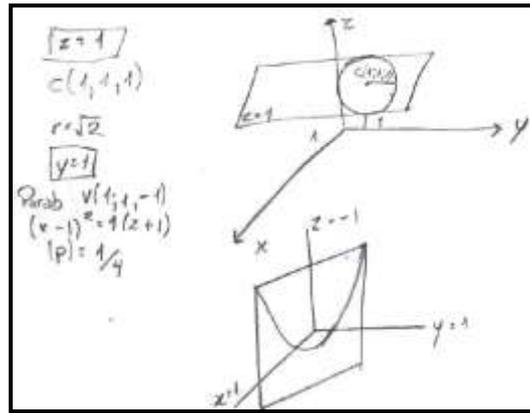


Figura 3. Respuesta de Miguel para la parte b

Igualmente, identifica una parábola cuando interseca la superficie S con el plano $y=1$. Esto significa que Miguel consiguió identificar las secciones cónicas y realizó conversiones correctas al registro gráfico.

c) A partir de los cortes obtenidos en los dos ítems anteriores, bosqueje la gráfica de la superficie.

Es en esta parte que Miguel presenta problemas al momento de traducir todas las informaciones de los ítems a) y b) al registro gráfico (ver figura 4).

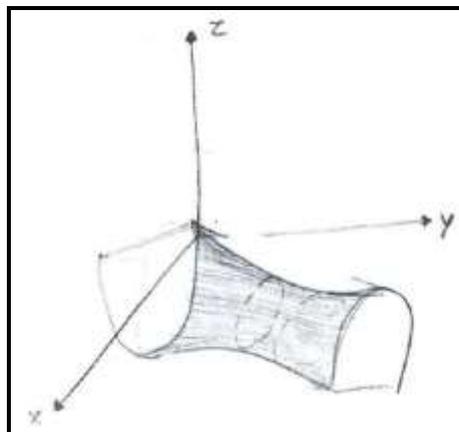


Figura 4. Bosquejo de la superficie S

A pesar de identificar por lo menos dos ecuaciones (circunferencia y parábola) y de haber representado, por separado, las intersecciones de S con los planos paralelos a los planos XY y XZ, se equivocó al bosquejar la gráfica de la superficie solicitada. Pensamos que esto sucedió porque al realizar el bosquejo no logró representar correctamente los planos paralelos a los planos coordenados. Además, advertimos que paso del registro algebraico al gráfico no es trivial ya que exige una coordinación entre sus unidades significativas.

Segunda etapa: actividad con el software Mathematica

Antes de comenzar la segunda parte, trabajamos una actividad introductoria con el comando ContourPlot3D. Para ello, explicamos el significado de cada parte del comando, etc. Durante el desarrollo de esta actividad introductoria dada la ecuación de diferentes superficies pedimos a los estudiantes escribirlas en el “lenguaje algebraico” del Mathematica es decir, los estudiantes debían usar el comando ContourPlot3D para representarlas (como mostramos en el ejemplo).

A seguir, presentamos la actividad de la segunda parte (desarrollada por el mismo estudiante) en la que se pidió realizar las siguientes acciones:

- a) Utilice el ContourPlot3D e ingrese los parámetros necesarios para graficar la superficie S de ecuación $x^2 + y^2 - 2y - 2x + 1 = z$.**

Miguel ingresó correctamente los parámetros del comando y observamos que cambió el “dominio de definición” de como mostramos a seguir:

```
ContourPlot3D[{x^2+y^2-2y-2x+1-z == 0},{x, -5,5},{y, -5,5},{z, -5,5},
    AxesLabel->{"X", "Y", "Z"}]
```

Lo que significa que está familiarizado con este comando, pues el profesor-investigador le hizo algunas preguntas sobre el significado de cada parte y él consiguió explicarlas verbalmente. Es decir, Miguel consiguió hacer la traducción de la ecuación de la superficie S por otra representación “algebraica” del software.

- b) Luego, mantenga presionado el botón izquierdo del mouse, manipule y arrastre ¿es la misma gráfica que Ud. bosquejó a lápiz y papel? Explique sus observaciones.**

Como observamos en la figura 5, Miguel, usó el comando ContourPlot3D, y consiguió graficar el paraboloides correspondiente a la ecuación ingresada, luego arrastró el mouse y lo observó desde diferentes puntos de vista.

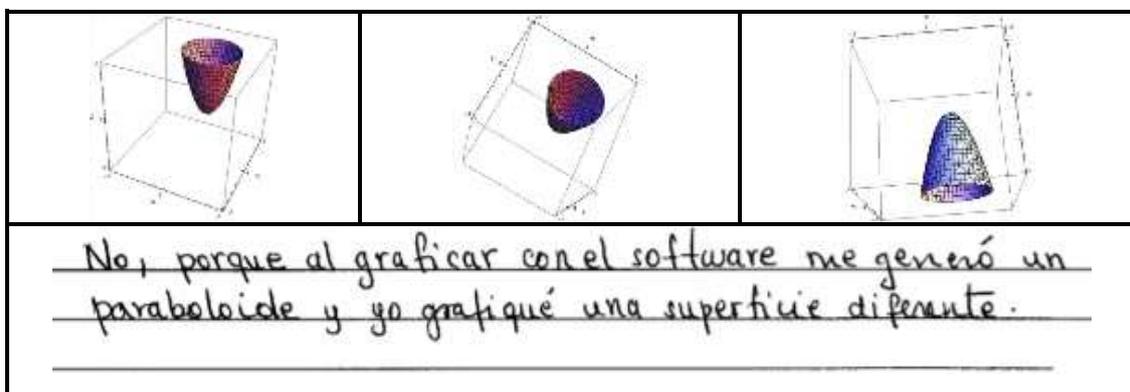


Figura 5. Gráficas de la superficie S en el Mathematica

El estudiante descubrió que su bosquejo estaba equivocado porque en la actividad la representó otra superficie. La representación gráfica del Mathematica le permitió observar la gráfica desde diferentes puntos de vista. Asimismo, lo ayudó a identificar la superficie que corresponde a la ecuación presentada en la actividad es decir, a coordinar dos registros de representación semiótica: el algebraico y el gráfico, por lo tanto, favoreció al desarrollo de la visualización del estudiante.

c) Intersecte la superficie S señalada en a) con los planos $z=0$ y $z=2$. ¿qué cónica observa cuando interseca la superficies S con estos planos? Justifique su respuesta.

El procedimiento de este ítem es mostrado en la figura 6. Miguel interseca los planos $z=0$ y $z=2$ con la superficie S graficada en el ítem a). Además el estudiante modificó el punto de vista y consiguió observar una circunferencia generada al intersecar la superficie con los planos anteriormente señalados.

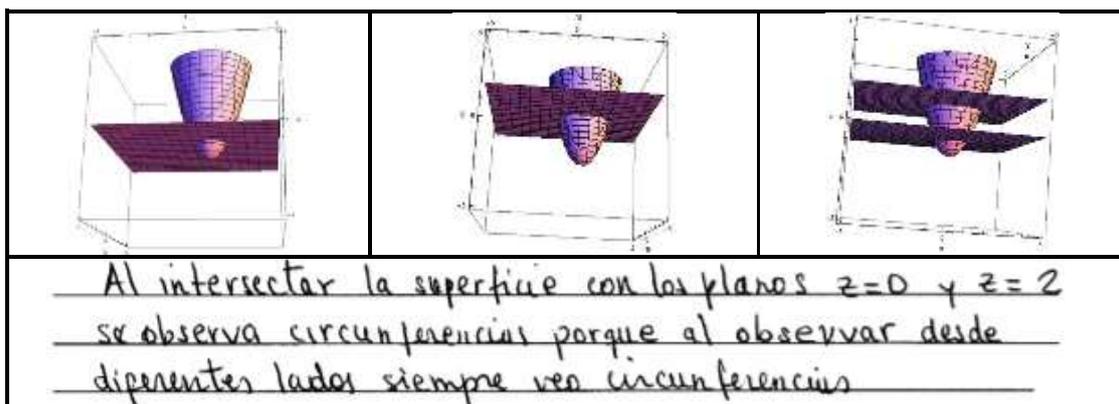


Figura 6. Intersección de S con $z=0$ y $z=2$

El trabajo realizado con la ayuda del software facilitó al estudiante la observación de la representación desde diferentes puntos de vista y lo ayudó a percibir que siempre se genera una circunferencia. Lo mismo ocurrió cuando, en el ítem d), se pidió que interseca la superficie S con el plano $x=0$ (ver figura 7).

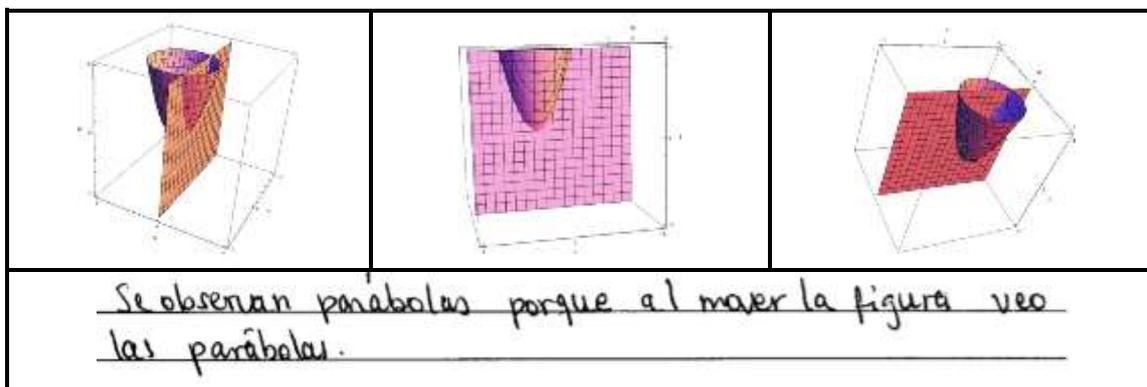


Figura 7. Intersección de S con $x=0$

Es decir, que aquí también el estudiante constató que al intersecar la superficie S con el plano $x=0$ se obtiene una parábola.

Lo que muestra que Miguel se apropió del comando y además que consiguió relacionar la actividad que había desarrollado con lápiz y papel con la que trabajó usando el Mathematica.

Algunas reflexiones

En general, las actividades analizadas en la que se hizo uso del lápiz y papel y del Mathematica favorecieron el desarrollo de la visualización de los estudiantes. Además, el uso del comando ContourPlot3D ayudó a adoptar una posición dinámica respecto al objeto matemático abordado, situación que no se consigue cuando se trabaja con lápiz y papel. Es decir que la posibilidad de observar la representación gráfica de una superficie desde diferentes puntos de vista, en la segunda parte permitió, de cierta forma, validar las ecuaciones de las secciones cónicas y los bosquejos hechos por los estudiantes con lápiz y papel. Finalmente, resaltamos que el uso combinado del lápiz y papel y de un ambiente tecnológico, como es el Mathematica, favorecen el aprendizaje de cualquier contenido matemático.

Referencias bibliográficas

- Duval, R. (2002). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. Representations and Mathematics Visualization. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 311-335. Cinvestav-IPN: Fernando Hitt.
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.
- Salazar, J. V. F.; Malaspina, U. J.; Gaita, C.; Ugarte, F. (2012a). *Three-Dimensional Geometric Transformations Using Dynamic Geometry: A View from the Instrumental Genesis*, 12th International Congress on Mathematical Education. Korea: ICME 12. 1, pp. 2435-2443.
- Salazar, J. V. F.; Gaita, C.; Malaspina, U. J.; Ugarte, F. (2012b). *The Use of Technology and Teacher Training: An Alternative for the Teaching of Spatial Geometry*, 12th International Congress on Mathematical Education. Korea: ICME 12. 1, pp. 3774-3781.