

## CONSTRUÇÃO DE CURVAS PARAMETRIZADAS: ATIVIDADES ENVOLVENDO O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Francisco Regis Vieira Alves  
[fregis@ifce.edu.br](mailto:fregis@ifce.edu.br)

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE

Tema: Pensamento Matemático Avançado

Modalidade: Taller

Nível educativo: Terciário – Universitário

Palavras chave: Curvas parametrizadas, Software Geogebra, Visualização, Construção.

### Resumen

*Neste minicurso apresentaremos atividades envolvendo a construção de curvas parametrizadas. No rol das categorias de curvas definidas num intervalo da reta com contradomínio no plano, destacamos: curvas parametrizadas envolvendo funções periódicas, funções racionais, curvas envolvendo funções transcendentais e irracionais. Nas situações problemas a serem discutidas, a construção do objeto deverá ser um problema coletivo de produção de conjecturas e participação dos participantes. No que concerne ao uso do software Geogebra, indicaremos situações que permitem a visualização de pontos estacionários, pontos de cúspide, propriedades topológicas vinculadas a cada parametrização. Tencionamos, no fim do minicurso, proporcionar um entendimento cinemático-dinâmico e geométrico deste conceito complexo do ensino superior.*

### 1. Introdução

Neste minicurso discutiremos a construção de curvas parametrizadas, com uma análise local de suas propriedades. Nas atividades doravante apresentadas, adotaremos determinadas parametrizações  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  e, seus respectivos vetores velocidade  $v(t) = \alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$  e a descrição de sua aceleração  $a(t) = \alpha''(t) = (x''(t), y''(t))$ . Ademais, analisaremos o comportamento dos vetores velocidade, em cada por, pela expressão  $\frac{dy}{dx}$  e de sua aceleração  $\frac{d^2y}{dx^2}$  (descrição do comportamento de sua concavidade). Empregaremos ainda as noções de pontos estacionários, pontos de cúspide e a descrição do comportamento assintótico ao traço de cada curva. Ao final, os dados coligidos, com origem no quadro analítico, e os dados produzidos com amparo no *software Geogebra*, devem fornecer elementos suficientes para a elaboração do traço, sobretudo, a análise do comportamento de cada trajetória determinada por cada curva.

## 2. Atividades apoiadas na tecnologia

Nas atividades abordadas nesse minicurso, o apoio e averiguação de dados produzidos pelo *software* assumem uma condição *sine qua non* para a evolução de cada atividade. Vamos considerar as seguintes atividades:

(a) Considerando a parametrização  $\alpha(t) = (t^2 + t, t^2 - 3t + 5)$ . Decidir se ocorre alguma mudança de concavidade no traço desta curva. Extrair conclusões com apoio na fig. 1.

Comentários: Nesta atividade, determinamos o vetor velocidade  $\alpha'(t) = (2t+1, 2t-3) = (0,0)$  (\*) e impomos a condição para determinar pontos estacionários. Reparemos que não há solução para o sistema (\*). Agora, a descrição de

sua declividade  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t-3}{2t+1}$ . Assim, para  $t = \frac{3}{2}$  teremos um vetor paralelo ao

eixo Ox. Enquanto que para  $t = -\frac{1}{2}$  esperamos um vetor paralelo ao eixo Oy. Fazendo

as contas, se tem que  $\alpha(\frac{3}{2}) = (\frac{15}{4}, \frac{11}{4})$  e  $\alpha(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{4}, \frac{27}{4})$ . Indicamos na figura sua

posição. Vale comentar que não ocorrem pontos de cúspide, ou seja, parâmetros correspondentes  $t = t_0$  que anulem  $\frac{dy}{dx}(t_0) = \frac{0}{0}$ . Daí, seu traço não pode possuir bicos e

o caráter de suavidade é evidenciado (pelo comportamento das retas tangentes ao longo da trajetória). Percebemos isso na figura 1 e podemos comparar com o traço exibido na figura 2, mais adiante.

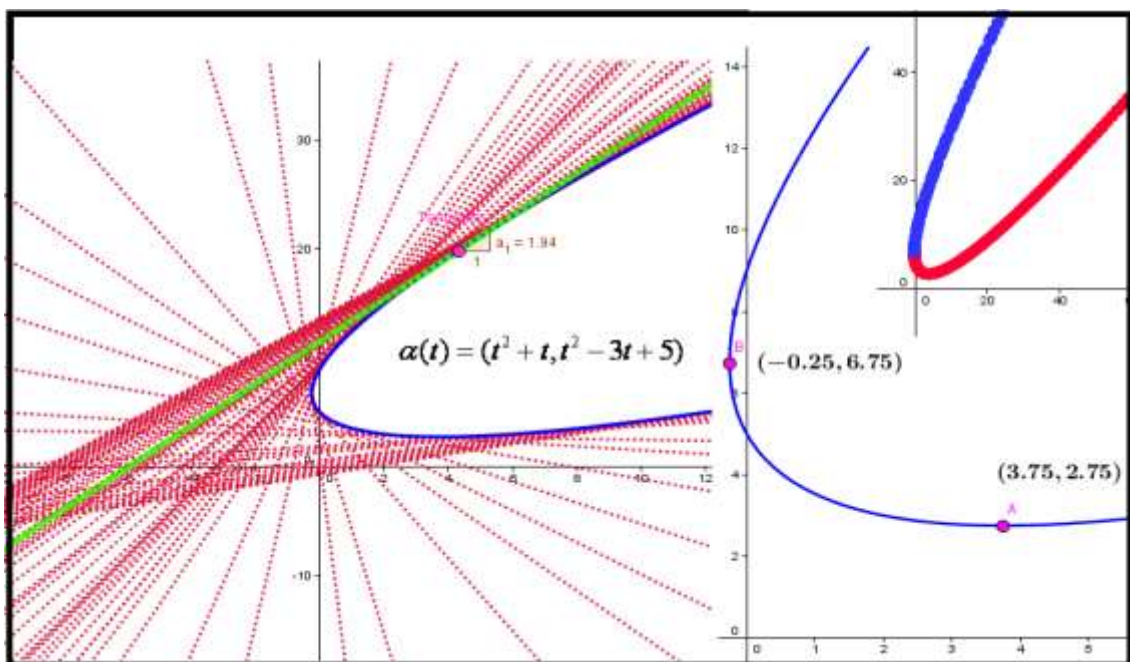


Figura 1. Descrição do traço da curva e a posição dos vetores paralelos aos eixos

Sua declividade será descrita por  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt})}{\frac{dx}{dt}} = \frac{8}{(2t+1)^3}$ . De acordo com o sinal

desta função, descrevemos o sentido da concavidade. Mas, nesse caso, é imediata

análise  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{8}{(2t+1)^2(2t+1)} = \begin{cases} > 0 \text{ se } t > -1/2 \therefore \cup_{\text{sentido}} \\ < 0 \text{ se } t < -1/2 \therefore \cap_{\text{sentido}} \end{cases}$ . No canto direito, superior

(figura 1, lado direito), indicamos o local exato onde ocorrerá a mudança de concavidade. A resposta é sim e teremos, de fato, duas concavidades. Tal ilação pode contrariar a ideia intuitiva que carregamos sobre a noção do sentido da concavidade de uma função.

b) Vamos considerar a seguinte curva  $\alpha(t) = (t^3 - 4t^2 + 5t, 3t^2 - 8t + 5)$ . Decidir se em seu traço ocorrem vetores paralelos aos eixos e se teremos pontos de cúspide.

Comentários: Seu vetor velocidade será dado por  $\alpha'(t) = (3t^2 - 8t + 5, 6t - 8) = (0, 0)$  para indicar pontos estacionários. Obteremos que  $t = 4/3$  e  $3t^2 - 8t + 5 = 0$ , cujas raízes

são  $t = 1$  e  $t = 5/3$ . Reparemos que não ocorrem parâmetros que  $\frac{dy}{dx}(t_0) = \frac{0}{0}$ , como no

caso da seguinte parametrização  $\beta(t) = (t^3, t^2)$ . Na figura 3, exibimos o gráfico de  $dy/dt$  (em azul),  $dx/dt$  (em vermelho) e, por fim, da função  $dy/dx$  (em cor rosa).

A aceleração de um ponto material que se desloca, segundo a trajetória que indicamos na figura 2, é dada pelo vetor  $\alpha''(t) = (6t - 8, 6) \neq (0, 0)$ . Por outro lado, no caso da parametrização  $\beta(t) = (t^3, t^2)$ , se tem que  $\beta'(t) = (3t^2, 2t)$  e  $\beta''(t) = (6t, 2) \neq (0, 0)$ . Nesse caso, na origem, divisamos um ponto no qual a curva não é lisa (possui bicos).

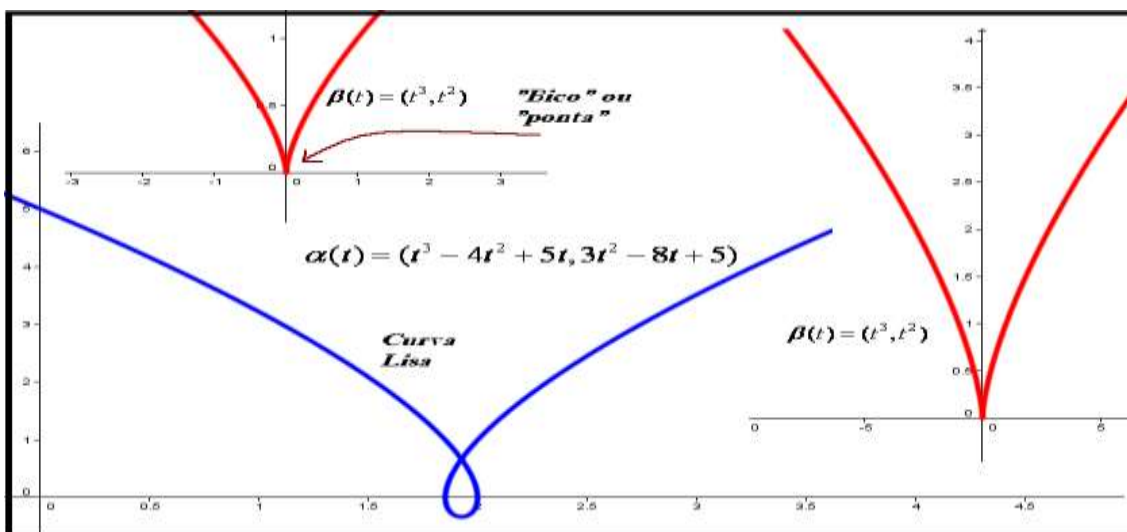


Figura 2. Descrição de curva lisa e curva com ponta ou bico (não lisa)

Passaremos, pois, ao estudo da declividade dos vetores que tangenciam o traço em azul

(figura 3). Nesse sentido, obtemos que  $\frac{dy}{dx} = \frac{6t-8}{3t^2-8t+5} = \begin{cases} // Ox \leftrightarrow t=4/3 \\ // Oy \leftrightarrow t=1 \text{ e } t=5/3 \end{cases}$ . Com

base nesses parâmetros e nos gráfico abaixo, vamos construir a seguinte tabela 1.

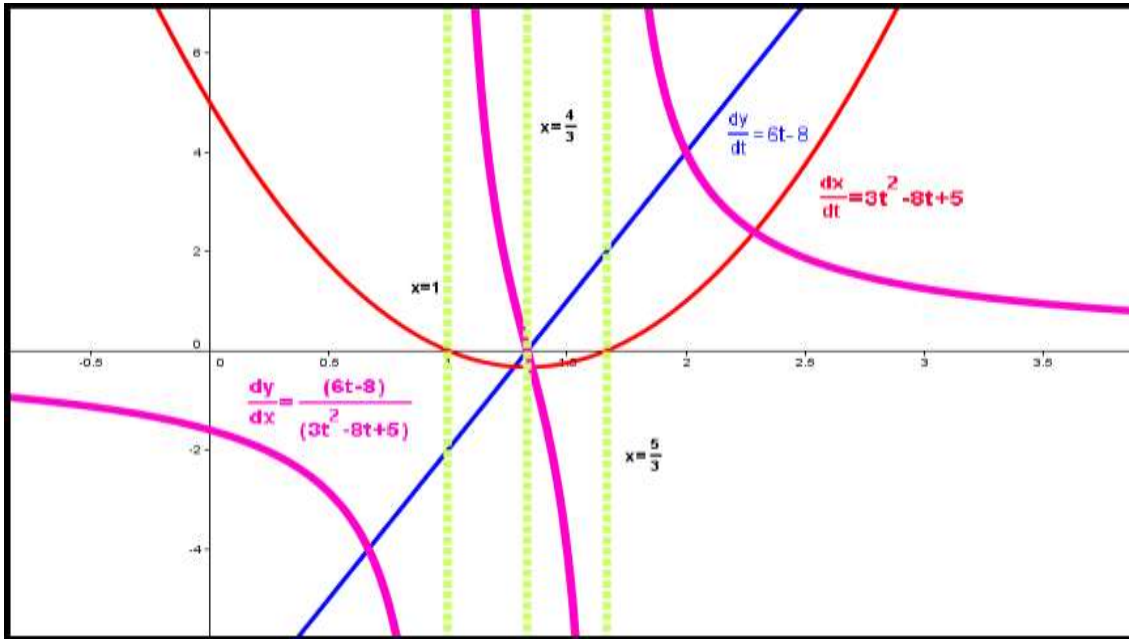


Figura 3. Gráficos correspondes às componentes do vetor velocidade e a função dy/dx

Na tabela 1 indicamos os elementos extraídos diretamente do quadro gráfico-geométrico que exibimos na figura 3.

Tabela 1: Construção da tabela que indica o comportamento do traço da curva

Parâmetros	$t < 1$	$1 < t < 4/3$	$4/3 < t < 5/3$	$t > 5/3$
$dy/dt$	—	—	+	+
$y(t)$	Decrescente ↓	Decrescente ↓	Crescente ↑	Crescente ↑
$dx/dt$	+	—	—	+
$x(t)$	Crescente →	Decrescente ←	Decrescente ←	Crescente →
<b>Curva</b>	(1)	(2)	(3)	(4)

Fonte: Elaboração do autor.

Por fim, na figura 4, associamos os vetores 1, 2, 3 e 4 às respectivas posições ao longo da trajetória, quando os valores correspondentes dos parâmetros crescem. Os vetores abaixo com o que indicamos na tabela 1 (em vermelho) devem ser equi-polentes. Nesse momento, a construção e o esboço final do traço correspondente à parametrização  $\alpha(t) = (t^3 - 4t^2 + 5t, 3t^2 - 8t + 5)$  devem ser oriundos de uma construção e da participação coletiva dos alunos participantes. Reparemos, todavia, o caráter dinâmico proporcionado pelo *software Geogebra*.

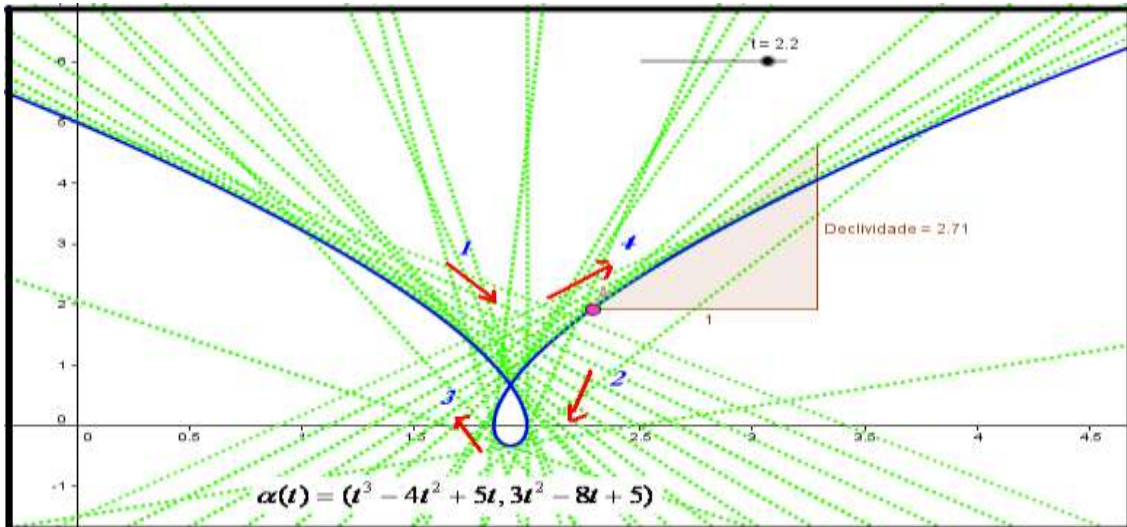


Figura 4. Descrição do comportamento das retas tangentes ao traço da parametrização

c) Vamos tomar agora  $\alpha(t) = \left( \frac{t^3}{(t-1)(t+2)}, \frac{t^2}{t-1} \right)$  parametrização descrita em termos de funções racionais. Exibir a equação analítica de suas assíntotas, caso existam.

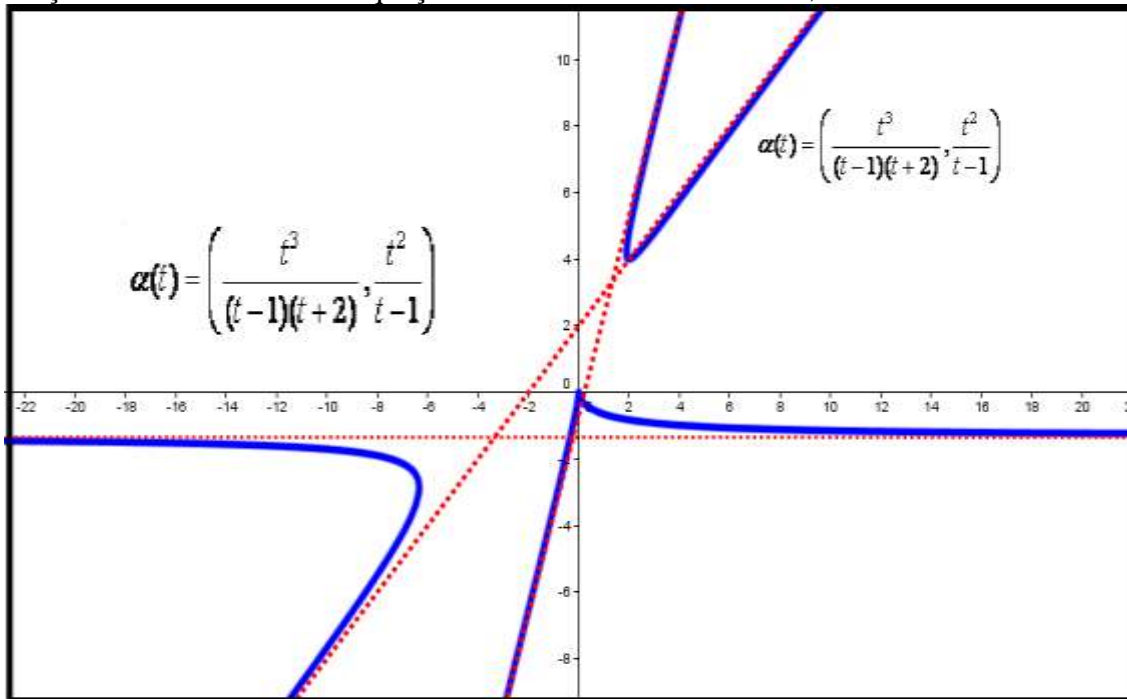


Figura 5. Comportamento do traço e suas assíntotas

Comentários: Vamos tomar a parametrização acima  $\alpha(t) = \left( \frac{t^3}{(t-1)(t+2)}, \frac{t^2}{t-1} \right)$ .

Notamos que nos pontos  $t = 1$  e  $t = -2$  correspondem às descontinuidades de cada função componente. Vamos apoiar nossa ação em relação ao comportamento geométrico dos objetos que manifestam comportamento assintótico. Para tal, indicamos

os seguintes limites  $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow -2} x(t) = \infty \\ \lim_{t \rightarrow -2} y(t) = -4/3 = b \end{cases}$  será uma assíntota horizontal. Reparemos



ainda que  $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow 1} x(t) = \infty \\ \lim_{t \rightarrow 1} y(t) = \infty \end{cases}$  e, por outro lado, se tem que  $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\frac{t^2}{t-1}}{\frac{t^3}{(t-1)(t+2)}} \stackrel{t \rightarrow 1}{=} \frac{(t+2)}{t} = 3$ .

E ainda que  $y(t) - 3 \cdot x(t) = -\frac{2t^2}{t+2} \xrightarrow{t \rightarrow 1} -\frac{2}{3}$ . A partir dessas informações, indicamos

$y = 3x - \frac{2}{3}$  uma assíntota oblíqua. Além disso, percebemos que valem  $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty \\ \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty \end{cases}$  e

que  $\frac{y(t)}{x(t)} \stackrel{t \rightarrow \infty}{=} \frac{(t+2)}{t} = 1$  e vale que  $y(t) - 1 \cdot x(t) = \frac{2t^2}{(t+2)(t-1)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 2 \therefore y = x + 2$  que será a

outra assíntota oblíqua. Reparemos que, nesta categoria de atividade, instigamos os solucionadores de problemas realizarem o sentido inverso. Ou, melhor dizendo, com origem no quadro gráfico-geométrico, os estudantes devem extrair elementos, apoiados na visualização, com vistas à determinação analítico-algébrica dos elementos exibidos na figura 5.

d) Vamos tomar agora  $\alpha(t) = \left( \int_0^t \frac{\cos(u)}{1+u^2} du, \int_0^t \frac{\text{sen}(u)}{1+u^2} du \right)$ . Observamos que se veto

velocidade é descrito por  $\alpha'(t) = \left( \frac{\cos(t)}{1+t^2}, \frac{\text{sen}(t)}{1+t^2} \right)$  (ver seu gráfico fig. 6). Mas,

identificando os pontos estacionários  $\alpha'(t) = (0,0)$ , vemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\text{sen}(t)}{1+t^2}}{\frac{\cos(t)}{1+t^2}} = \frac{\text{sen}(t)}{\cos(t)} = \begin{cases} // Ox \leftrightarrow t = k \cdot \pi \text{ com } k \in \mathbb{Z} \\ // Oy \leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \text{ com } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Podemos ainda investigar o comportamento de convergência das seguintes funções coordenadas  $x(t) = \int_0^t \frac{\cos(u)}{1+u^2} du$  e  $y(t) = \int_0^t \frac{\text{sen}(u)}{1+u^2} du$  e repararemos que

$$\left| \frac{\cos(u)}{1+u^2} \right| \leq \frac{1}{1+u^2} \text{ e } \left| \frac{\text{sen}(u)}{1+u^2} \right| \leq \frac{1}{1+u^2} \text{ e, a partir do Cálculo em Uma Variável Real,}$$

sabemos que  $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+u^2} du < \infty$ . Ou seja, as integrais indicadas em cada componente

acima convergem. Todavia, repararemos que se pode mostrar que  $x(-t) = -x(t)$  e  $y(-t) = -y(t)$ ,  $\forall t \in [0, +\infty)$ . A partir desta propriedade, admitiremos que ocorrem as

seguintes convergências  $\lambda = \int_0^{\infty} \frac{\cos(u)}{1+u^2} du$  e  $\mu = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(u)}{1+u^2} du$ . Daí, do ponto de vista

geométrico, a curva possui um traço, cujo limite ocorre nos pontos  $(\mu, \lambda)$  e  $(-\mu, \lambda)$ . Por fim, com o recurso ao software, determinamos os valores  $0,58 \approx \lambda$  e  $0,65 \approx \mu$ .

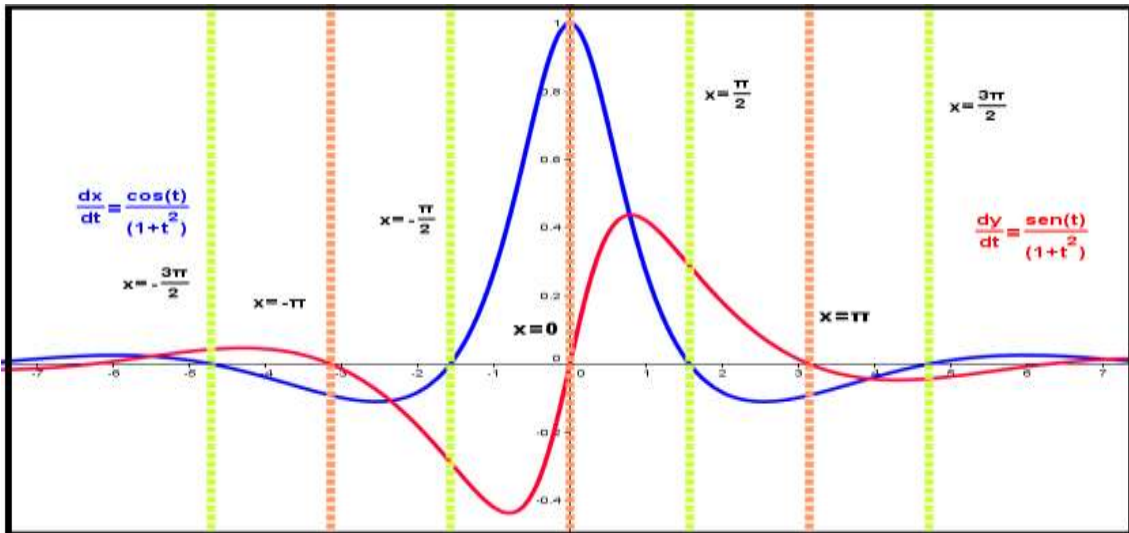


Figura 6. Descrição do comportamento das coordenadas do vetor velocidade associada à curva parametrizada

Para concluir, vale indicar determinadas parametrizações (de funções racionais) que o software *Geogebra* manifesta erros e determinados fatores limitantes para a apresentação do traço. Com efeito, quando usamos o comando que indicamos na figura 7, divisamos um trecho do traço que não é representado pelo programa. Neste sentido, podemos explorar a existência de uma reta tangente ao longo da trajetória, com exceção no trecho que tende a possuir uma posição paralela ao eixo das ordenadas.

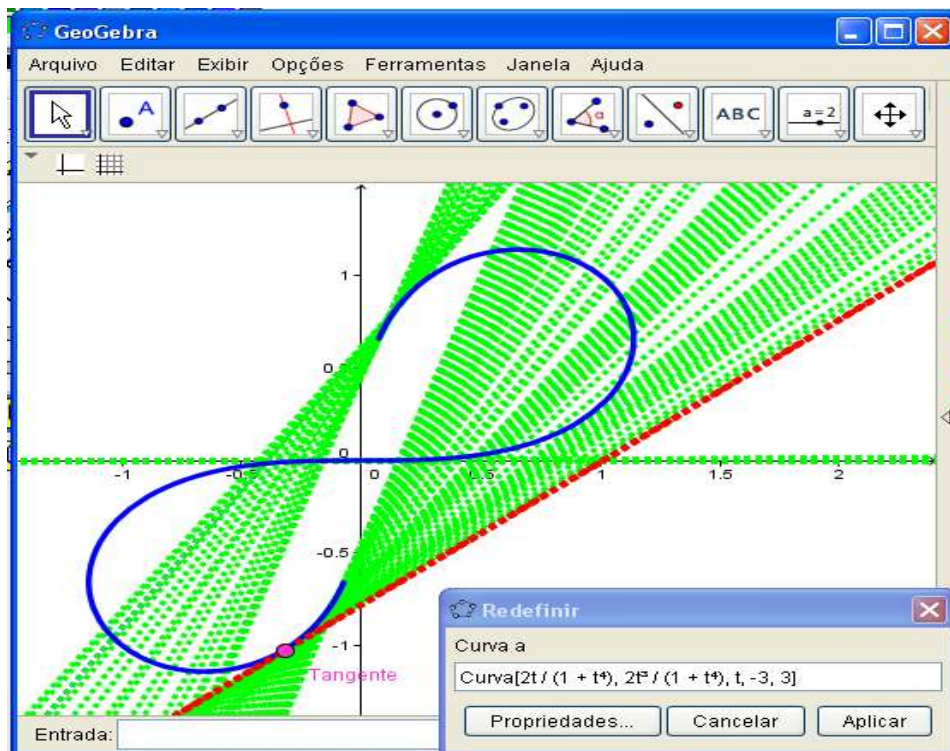


Figura 7. Limitações do software na descrição de curvas parametrizadas

## Considerações finais e recomendações

Os compêndios especializados de Cálculo no Brasil perdem a oportunidade de exploração vários conceitos que permitem uma interpretação gráfico-geométrica imediata (ALVES, 2012; ALVES & BORGES NETO, 2012). Ademais, uma mediação didática que se restringe aos instrumentos lápis/papel, em detrimento do uso da tecnologia, tende a reforçar os aspectos negativos registrados nas abordagens dos autores de livros de Cálculo (GUIDORIZZI, 2010; STEWART, 2001).

Assumimos, pois, uma abordagem que detém o potencial de suavizar os elementos relatados no parágrafo anterior. Daí, neste minicurso, com o apoio do *software Geobra*, exibimos gráficos complexos e efetuamos cálculos algébricos, com arrimo em seu pacote de computação algébrica que tornariam a tarefa fastidiosa ao aprendiz.

Para concluir, podemos constatar nos livros da História da Matemática (EDWARDS, 1969; YATES, 1947), os vários momentos constituídos pelos problemas enfrentados pelos matemáticos do passado que, de modo direto ou indireto, envolviam a descrição de uma curva parametrizada, sob um viés cinemático. Deste modo, com ênfase na visualização, nossas atividades de construção de curvas buscam preservar uma sintonia com o percurso histórico de inúmeros conceitos matemáticos.

## Referências

- Alves, F. R. V. & Borges Neto, Hermínio. (2012). Aplicação e exploração da tecnologia no ensino do Cálculo: os softwares Geogebra e o CAS Maple. *Anais da VI Bienal em Matemática*. Campinas. p. 1-10. Acessado em: 02 de fev. 2013. Disponível em: <http://bienaldematematica.org.br/sites/bienaldematematica.org.br/files/MinicursoSA.pdf>
- Alves, F. R. V. (2012). Engenharia Didática para a construção de gráficos no Cálculo: experiência num curso de Licenciatura. *V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Petrópolis, 1-21. Acessado em: 3 de fev. 2013.. Disponível em: <http://sipemsbem.lematec.net/CD/?page=publications&subpage=gts&language=br>.
- Edwards, C. H. (1969). *The Historical development of the Calculus*. New York: Springer. 362f.
- Guidorizzi, H. (2010). *Um curso de Cálculo*. v. 2, São Paulo: FTC.
- Yates, R. C. (1947). *A Handbook on Curves and their Properties*. Michigan: An Arbor.
- Stewart, J. (2001). *Cálculo*. v. II, São Paulo: Thomson.