CB-493

CURVAS CON RITMO EN LA REALIDAD

Cristina Sánchez González
cris.sangon@gmail.com
I.ES. Maestro Juan Rubio (La Roda -Albacete-). España.

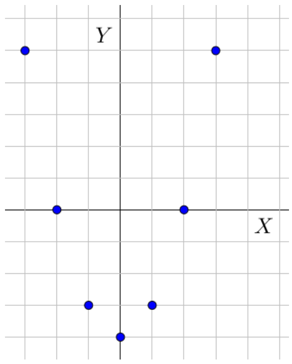
Núcleo temático: I. Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Secundaria.
Palabras clave: funciones elementales, gráficas, rapidez de crecimiento, entorno.

Resumen
En la realidad hay una enorme diversidad de situaciones que pueden modelizarse a través de las funciones elementales, por lo que conocer la forma de esas funciones es uno de los objetivos de la ESO. En este trabajo se propone la construcción de sus gráficas desde una perspectiva global, analizando su "ritmo" -rapidez de crecimiento ó decrecimiento-, y no a partir de la representación punto a punto de una tabla de valores. Estos "ritmos" los encontramos continuamente en las formas de nuestro entorno y su presencia se justifica unas veces por cuestiones puramente estéticas, y otras, por necesidades prácticas.

1.- Enfoque 1: Representación gráfica de funciones elementales a partir de la representación punto a punto de una tabla de valores. Inconvenientes.

Es habitual encontrar en los libros de texto de niveles avanzados de secundaria actividades en las que para conocer la gráfica de una función elemental se deben representar punto a punto los pares de valores de una tabla:

Ejemplo 1: En el libro de 4º eso de la editorial Oxford:



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

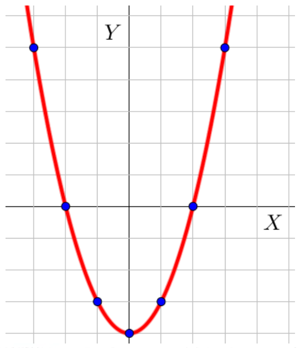
Dada $f(x) = x^2 - 4$, confecciona una tabla de valores y dibuja su gráfica.

Tomamos valores positivos y negativos de la variable independiente, hallamos sus imágenes y las escribimos en la siguiente tabla.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = f(x)$	5	0	−3	−4	−3	0	5

Representamos estos puntos en los ejes de coordenadas:

Como se puede dar cualquier valor a la variable independiente, unimos los puntos y obtenemos la siguiente gráfica:

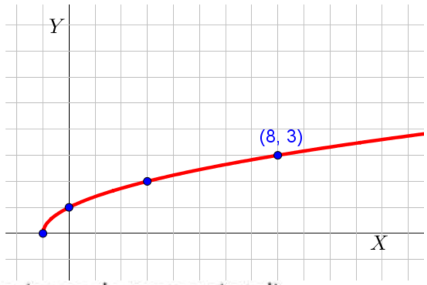


¿Por qué representan estos puntos, cercanos al origen y de coordenadas enteras, y no otros? ¿No harían falta más puntos para estar seguros de la forma de la gráfica? ¿Por qué los puntos los unen de este modo y no con segmentos?

<u>Ejemplo 2: En el solucionario de 4º eso de la editorial Anaya:</u>

- Para representar $y = \sqrt{x+1}$ damos valores:

x	–1	3	0	8
y	0	2	1	3



<u>Ejemplo 3: En el solucionario de 4º eso de la editorial Editex:</u>

Haz una tabla de valores y representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa:

a) $f(x) = \frac{2}{x}$

b) $g(x) = \frac{-1}{x}$

c) $h(x) = \frac{3}{x}$

d) $i(x) = -\frac{2}{x}$

e) $j(x) = \frac{1}{2x}$

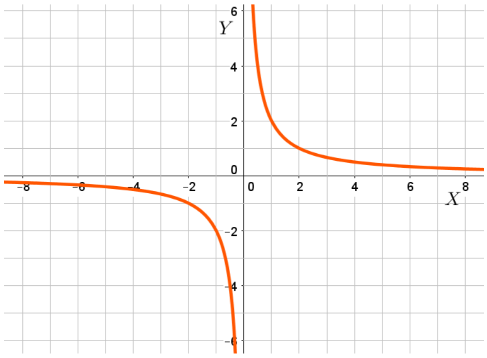
f) $k(x) = \frac{10}{x}$

Proceden de este modo en cada uno de los apartados. Por ejemplo, en el apartado a):

a) $f(x) = \frac{2}{x}$

x	1	2	-1	-2	4	-4
y	2	1	-2	-1	1/2	-1/2

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



De nuevo, para los dos ejemplos anteriores nos planteamos los mismos interrogantes que en el ejemplo nº 1, con el agravante de que ahora, además, la variable independiente x no varía de manera constante (en el nuevo enfoque que a continuación expongo, la variación constante de x es un aspecto esencial a tener en cuenta). Como señalan Félix Martínez y Juan José Martínez, de la Universidad de Cádiz:

"Esta manera de hacer va creando en los alumnos un esquema mental muy básico sobre las representaciones gráficas que a lo largo de la eso se repite, por lo que el esquema se afianza, se interioriza y se convierte en un hábito difícil de cambiar".

De ahí que sea necesario plantear otros enfoques:

2.- Enfoque 2: Representación gráfica de funciones elementales a partir del estudio del "ritmo" de una tabla de valores.

Un aspecto esencial en el trabajo con funciones es estudiar su monotonía y, por tanto, conocer cuándo una función crece y cuándo decrece y, más todavía, cómo de rápido lo hace, es decir, su "ritmo". Porque no es lo mismo, de cara a interpretar un fenómeno, que este evolucione creciendo de forma constante, o de forma cada vez más rápida o de forma cada vez más lenta. Por ejemplo, imaginemos un corredor que hace el mismo recorrido en tres días diferentes y queremos medir qué distancia recorre en función del tiempo cada día:

- Primer día. Ritmo constante: a incrementos constantes del tiempo, se producen incrementos constantes de la distancia recorrida.
- Segundo día. Ritmo no constante: empieza corriendo despacio pero, se encuentra fuerte y animado, y cada vez va corriendo más rápido: a incrementos constantes del tiempo, la distancia recorrida va aumentando.

ISBN 978-84-945722-3-4

- Tercer día. Ritmo no constante: empieza corriendo deprisa pero, se va cansando, y cada vez va corriendo más despacio: a incrementos constantes del tiempo, la distancia recorrida va disminuyendo.

En los tres casos, las curvas asociadas, son todas crecientes, pero tienen formas de crecer bien distintas.

Si, dada una tabla de valores de una función elemental asociada a un contexto, somos capaces de averiguar el ritmo que esconde dicha tabla, podremos esbozar la gráfica de esa función elemental de una manera global, de un solo trazo. Será un trazo aproximado pero suficiente para describir adecuadamente la situación real que estamos estudiando. A continuación, vamos a profundizar en los dos tipos de situaciones que se nos pueden plantear asociadas a ritmos constantes y a ritmos no constantes:

2.1. Ritmos constantes. Gráficas asociadas.

Ejemplo 1: Corredora.

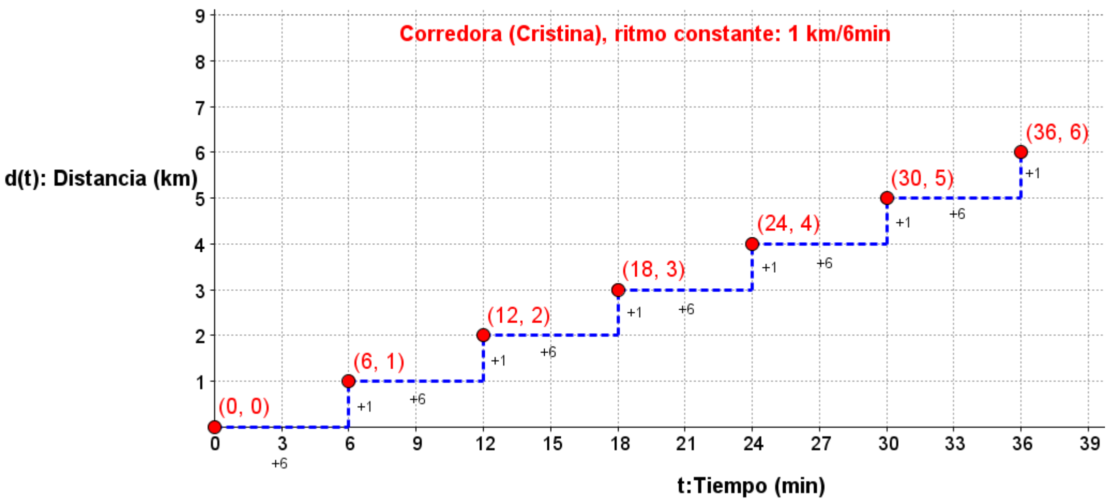
Supongamos una corredora que se mueve de este modo:

+6 min +6 min +6 min +6 min +6 min

t: tiempo (min)	0 min	6 min	12 min	18 min	24 min	30 min
d(t): distancia recorrida (km)	0 km	1 km	2 km	3 km	4 km	5 km

+ 1 km +1 km + 1 km +1 km +1 km

Gráficamente:



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

¿Qué observamos? Observamos que el ritmo de esta corredora es constante (1km/6 min) porque, a incrementos constantes del tiempo, se producen incrementos constantes de la distancia recorrida.

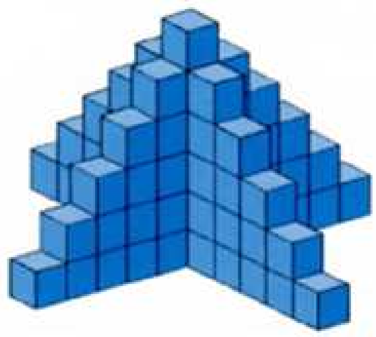
¿Cuál será la gráfica asociada a este movimiento? Evidentemente, una recta, cuya pendiente es, precisamente, el ritmo de la corredora: +1km/6 min.

Pero, ¿cualquier ritmo constante tiene como gráfica asociada una recta?

Veamos este otro ejemplo:

<u>Ejemplo 2: Cubitos de una torre.</u>

Construyamos una torre como esta con ayuda de los policubos:

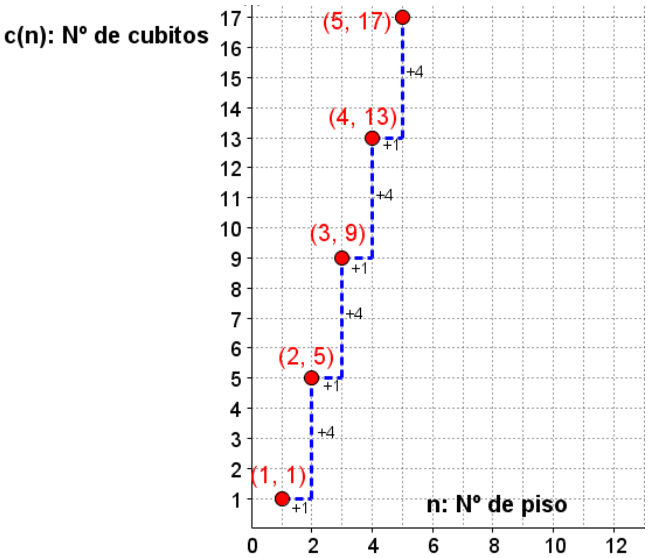


El número de cubitos de cada piso se muestra en la siguiente tabla:

n: Nº de piso	Piso 1	Piso 2	Piso 3	Piso 4	Piso 5	Piso 6
c(n): Nº de cubitos	1 cubito	5 cubitos	9 cubitos	13 cubitos	17 cubitos	21 cubitos

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Gráficamente:



Nuevamente observamos que el ritmo de crecimiento del número de cubitos es constante (+4 cubitos/piso) porque, a incrementos constantes del nivel, se producen incrementos constantes del número de cubitos.

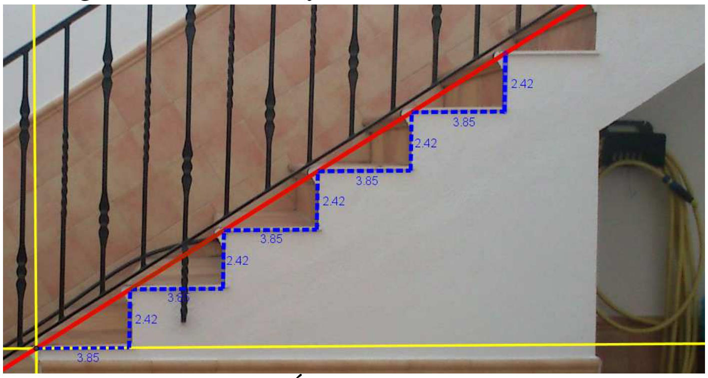
¿Cuál será la gráfica asociada a este fenómeno? Como ambas variables son discretas, nos resultan puntos aislados que se encuentran sobre una recta imaginaria de pendiente +4 cubitos/piso.

En general, los ritmos constantes se caracterizan porque a variaciones constantes (incrementos o disminuciones) de la variable independiente, se producen variaciones constantes de la variable dependiente. Las curvas asociadas a estos ritmos son rectas o están formadas por puntos alineados. Esta es una idea muy interesante porque todas las funciones lineales esconden estos ritmos constantes y, por tanto, todas ellas se pueden describir a través de rectas.

El entorno está repleto de estos ritmos. Son los reyes de la calle! Por ejemplo:

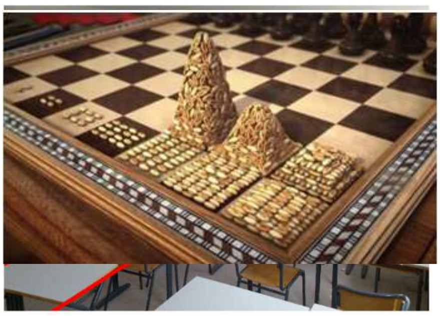
ISBN 978-84-945722-3-4

- <u>Escaleras</u>. Muy cómodo el ritmo constante en la escalera de la izquierda y no tan cómodo en la escalera de la derecha:



- <u>Tobogán de cristal</u> “Skyslide” en la torre del Banco de Estados Unidos en Los Ángeles a unos 300 m de altura. Ritmo de decrecimiento constante.

- En edificios, calles, aulas, …Ritmos de crecimiento constante e igual a 0. Son el “colmo” de un ritmo constante. A variaciones constantes de la distancia, variaciones nulas de la altura:



2.2. Ritmos no constantes. Gráficas asociadas.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Ejemplo 3: Leyenda del ajedrez.

De todos es de sobra conocida la leyenda del nacimiento del juego del ajedrez.

Podemos representar en esta tabla de valores el número de granos de trigo en función del número de casilla del tablero:

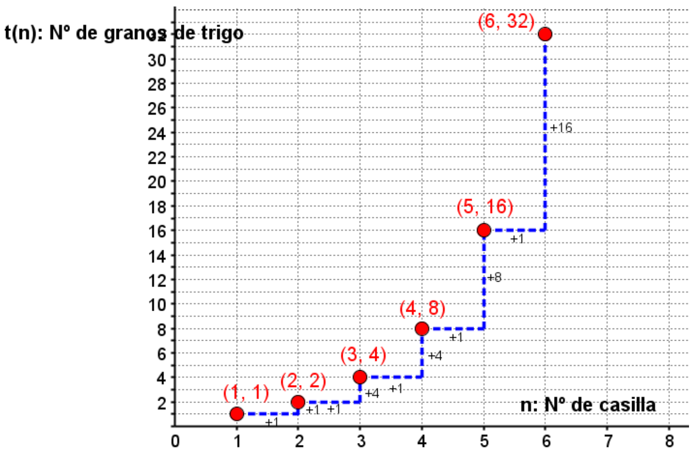
+1 casilla +1 casilla +1 casilla +1 casilla +1 casilla

n: nº de casilla	casilla1	casilla 2	casilla 3	casilla 4	casilla 5	casilla 6
t(n): nº granos de trigo	1 grano	2 granos	4 granos	8 granos	16 granos	32 granos

+ 1 grano +2 granos +4 granos +8 granos +16 granos

Se trata de una función exponencial cuya fórmula es: $t(n) = 2^{n-1}$

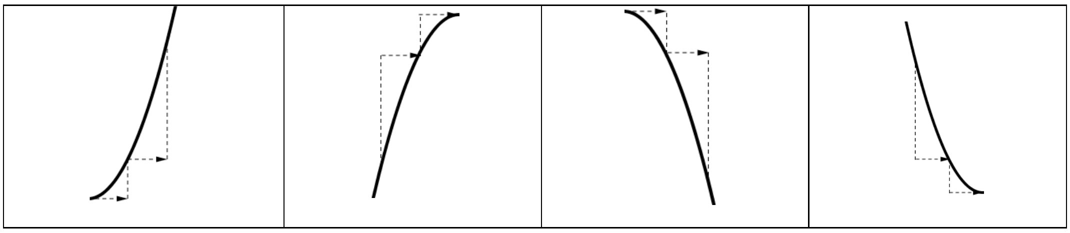
Gráficamente:



Observamos: a incrementos constantes del número de casilla del tablero, incrementos no constantes del número de granos de trigo. En este caso, incrementos cada vez mayores. Por eso, el ritmo de crecimiento del número de granos de trigo es cada vez más rápido. Los puntos ya no están alineados. En general, los ritmos no constantes se caracterizan porque a variaciones constantes (incrementos o disminuciones) de la variable independiente, se producen variaciones no constantes de la variable dependiente. Las curvas asociadas a estos ritmos ya no son rectas sino que adoptan una de estas 4 formas o combinación de ellas:

CRECIMIENTO CADA VEZ MÁS RÁPIDO	CRECIMIENTO CADA VEZ MÁS LENTO	DECRECIMIENTO CADA VEZ MÁS RÁPIDO	DECRECIMIENTO CADA VEZ MÁS LENTO

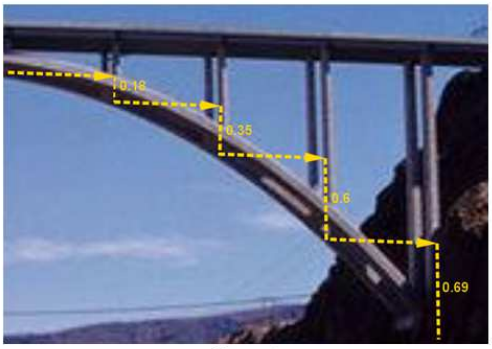
ISBN 978-84-945722-3-4



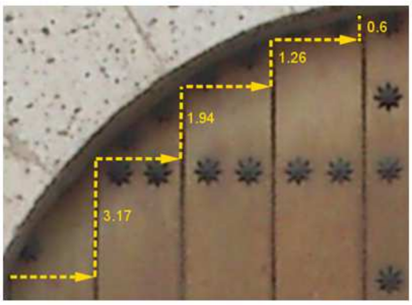
Las gráficas de las funciones elementales que se trabajan en secundaria como funciones cuadráticas, de proporcionalidad inversa, exponenciales y logarítmicas presentan esos ritmos. A partir de la fórmula de una función elemental, podemos elaborar la correspondiente tabla de valores y, a partir de ésta, procediendo como he indicado en los ejemplos 1, 2 y 3, podemos descubrir uno de los ritmos anteriores (tanto constantes como no constantes) y, por tanto, podemos esbozar su gráfica de manera global. Este estudio previo da mucha más información sobre la forma de la gráfica que la de representar las funciones elementales solo a partir de unos cuantos puntos aislados, sin analizar la relación de dependencia que existe entre ambas variables.

En el entorno también encontramos estos ritmos, por ejemplo:

Montaña rusa



Puente



Arco de puerta

Pista de skate

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

En la montaña rusa el ritmo de decrecimiento es cada vez más lento mientras que en el puente, el ritmo de decrecimiento es cada vez más rápido. En éste, la curva que aparece es la catenaria, “curva ideal”, una curva ornamental y estructural porque da solidez a puentes y edificios ya que soporta muy bien las fuerzas de arriba a abajo.

En cambio, el arco de puerta presenta un ritmo de crecimiento cada vez más lento mientras que en la pista de skate, el ritmo de crecimiento es cada vez más rápido. En ésta, la curva que aparece es la cicloide, “curva de descenso más rápido”, porque minimiza el tiempo que tarda un móvil en pasar de un punto A a un punto B al estar sometido a la acción de la gravedad. Por eso esta curva se utiliza, no solo en pistas de skates, sino en toboganes, en rampas de descenso para la evacuación de aviones, etc.

Pero lo más habitual es que estos ritmos se combinen en una misma curva para crear ritmos cambiantes y emoción a tope. Ejemplo: tobogán acuático “Verruckt” en Kansas:

Referencias bibliográficas.

- Shell Centre for Mathematical Education (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas.* Servicio editorial Universidad del País Vasco.

- Martínez, F. y Martínez, J.J. (2014). El uso de tablas de valores para la representación gráfica de funciones. Épsilon. Vol. 31(1), nº86, 9-20.

ISBN 978-84-945722-3-4