CB-429

ÁLGEBRA LINEAR, DO CONCRETO PARA O ABSTRATO

Tatiane da Silva Evangelista
tatilista@gmail.com
Universidade de Brasília - Faculdade do Gama, Brasil

Núcleo temático: As matemáticas e sua integração com outras áreas.
Modalidade: CB.
Nível educativo: superior universitário.
Palavras chaves: álgebra linear, resolução de problemas, abstrato e concreto.

Resumo

O ensino da Álgebra Linear passou por importantes mudanças ao longo dos anos. Todavia, essas modificações não foram suficientes para suprir as dificuldades enfrentadas pelos alunos dessa disciplina. Vários são os fatores que dificultam a aprendizagem. Dentre eles, podemos destacar o elevado nível de abstração de como os assuntos são abordados, o que acaba por impedir, em boa parte dos estudantes, o entendimento de conceitos fundamentais para futura utilização em outras disciplinas. Dessa forma, o objetivo desse trabalho foi relatar a experiência de um projeto desenvolvido em sala de aula que abordou a metodologia de resolução de problemas aplicado, partindo do concreto para o abstrato, de alguns tópicos de Álgebra Linear

Introdução

O ensino da Álgebra Linear passou por transformações ao longo dos anos, principalmente na década de 90 (Celestino, 2000) e é um ramo da Matemática muito importante e de grande aplicabilidade. Os seus conteúdos relacionam problemas de diversas áreas de conhecimento. Porém, o ensino e a aprendizagem dessa disciplina são considerados, por docentes e discentes, como sendo uma experiência difícil devido às dificuldades manifestadas pelos estudantes (Dorier, 1998; Hillel, 2000). Em geral, é a primeira disciplina que os alunos têm contato com uma maior estrutura axiomática no ínicio do curso universitário, exigindo deles elevados níveis de abstração e rigor matemático. Assim, o grau de formalismo não permite aos universitários estabelecerem conexões com o que já sabem de matemática; e a abordagem intuitiva acaba provocando nos alunos o sentimento de estarem aprendendo um tema que não lhes parecem ter significado e sem ligação com situações cotidianas. Cabe ressaltar que a disciplina de Álgebra Linear está presente na maior parte dos cursos universitários da área

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

de exatas, sobretudo nos cursos de engenharia, matemática, física, estatística, computação, etc.

Segundo pensamento deweyano (Dewey, 1959), o aprendizado só ocorre quando há uma situação de problema real para se resolver. Com base nos conhecimentos teóricos e na experiência prática, é possível solucionar o problema passando por cinco fases: caracterização da situação problemática, desenvolvimento da sugestão, observação e experiência, reelaboração intelectual e verificação dos resultados. Assim, a partir de seus conhecimentos e experiências o professor auxilia os alunos a "aprender a pensar" relacionando a prática com a teoria, ou seja, do concreto para o abstrato.

Por conta disso, Uhlig (2002) analisou a exploração intuitiva e geométrica de alguns tópicos da álgebra linear antes da teoria formal ser introduzida, utilizando diário de bordo, *blogs*, como meio de envolver os alunos com os conceitos dessa disciplina.

E para responder a pergunta de praxe: Para que serve o contéudo que estou estudando? Motta (2003) replicou essa indagação levando os alunos para a cozinha, por exemplo, quando se frita um alimento, executam-se rotações para que todos os lados fiquem igualmente fritos. Mesmo que haja rotações sobre os mesmos eixos, o corpo será rotacionado de forma diferente se a ordem dos eixos for alterada. Observe que ao fritar um objeto com três dimensões, abordaram-se temas como: transformações lineares no espaço, rotações e comutatividade de matrizes. Nessa aplicação, as rotações de eixo não são comutáveis. Malajovich (2010) defendeu que ninguém é capaz de aprender alguma coisa sem experiência e informação sobre ela. Dessa forma, abordou em seu livro diversas práticas cotidianas da álgebra linear, tais como: desempenho do algoritmo de busca do *Google*, funcionamento dos *video games* tridimensionais, performance da televisão digital, entre outros.

A fim de trazer algumas contribuições para esse tema, neste artigo, apresentamos um relato de uma experiência em sala de aula que utilizou resolução de problemas como ferramenta de aplicação para abordar o concreto para o abstrato no ensino de alguns tópicos de álgebra linear.

Metodologia da pesquisa: resolução de problemas

ISBN 978-84-945722-3-4

O ensino da matemática por meio da resolução de problemas vem ao encontro das necessidades de tornar a matemática aplicada e significativa ao contexto do ensino e aprendizagem. De acordo com Polya (1994), o problema desafia a curiosidade e contextualiza uma situação-problema no desenvolvimento de uma atividade didática.

No final da década de 1940, surgiram os primeiros trabalhos significativos em resolução de problemas. Segundo Onuchic (1999):

> Em 1948, o trabalho desenvolvido por Herbert F. Spitzer, em aritmética básica, nos Estados Unidos, se apoiava numa aprendizagem com compreensão, sempre a partir de situações-problemas e, em 1964, no Brasil, o professor Luis Alberto S. Brasil defendia um ensino de matemática a partir de um problema gerador de novos conceitos e novos conteúdos (1999, p.202).

No período de 1960 e 1970, o ensino da matemática era abordado de maneira abstrata e precisa. Nessa época, houve uma preocupação com a didática em sala de aula e não eran enfatizadas no processo ensino-aprendizagem aplicações da matemática ou resoluções de problema, bem como o conceito de interdisciplinidade. Finalmente, no final da década de 1970, inicio o ensino da matemática usando ese método que ganhou visibilidade entre os educadores. Observou-se, claramente, uma nova abordagem da matemática por intermédio dessa metodologia, promovendo a criatividade e a espontaneidade. De acordo com Schroeder e Lester (1989), a resolução de problemas coloca o foco da atenção dos estudantes sobre as ideias e sobre o “dar sentido as coisas”.

Nesse trabalho, procurou-se abordar problemas de aplicação, os quais retratam situações concretas, possibilitando o discente fazer a conexão e a compreensão de conceitos abstratos da matemática envolvida. Dessa forma, notamos que o concreto e o abstrato, são, portanto, elementos indissociáveis para o conhecimento humano.

A seguir, apresentaremos alguns dos problemas desenvolvidos em sala da aula.

A prática e os relatos dos resultados

Os tópicos concretos voltadas para alguns temas de álgebra linear fazem parte de um projeto de tutoria executado no 1ª/2016 para os cursos de Engenharia da UnB *campus* Gama, que durante o período de execução desse projeto, oferecia duas turmas de Introdução à Algebra

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Linear (IAL) com 120 alunos cada. Somente uma turma participou desse trabalho, essa opção nos proporcionou fazer uma uma análise estatística do desempenho acadêmico dessas turmas. Enfatiza-se que o objetivo essencial deste trabalho é a apresentação dos relatos das experiências didáticas utilizadas no processo ensino-aprendizagem de Álgebra Linear. Sendo assim, outro estudo sobre uma análise estatística, tanto descritiva como inferencial, ficará como perspectiva.

Todas as aulas foram planejadas com a intenção de valorizar a participação dos alunos, buscando torná-los agentes da construção dos seus próprios conhecimentos e sendo capaz de fazer a conectivade da aplicabilidade real com a teoria abstrata estudada. Assim, apresentaremos o desenvolvimento de quatro aulas desenvolvidas nesse projeto com seus objetivos, atividades e comentários.

Aula 1: Criptografia - um olhar matricial

Objetivo: Incentivar os alunos a importância da inversão matricial.

Atividade: Iniciamos a aula com a exposição de algumas sinopses de filmes que envolviam tentativas de desvendar códigos secretos, tais como o livro O Código da Vinci de Dan Drown publicado em 2005 e o filme O jogo da imitação lançado em 2014. Após a leitura dessas resenhas, foram feitos questionamentos de quais ferramentas matemáticas seriam precisos para codificar e decodificar uma mensagem. Em seguida, os alunos foram organizados em grupos de quatro pessoas e propomos o seguinte problema: **João passou a seguinte mensagem a Maria:**

33,83,145,59,27,87,115,75,95,145,47,17,94,50,63,82,25,93,83,93,83,215,377,157,68,225,302,195,247,377,124,45,241,129,165,214,65,242,221,247.

Sabe-se que a matriz utilizada para criptografar a mensagem foi $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$**. Qual foi a mensagem?**

Depois, os alunos foram orientados a seguir a proposta de resolução de problema sugerida por Polya (1994): compreensão do problema, construção de uma estratégia de resolução, execução da estratégia e revisão da solução.

Comentários: A introdução da aula, através das sinopses despertou o interesse dos discentes pela atividade. E a grande maioria entendeu que a primeira estratégia de resolução do problema era de combinar o código secreto entre o remetente e destinatário. Assim, que cada

ISBN 978-84-945722-3-4

grupo de alunos criou a tabela de código alfanumérico. Em seguida, os alunos foram questionados sobre a importância de criar na tabela um representante para o espaço entre as palavras. Então, os alunos discutiram acerca do problema de como representar a mensagem fornecida na forma matricial e as várias formas de calcular a inversa da matriz A. Nesse ponto, a maioria dos alunos não tiveram problema na inversão por ser uma matriz de ordem 2, alguns sugeriram usar a relação de matriz adjunta com o seu determinante outros preferiram trabalhar com a definição $A.A^{-1} = I$. Por fim, nenhum estudante apresentou dificuldades de efetuar uma multiplicação matricial. No final, todos estavam muito empolgados em descobrir a mensagem de cada grupo, uma vez que todos adotaram códigos diferentes. A atividade foi muito produtiva, pois os alunos perceberam que a matriz codificadora A tem que ter um determinante não nulo (condição de inversabilidade).

Aula 2: Balanceamento químico

Objetivo: Resolução de um sistema linear indeterminado.

Atividade: A aula iniciou-se com um debate do processo de fotossíntese. O professor indagou os alunos como era esse método. Todos os alunos destacaram a grande importância do Sol como fator essencial para a produção de oxigênio pelas plantas. Novamente, os alunos foram organizados em grupos e apresentado o seguinte problema:

A fotossíntese é o processo através do qual as plantas e alguns outros organismos transformam energia luminosa em energia química processando o dióxido de carbono (CO_2), água (H_2O) e minerais em compostos orgânicos e produzindo oxigênio gasoso (O_2). Determine equação geral desse balanceamento químico.

Comentários: Os alunos mostraram conhecimento que numa reação química a soma das massas das substâncias reagentes é igual à soma das massas dos produtos da reação. Eles tiveram em dificuldade em montar a fórmula química do composto orgânico ($C_6H_{12}O_6$). Começaram a resolver o problema pelo método da tentativa e erro, mas não foi muito eficaz na resolução. Assim, começaram a discussão do problema e observaram que a melhor maneira era montar um sistema linear de acordo com cada componente orgânico da equação química (carbônio, oxigênio e hidrogênio). Resultando num sistema de três variáveis e quatro equações. Nessa etapa, a maioria teve problemas em resolver um sistema linear indeterminado usando escalonamento. O professor interveio fazendo a explicação da solução.

ISBN 978-84-945722-3-4

Essa atividade foi muito eficaz pois os alunos perceberam a importância da resolução de um sistema linear nesse processo.

Aula 3: Conjunto das cores primárias

Objetivo: Verificar alguns axiomas de espaço vetorial.

Atividade: Introduziu-se a aula recordando as cores primárias, secundárias e terciárias e, suas posições no círculo cromático, usando como material de apoio tintas guaches. Em seguida, foi introduzido o seguinte problema: **É possível criar um conjunto de cores primárias em que se mantêm a comutatividade, a associatividade e a existência do complementar entre as cores?**

Comentários: Os estudantes ficaram muito animados em tornar a aula de matemática em educação artística. Eles captaram que a ideia da resolução do problema era entender os termos: comutatividade, associatividade e complementar. Nenhum aluno teve dificuldade nesses conceitos e manipularam as cores corretamente e verificaram as propriedades com sucesso. Essa aplicação proporcionou um maneira muito clara e fácil de entender os axiomas de espaço vetorial, cujo tema a maioria dos alunos achavam muito difícil devido às definições abstratas.

Aula 4: Rotações de imagens

Objetivo: Estudar transformações lineares.

Atividade: A aula começou mostrando aos alunos a seguinte imagem:

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 1: Careca ou cabeludo?

Fonte: http://www.oqueeoquee.com/imagens-ambiguas/

E fez a seguinte pergunta: **O que acontecesse quando você rotaciona a figura 180 graus? Como fazer essa rotação?**

Comentários: Os discentes se divertiram em virar a figura de cabeça para baixo. E a grande parte, deduziram que a solução do problema era aplicar uma função com uma característica "especial", mas não conseguiram deduzir essa propriedade. O docente interveio nessa aplicação explicando a teoria. Foi uma atividade relevante pois os alunos notaram a importância do conceito de transformação linear.

Considerações finais

Com os resultados obtidos nesse trabalho, foi possível observar que, tanto por parte dos alunos, quanto pelos docentes, o uso de aplicações concretas no processo ensino e aprendizagem da disciplina da Álgebra Linear aperfeiçoou o melhor aprendizado dessa matéria, pois tornou mais fácil ao estudante criar associações e generalizações dessas atividades com os conteúdos algébricos relacionados. A observação do comportamento dos alunos frente aos problemas propostos, e também do comprometimento por eles demonstrado na procura por solução, corrobora os dizeres de Dewey (1959) em relação ao fato de a aprendizagem ocorrer efetivamente somente nos casos em que há um problema real para se resolver. No ensino de matemática, as práticas reais propiciam um ambiente no qual essa deixa de possuir um caráter estritamente

ISBN 978-84-945722-3-4

abstrato e passa a ser vista como algo rotineiro, aplicável no dia a dia e de fácil acesso. Neste trabalho, mediante a utilização das atividades concretas, constatamos que os discentes demonstraram mais interesse e motivação no estudo de conteúdos da álgebra linear. A opinião geral dos alunos enfatizou que essas atividades permitiram um aprendizado mais fácil, dinâmico e prazeroso. A estatística comparativa do índice de aprovação das turmas de IAL que participaram e não participaram do projeto foram 67% e 37%, respectivamente. Como perspectiva, almejamos ampliar o alcance deste trabalho, desenvolvendo mais atividades concretas para estudar outras teorias abstratas da matemática; bem como replicá-lo em mais turmas a fim de aglutinar dados estatísticos para a realização de uma análise descritiva e inferencial aprofundada.

Referências bibliográficas

Celestino, M. R. (2000). *Ensino-aprendizagem da álgebra linear: as pesquisas brasileiras na década de 90*. Brasil: PUC-São Paulo.

Dewey, J. (1959). *Democracia e educação: introdução à filosofia da educação*. 3a. ed. São Paulo: Nacional. Tradução de Godofredo Rangel e Anísio Teixeira.

Dorier, J. L. (1998). État de l'art de la recherche en didactique – À propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire. *França: Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 18, n 2, p. 191-230.

Hillel, J. (2000) Modes of description and the problem of representation in linear algebra. *In: J. L. Dorier (d,), On the teachig of liner algebra* (p. 191-207). Kluwer Academic Publishers.

Malajovich, G. (2010) *Álgebra linear*, 3a. ed, Brasil: UFRJ.

Motta, V. S. (2003), *Álgebra linear na cozinha*, Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia - Cobenge.

Onuchic, L.R. (1999). Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: Bicudo, M.A.R. (org): *Pesquisa em educação matemática: Concepções e perspectivas*. São Paulo: Edunesp, p. 199-218.

Polya, G. (1994) *A arte de resolver problemas: um enfoque do método matemático*. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro.

Schroeder, T.L; Lester Jr, F.K. (1989). Developing understanding in mathematics via problema solving. In: Trafton, P. R.; Shulte, A. P. (ed). *New directions for elementary school mathematics*. Reston: NCTM, p. 31-42.

ISBN 978-84-945722-3-4

Uhlig, F. (2002). The Role of Proof in Comprehending and Teaching Elementary Linear Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 50, p. 335–346.

ISBN 978-84-945722-3-4